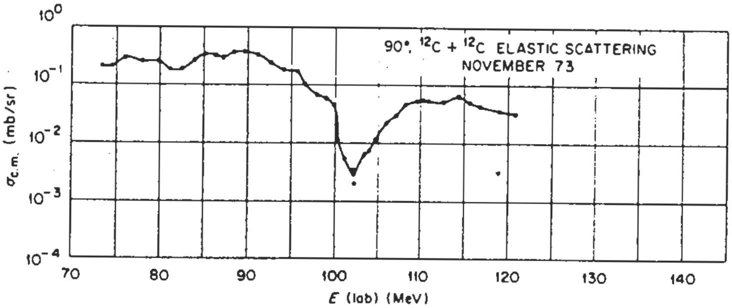
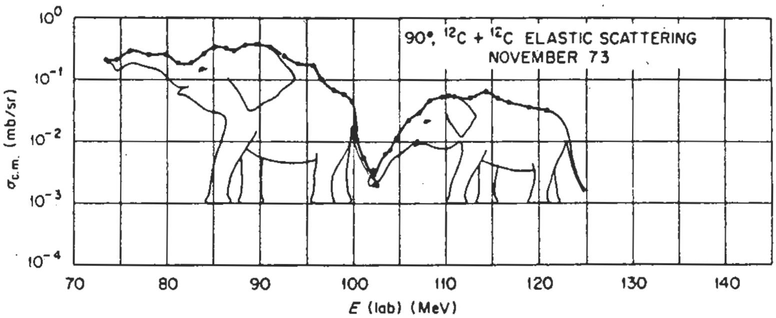
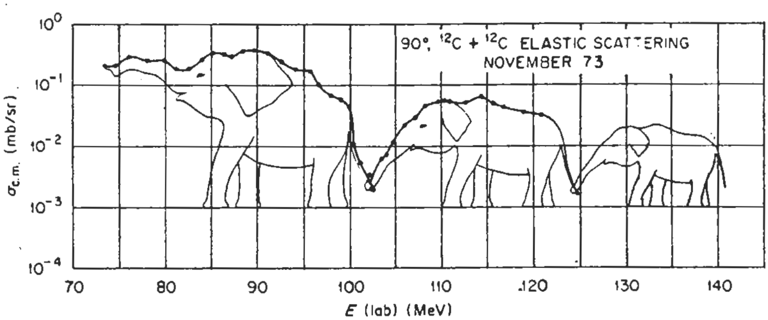
(α)



(β)



(γ)



α) Σκέδαση πυρήνων ^{12}C. Πειραματικά αποτελέσματα. β) Προσαρμογή θεωρητικής καμπύλης. γ) Θεωρητική πρόβλεψη για υψηλότερες ενέργειες. *(S. Raman)*

Ανάλυση και παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτων

Ανάλυση και παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτων

Κ. Χριστοδουλίδης

1. Εισαγωγή
2. Σφάλματα
2.1. Συστηματικά σφάλματα
2.2. Τυχαία σφάλματα
3. Η θεωρία των σφαλμάτων
3.1. Μέση τιμή των μετρήσεων
3.2. Τυπική απόκλιση των μετρήσεων
3.3. Η κανονική κατανομή
3.4. Τυπική απόκλιση μίας μέτρησης
3.5. Τυπική απόκλιση της μέσης τιμής. Σφάλματα
3.6. Διάδοση σφαλμάτων
4. Παρουσίαση των αποτελεσμάτων
4.1. Παρουσίαση των αριθμητικών αποτελεσμάτων
4.1.1. Σημαντικά ψηφία. Στρογγύλευμα αριθμών
4.1.2. Αβεβαιότητα στην τιμή του σφάλματος
4.1.3. Παρουσίαση αριθμητικών αποτελεσμάτων
4.2. Γραφικές παραστάσεις
4.2.1. Η επιλογή των αξόνων
4.2.2. Απεικόνιση των πειραματικών σημείων
4.2.3. Χάραξη της καμπύλης
Παράρτημα Α: Υπολογισμός της κλίσης ευθείας ή καμπύλης
Παράρτημα Β: Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων
Βιβλιογραφία
Συνόψιση των κυριοτέρων αποτελεσμάτων

Ανάλυση και παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτων

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μέτρηση συνίσταται στον καθορισμό του μεγέθους ή μέτρου μιας φυσικής ποσότητας σε σχέση με μια ορισμένη μετρική μονάδα. Το αποτέλεσμα επομένως της μέτρησης μιας φυσικής ποσότητας εκφράζεται με έναν αριθμό (που δίνει τη σχέση μεταξύ του μεγέθους που μετρήθηκε και εκείνου που λαμβάνεται ως μονάδα) και με την αντίστοιχη μονάδα. Επιπλέον, στην περίπτωση διανυσματικού μεγέθους (π.χ. ταχύτητα, δύναμη, ένταση πεδίου), η μέτρηση ορίζει και τη διεύθυνση και φορά του μετρούμενου μεγέθους.

Το αποτέλεσμα της μέτρησης δεν αναμένεται, εν γένει, να συμπέσει με την πραγματική τιμή του μεγέθους, η οποία είναι άγνωστη. Εξάλλου, η επανάληψη της μέτρησης οδηγεί γενικά σε διαφορετικά μεταξύ τους αποτελέσματα. Είναι επομένως εξίσου σημαντικό να βρεθεί και να δοθεί ένα μέτρο αξιοπιστίας του αποτελέσματος.

Η διαφορά μεταξύ του αποτελέσματος μιας μέτρησης και της πραγματικής τιμής του μετρούμενου μεγέθους ονομάζεται **σφάλμα της μέτρησης.** Η θεωρία των σφαλμάτων δίνει τους κανόνες υπολογισμού του σφάλματος μιας μέτρησης, τόσο για άμεσα μετρούμενα μεγέθη όσο και για μεγέθη που υπολογίζονται έμμεσα από τα αποτελέσματα μετρήσεων άλλων μεγεθών.

Είναι, τέλος, πολύ σημαντική η παρουσίαση των αποτελεσμάτων των μετρήσεων με τρόπο που να περιέχει και να μεταδίδει όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από τις μετρήσεις.

Οι βασικές αρχές της ανάλυσης και παρουσίασης πειραματικών αποτελεσμάτων δίνονται αμέσως πιο κάτω.

2. ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Τα σφάλματα των μετρήσεων διακρίνονται, ανάλογα με την προέλευσή τους, σε δύο κατηγορίες: τα **συστηματικά** και τα **τυχαία** σφάλματα.

2.1. Συστηματικά σφάλματα

Συστηματικά είναι τα σφάλματα που παραμένουν αμετάβλητα σε διαδοχικές μετρήσεις ή που μεταβάλλονται με κάποιο συστηματικό τρόπο με το χρόνο ή κάποιαν άλλη παράμετρο. Μπορεί να οφείλονται σε ατέλειες του οργάνου, στη μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε ή και στον ίδιο τον παρατηρητή. Μερικά παραδείγματα είναι τα ακόλουθα:

– Το «σφάλμα μηδενός» είναι ένα πολύ κοινό συστηματικό σφάλμα. Αν, για παράδειγμα, ο δείκτης ενός οργάνου έχει μετατοπιστεί σε σχέση με την κλίμακά του, τότε οι ενδείξεις του θα διαφέρουν από τις σωστές κατά μια σταθερή ποσότητα.
– Αν μετράμε μήκη με ένα «χάρακα του ενός μέτρου» που έχει πραγματικό μήκος 99,9 cm, τα αποτελέσματα που θα προκύπτουν θα είναι συστηματικά μεγαλύτερα των πραγματικών κατά 0,1%.
– Ένα όργανο που χρειάζεται ένα ορισμένο χρονικό διάστημα για να φτάσει σε μια κατάσταση ισορροπίας (π.χ. θερμικής), ενδέχεται να δίνει συστηματικά λανθασμένες ενδείξεις στη διάρκεια της μεταβατικής περιόδου.
– Οι συνήθειες των διαφόρων παρατηρητών διαφέρουν και έχει τεκμηριωθεί επαρκώς, κυρίως από αστρονομικές παρατηρήσεις, ότι κάποια συστηματικά σφάλματα είναι χαρακτηριστικά του παρατηρητή.
– Αν στην επεξεργασία των αποτελεσμάτων χρησιμοποιηθεί μια λανθασμένη σταθερά ή και μια προσεγγιστική θεωρητική σχέση μεταξύ δύο ή περισσοτέρων μεγεθών, τότε θα προκύψουν συστηματικά σφάλματα στα εξαγόμενα αποτελέσματα.

Τα συστηματικά σφάλματα είναι δύσκολο να ανιχνευτούν και συχνά είναι τα σημαντικότερα σφάλματα. Η πείρα του παρατηρητή είναι ο κυριότερος παράγοντας για την αποφυγή και τη διόρθωσή τους. Ο πιο κοινός τρόπος ανίχνευσης των συστηματικών σφαλμάτων είναι η σύγκριση των οργάνων ή και ολόκληρου του συστήματος μέτρησης με άλλα που έχουν μεγαλύτερη ακρίβεια και που είναι διαπιστωμένο ότι έχουν αμελητέα συστηματικά σφάλματα.

2.2. Τυχαία σφάλματα

Τυχαία είναι τα σφάλματα που οφείλονται σε πολλούς απρόβλεπτους παράγοντες, μεταβάλλονται με το χρόνο κατά ακανόνιστο τρόπο και είναι εξίσου πιθανό να είναι θετικά ή αρνητικά.

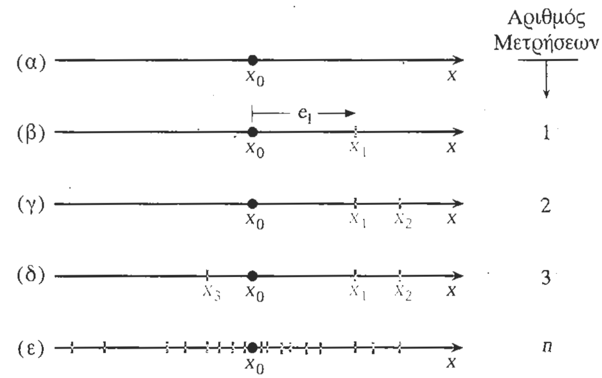
Κλασικό παράδειγμα είναι αυτό των σφαλμάτων που οφείλονται στο θερμικό θόρυβο ηλεκτρονικών οργάνων. Ο θόρυβος αυτός προέρχεται από την τυχαία θερμική κίνηση ηλεκτρονίων μέσα σε αντιστάσεις και άλλα στοιχεία του οργάνου, που οδηγεί στην εμφάνιση μικρών διαφορών δυναμικού στα άκρα τους. Τα σήματα αυτά, αφού υποστούν την επεξεργασία στην οποία τα υποβάλλει το ίδιο το όργανο, εμφανίζονται στην έξοδό του ως τυχαίες αυξομειώσεις στην ένδειξη του οργάνου. Υπάρχουν βεβαίως τρόποι ελαχιστοποίησης του θερμικού θορύβου, είναι όμως πρακτικά και θεωρητικά αδύνατο να μηδενιστεί ο θόρυβος αυτός.

Η βασική ιδιότητα των τυχαίων σφαλμάτων να είναι με ίσες πιθανότητες θετικά ή αρνητικά, καθώς και το γεγονός ότι μικρές αποκλίσεις από την πραγματική τιμή είναι πιο πιθανές από τις μεγάλες, κάνουν δυνατό τον περιορισμό της αβεβαιότητας στον προσδιορισμό ενός μεγέθους με την επανάληψη της μέτρησης πολλές φορές, ώστε κατά μέσον όρο τα τυχαία σφάλματα να αλληλοαναιρούνται σε κάποιο βαθμό.

Στην πράξη είναι δύσκολο να γίνει διαχωρισμός των συστηματικών σφαλμάτων από τα τυχαία. Εξάλλου πολλά σφάλματα είναι συνδυασμός και των δύο τύπων. Η σύντομη περίληψη της θεωρίας των σφαλμάτων που θα ακολουθήσει θα αναφέρεται μόνο σε τυχαία σφάλματα. Δεν πρέπει όμως να ξεχνάμε ότι οι μετρήσεις ενδεχομένως να περιέχουν συστηματικά σφάλματα πολύ μεγαλύτερα των τυχαίων και επομένως καθοριστικά για την αξιοπιστία του αποτελέσματος.

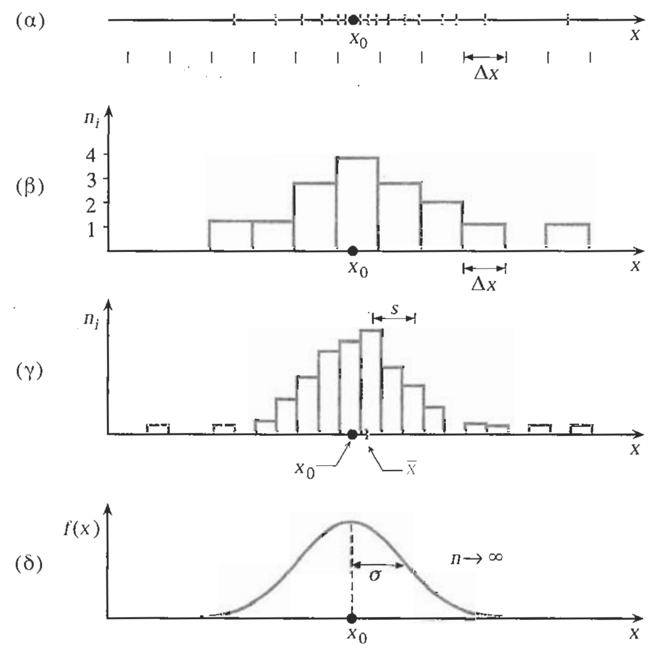
3. Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Έστω ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε την τιμή ενός φυσικού μεγέθους x, του οποίου η **πραγματική τιμή** x_0 μας είναι άγνωστη. Μια μέτρηση του μεγέθους αυτού θα δώσει αποτέλεσμα x_1 που, λόγω των τυχαίων σφαλμάτων, θα διαφέρει γενικά από την x_0, έστω κατά ποσότητα $e_1 = x_1 - x_0$ που ονομάζεται σφάλμα μέτρησης (Σχ. 1(α) και (β)). Επειδή το x_0 μας είναι άγνωστο, το e_1 μας είναι επίσης άγνωστο. Μια δεύτερη μέτρηση, *κάτω από όσο το δυνατόν ίδιες συνθήκες*, δίνει αποτέλεσμα x_2 (Σχ. 1(γ)) με σφάλμα $e_2 = x_2 - x_0$ που γενικά διαφέρει από το e_1, μια τρίτη μέτρηση δίνει αποτέλεσμα x_3 (Σχ. 1(δ)) κ.ο.κ. Αν εκτελέσουμε τη μέτρηση συνολικά n φορές, θα έχουμε n αποτελέσματα όπως στο Σχ. 1(ε).



Σχήμα 1. Η διασπορά των αποτελεσμάτων n μετρήσεων γύρω από την πραγματική τιμή x_0.

Όπως βλέπουμε, υπάρχει μια διασπορά των αποτελεσμάτων γύρω από την πραγματική τιμή x_0. Αυτή αναδεικνύεται καλύτερα αν κατασκευάσουμε ένα **ιστόγραμμα** των μετρήσεών μας με τον ακόλουθο τρόπο. Χωρίζουμε τον άξονα των x στην περιοχή των αποτελεσμάτων μας σε ίσα διαστήματα κάποιου Δx (Σχ. 2(α)), μετράμε τον



Σχήμα 2. Το ιστόγραμμα των αποτελεσμάτων n μετρήσεων του μεγέθους x, που έχει πραγματική τιμή x_0.

αριθμό των μετρήσεων n_i στο κάθε διάστημα και υψώνουμε σε κάθε διάστημα στήλη με ύψος ανάλογο του n_i (Σχ. 2(β)). Με βάση το ιστόγραμμα των μετρήσεων θα ορίσουμε μερικά χαρακτηριστικά μεγέθη.

3.1. Μέση τιμή των μετρήσεων

Έχοντας κάνει n μετρήσεις με αποτελέσματα x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) μπορούμε να υπολογίσουμε τη **μέση τιμή** μιας σειράς μετρήσεων,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

Επειδή $x_i = x_0 + e_i$, έχουμε

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_0 + e_i) = x_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i \tag{2}$$

Δεδομένου ότι τα σφάλματα των μετρήσεων, e_i, είναι εξίσου πιθανό να είναι θετικά ή αρνητικά, περιμένουμε ότι, για αυξανόμενο n, το άθροισμα των σφαλμάτων διαιρούμενο δια του n θα τείνει στο μηδέν και η μέση τιμή θα πλησιάζει την πραγματική, x_0. Βλέπουμε λοιπόν ποιοτικά κάτι που μπορεί να αποδειχτεί και με μεγαλύτερη αυστηρότητα, ότι δηλαδή η $\bar{x}$ είναι η καλύτερη εκτίμηση που μπορούμε να έχουμε για την πραγματική τιμή x_0 μετά από n μετρήσεις.

3.2. Τυπική απόκλιση των μετρήσεων

Για κάθε μέτρηση x_i ορίζουμε την **απόκλιση από τη μέση τιμή** ως $d_i = x_i - \bar{x}$. Σε αντίθεση με τα e_i, τα d_i είναι γνωστά.

Ως μέτρο της διασποράς των τιμών x_i γύρω από την $\bar{x}$ ορίζουμε την τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των αποκλίσεων

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} \tag{3}$$

την οποία ονομάζουμε **τυπική απόκλιση μιας σειράς μετρήσεων.**

3.3. Η κανονική κατανομή

Αν θεωρήσουμε ότι ο αριθμός των μετρήσεων, n, γίνεται ολοένα και μεγαλύτερος, είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια το ιστόγραμμα (ή την κατανομή) των μετρήσεών μας. Μπορούμε να κάνουμε ολοένα και πιο μικρό το διάστημα Δx του Σχ. 2(β), όπως φαίνεται στο Σχ. 2(γ), φροντίζοντας το ολικόν εμβαδόν του ιστογράμματος να παραμένει σταθερό και ίσο με τη μονάδα, με κατάλληλη επιλογή της κλίμακας των n_i. Αυτό έχει ως συνέπεια το εμβαδόν κάτω από το ιστόγραμμα μεταξύ δύο τιμών x_1 και x_2 να μας δίνει την πιθανότητα το αποτέλεσμα μιας μέτρησης να βρίσκεται ανάμεσα σε αυτές τις δύο τιμές.

Από τον ορισμό του s (Εξ. (3)), βλέπουμε ότι, για κάθε επιπρόσθετη μέτρηση που κάνουμε, το άθροισμα στον αριθμητή αυξάνει κατά έναν όρο d_i^2 αλλά και ο παρονομαστής n αυξάνει κατά μία μονάδα. Βεβαίως το d_i έχει στατιστικές διακυμάνσεις αλλά στο όριο, για πολύ μεγάλα n, η ταυτόχρονη αύξηση αριθμητή και παρονομαστή έχει ως αποτέλεσμα η τιμή του s να τείνει να σταθεροποιηθεί σε μια τιμή σ_0 που ορίζουμε ως

$$\sigma_0 = \lim_{n\to\infty} s = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_0\right)^2}{n}} \tag{4}$$

και που ονομάζεται **τυπική απόκλιση της κατανομής.** Βεβαίως, όπως και η x_0, έτσι και η σ_0 μας είναι άγνωστη και μόνο εκτιμήσεις μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της όταν έχουμε τον πεπερασμένο αριθμό των n μετρήσεων.

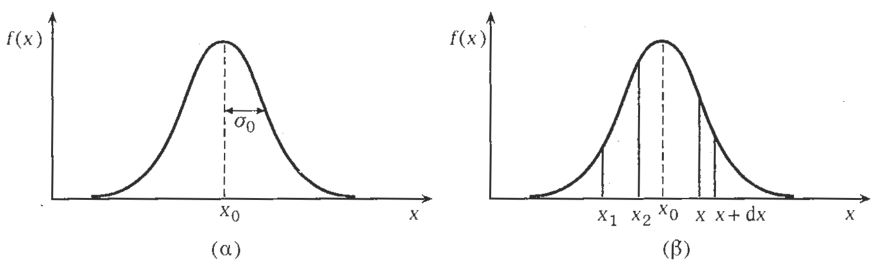
Καθώς $\Delta x \to 0$ και $n \to \infty$, η μέση τιμή $\bar{x} \to x_0$ και το ιστόγραμμα των μετρήσεων γίνεται μια συνεχής καμπύλη $f(x)$ όπως φαίνεται στο Σχ. 2(δ). Η συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής.** Είναι **κανονικοποιημένη,** δηλαδή το ολικό εμβαδόν κάτω από την καμπύλη είναι ίσο με τη μονάδα.

Είναι δυνατόν να προβλεφθεί θεωρητικά η μορφή της καμπύλης $f(x)$ κάτω από ορισμένες υποθέσεις. Αυτό έγινε από τον De Moivre το 1733 και αργότερα από τους Laplace και Gauss. Υποθέτοντας ότι το τελικό σφάλμα σε μια μέτρηση είναι αποτέλεσμα ενός μεγάλου αριθμού πολύ μικρών αποκλίσεων που οφείλονται σε ανεξάρτητα αίτια και οι οποίες είναι εξίσου πιθανόν να είναι θετικές ή αρνητικές, ο Laplace το 1783 έδειξε ότι η συνάρτηση κατανομής των μετρήσεων δίνεται από την

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma_0^2} \tag{5}$$

Ο Gauss βρήκε την ίδια κατανομή βασιζόμενος στην υπόθεση ότι η πιο πιθανή τιμή ενός μετρούμενου μεγέθους είναι η μέση τιμή ενός αριθμού εξίσου αξιόπιστων μετρήσεων. Η κατανομή είναι γνωστή ως κατανομή Gauss ή **γκαουσιανή.** Επίσης ονομάζεται και **κανονική**, παρ' όλον ότι δεν έχει καθολική ισχύ. Ακόμη όμως και στις περιπτώσεις όπου παρατηρούνται αποκλίσεις από την κανονική κατανομή, το γεγονός ότι είναι μαθηματικώς πολύ εύχρηστη και είναι μια πολύ καλή προσέγγιση στις περισσότερες περιπτώσεις έχει οδηγήσει στην υιοθέτησή της στη θεωρία των σφαλμάτων.

Η μορφή της γκαουσιανής κατανομής φαίνεται στο Σχ. 3(α). Έχει μέγιστο για $x = x_0$, πράγμα που σημαίνει ότι τιμές κοντά στο x_0 είναι πιο πιθανές ενώ μετρήσεις με μεγάλες αποκλίσεις είναι πιο σπάνιες. Η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς $x = x_0$ και αυτό προκύπτει από την υπόθεση ότι οι θετικές και οι αρνητικές αποκλίσεις από το x_0 είναι εξίσου πιθανές. Η καμπύλη τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν για $x = \pm\infty$. Το πλάτος της καθορίζεται από την παράμετρο σ_0 (Σχ. 3(α)). Τα σημεία $x = x_0 \pm \sigma_0$ είναι σημεία καμπής. Η γκαουσιανή κατανομή (5) είναι κανονικοποιημένη, δηλαδή το ολοκλήρωμά της μεταξύ $x = -\infty$ και $x = \infty$ είναι ίσο με τη μονάδα. Έτσι, η πιθανότητα μιας μέτρησης του x να δώσει αποτέλεσμα μεταξύ x και $x + dx$ είναι $f(x)\,dx$. Επίσης, το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη μεταξύ των τιμών x_1 και x_2 δίνει την πιθανότητα μια μέτρηση του x να δώσει αποτέλεσμα μεταξύ x_1 και x_2 (Σχ. 3(β)).



Σχήμα 3. Η γκαουσιανή συνάρτηση κατανομής.

Υπολογίζοντας τα εμβαδά, βρίσκουμε ότι η πιθανότητα να βρίσκεται μια μέτρηση

μεταξύ	$x_0 - \sigma_0$	και	$x_0 + \sigma_0$	είναι	68,3 %
»	$x_0 - 2\sigma_0$	»	$x_0 + 2\sigma_0$	»	95,4 %
»	$x_0 - 3\sigma_0$	»	$x_0 + 3\sigma_0$	»	99,76%

Δηλαδή, μόνο μία μέτρηση στις 3 περίπου θα διαφέρει από την πραγματική τιμή κατά περισσότερο από $1\sigma_0$ (μια τυπική απόκλιση) ενώ μόνο μία στις 400 μετρήσεις θα διαφέρει περισσότερο από $3\sigma_0$.

Η τυπική απόκλιση δίνει λοιπόν ένα μέτρο της διασποράς των μετρήσεων. Μεγάλο σ_0 σημαίνει μεγάλη διασπορά (Σχ. 3(α)). Είναι επομένως ένα μέτρο της ακρίβειας της μεθόδου μέτρησης που χρησιμοποιήθηκε.

3.4. Τυπική απόκλιση μίας μέτρησης

Από μια σειρά μετρήσεων έχουμε μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό τιμών του μετρούμενου μεγέθους. Γι' αυτόν το λόγο μόνο εκτιμήσεις μπορούμε να κάνουμε για τις πιο πιθανές τιμές των x_0 και σ_0. Έχουμε ήδη εξηγήσει γιατί η καλύτερη εκτίμηση για το x_0 είναι η μέση τιμή $\bar{x}$ των n μετρήσεων. Μπορεί να αποδειχτεί ότι η πιο πιθανή τιμή για την σ_0 είναι η

$$\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, s \tag{6}$$

όπου s είναι η τυπική απόκλιση των n μετρήσεων (Εξ. (3)). Η τιμή

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{7}$$

ονομάζεται **τυπική απόκλιση της μίας μέτρησης** και είναι η καλύτερη εκτίμηση που μπορούμε να κάνουμε για την (άγνωστη) σ_0.

3.5. Τυπική απόκλιση της μέσης τιμής. Σφάλματα

Η τυπική απόκλιση της μίας μέτρησης μας δίνει ένα μέτρο της διασποράς των μετρήσεων γύρω από την πραγματική τιμή x_0. Είναι βέβαια ένα χρήσιμο μέγεθος για να αξιολογηθεί η ακρίβεια της μεθόδου μέτρησης που χρησιμοποιήθηκε. Περισσότερο μας ενδιαφέρει να έχουμε μια εκτίμηση της απόκλισης της μέσης τιμής $\bar{x}$ από την πραγματική x_0. Αν υποθέσουμε ότι η σειρά των n μετρήσεων επαναλαμβάνεται πολλές φορές, θα έχουμε για κάθε σειρά μετρήσεων μια διαφορετική μέση τιμή $\bar{x}_k$. Η μέση τιμή αυτών των $\bar{x}_k$ θα τείνει προς το x_0 για τους ίδιους λόγους που αναφέραμε όταν εξετάζαμε την $\bar{x}$. Θα υπάρχει όμως μια διασπορά των $\bar{x}_k$ γύρω από την x_0, η οποία θα χαρακτηρίζεται από μια τυπική απόκλιση σ_μ, που ονομάζουμε **τυπική απόκλιση της μέσης τιμής**.

Αποδεικνύεται ότι $\sigma_\mu = \sigma / \sqrt{n}$, δηλαδή

$$\sigma_\mu = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{8}$$

Ας εξετάσουμε τη φυσική σημασία αυτής της παραμέτρου. Αν υποθέσουμε ότι οι μέσες τιμές $\bar{x}_k$ είναι κατανεμημένες γύρω από την πραγματική τιμή x_0 σύμφωνα με μια γκαουσιανή κατανομή

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma_\mu \sqrt{2\pi}} e^{-(\bar{x}-x_0)^2 / 2\sigma_\mu^2} \tag{9}$$

που έχει τυπική απόκλιση σ_μ, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα η μέση τιμή $\bar{x}$ μιας σειράς n μετρήσεων να διαφέρει από την πραγματική x_0 κατά μια ορισμένη ποσότητα. Σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν στο εδάφιο 3.3, υπάρχει πιθανότητα 68,3% η $\bar{x}$ να διαφέρει από την x_0 κατά διαφορά μικρότερη από σ_μ.

Η φυσική σημασία της σ_μ είναι ότι δίνει ένα μέτρο του πιθανού σφάλματος που κάνουμε υποθέτοντας ότι η $\bar{x}$ είναι η τιμή του μεγέθους που έχει πραγματική τιμή x_0.

Δεδομένου ότι η s και επομένως και η σ είναι, όπως έχουμε εξηγήσει, ουσιαστικά ανεξάρτητες από τον αριθμό των μετρήσεων n για μεγάλα n, βλέπουμε ότι η σ_μ μειώνεται με αυξανόμενο n. Καλή γνώση του x_0 σημαίνει λοιπόν μικρή τιμή της σ_μ και επομένως όσο το δυνατόν μεγαλύτερο αριθμό μετρήσεων. Επειδή όμως, όπως φαίνεται από τη σχέση $\sigma_\mu = \sigma / \sqrt{n}$, για να βελτιωθεί η ακρίβεια (δηλαδή να μειωθεί η σ_μ) κατά ένα παράγοντα περίπου 3, πρέπει να δεκαπλασιάσουμε τον αριθμό των μετρήσεων, είναι συνήθως ευκολότερο να προσπαθήσουμε να μειώσουμε τη διασπορά των μετρήσεων, δηλαδή να μειώσουμε την σ, πράγμα που μπορεί να επιτευχθεί με βελτίωση της μεθόδου μέτρησης.

Η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής, σ_μ, συμβολίζεται και με $\sigma_{\bar{x}}$ όταν αναφέρεται στην τιμή $\bar{x}$, κ.ο.κ. Ονομάζεται και **τυπικό σφάλμα** ή απλώς **σφάλμα** της μέτρησης του μεγέθους x και το συμβολίζουμε με δx. Επομένως

$$\delta x = \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{10}$$

Εξαιτίας της σπουδαιότητας του σφάλματος δx, το αποτέλεσμα μίας σειράς μετρήσεων δίνεται πάντοτε με τη μορφή:

$$x = \bar{x} \pm \delta x \quad \text{(μονάδες)} \tag{11}$$

Μερικές φορές είναι χρήσιμο να αναφερθεί και ο αριθμός των μετρήσεων, n.

Ένα παράδειγμα υπολογισμού των $\bar{x}$ και δx για $n = 7$ υποθετικές μετρήσεις μήκους δίνεται στον Πίνακα I. Το τελικό αποτέλεσμα δίνεται ως:

$$x = 969{,}69 \pm 0{,}67 \text{ mm} \quad \text{(7 μετρήσεις).}$$

Εκτός από το **τυπικό σφάλμα** ή **σφάλμα** ή **απόλυτο σφάλμα** $\delta x = \sigma_{\bar{x}}$ της μέσης τιμής $\bar{x}$, ορίζεται και η **σχετική τυπική απόκλιση της μέσης τιμής** ή το **σχετικό σφάλμα** της $\bar{x}$ ως

$$\sigma_{\sigma x} = \frac{\delta x}{\bar{x}} \tag{12}$$

που μπορεί να εκφραστεί και ως ποσοστό επί τοις εκατόν,

$$\sigma_{\sigma x} = 100\,\frac{\delta x}{\bar{x}}\ \%. \tag{13}$$

Για το παράδειγμα του Πίνακα I,

$$\sigma_{\sigma x} = 100\,\frac{0{,}67}{969{,}69} = 0{,}069\%.$$

Πίνακας Ι

Αριθμητικό παράδειγμα υπολογισμού των μεγεθών $\overline{x}$, σ και δx για $n = 7$ υποθετικές μετρήσεις μήκους.

i	x_i (mm)	$d_i = x_i - \overline{x}$ (mm)	$d_i^2 = (x_i - \overline{x})^2$ (mm^2)
1	968,1	– 1,59	2,53
2	972,3	2,61	6,81
3	970,5	0,81	0,66
4	969,0	– 0,69	0,48
5	967,2	– 2,49	6,20
6	971,1	1,41	1,99
7	969,6	– 0,09	0,01
$\sum_{i=1}^{7} x_i = 6787{,}8$ mm		$\sum_{i=1}^{7} d_i = 0$	$\sum_{i=1}^{7} d_i^2 = 18{,}67$ mm^2

$\overline{x} = \dfrac{6787{,}8}{7} = 969{,}69$ mm μέση τιμή

$\sigma = \sqrt{\dfrac{18{,}67}{(7-1)}} = 1{,}76$ mm τυπική απόκλιση της μιας μέτρησης

$\delta x = \dfrac{\sigma}{\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{18{,}67}{6 \times 7}} = 0{,}67$ mm τυπική απόκλιση ή σφάλμα της μέσης τιμής

Αποτέλεσμα: $x = 969{,}69 \pm 0{,}67$ mm (7 μετρήσεις).

(Βλέπε παράγραφο 4.1 για τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων που διατηρούνται στο αποτέλεσμα).

Σφάλμα ανάγνωσης

Όταν μετράμε ένα μέγεθος με τη βοήθεια ενός οργάνου, υπάρχουν όρια στην ακρίβεια με την οποία μπορούμε να διαβάσουμε την ένδειξη του οργάνου, ή με την οποία το όργανο μπορεί να δώσει την ένδειξη. Την αβεβαιότητα με την οποία διαβάζουμε την ένδειξη ενός οργάνου, ονομάζουμε **σφάλμα ανάγνωσης.**

Για ένα όργανο με ψηφιακή ένδειξη, το τελευταίο ψηφίο πρέπει να θεωρείται αβέβαιο. Επειδή συνήθως δε γνωρίζουμε αν το όργανο αυτό στρογγυλεύει το αποτέλεσμα στο τελευταίο ψηφίο, ή αν απλώς αγνοεί τα υπόλοιπα ψηφία, θα πρέπει να παίρνουμε ως σφάλμα ανάγνωσης μία μονάδα στο τελευταίο ψηφίο της ένδειξης. Για παράδειγμα η ένδειξη 3,43 πρέπει να θεωρείται ότι έχει σφάλμα ανάγνωσης $\pm 0{,}01$. Προφανώς το σφάλμα αυτό είναι πολύ πιθανόν να είναι κάπως μεγαλύτερο του πραγματικού. Είναι όμως πάντοτε προτιμότερο να υπερεκτιμούμε ένα σφάλμα παρά αντιστρόφως.

Για αναλογικά όργανα, ένας παράγοντας υποκειμενικότητας υπεισέρχεται στην εκτίμηση του σφάλματος ανάγνωσης. Ως γενικός κανόνας μπορεί να θεωρηθεί ότι το σφάλμα ανάγνωσης είναι ίσο με αυτό που αντιστοιχεί σε μισή υποδιαίρεση της κλίμακας. Σε ένα χάρακα με υποδιαιρέσεις 1 mm το σφάλμα ανάγνωσης θα ήταν $\pm 0{,}5$ mm. Αν συλλογιστεί όμως κανείς ότι η μέτρηση μήκους προϋποθέτει ανάγνωση και στα δύο άκρα του μετρούμενου αντικειμένου, ένα σφάλμα ανάγνωσης ± 1 mm θα ήταν ορθότερο. Σε ένα χρονόμετρο με υποδιαιρέσεις 1/5 του δευτερολέπτου αυτό θα είναι το σφάλμα ανάγνωσης, όπως είναι προφανές αν ληφθεί υπ' όψη ότι ο δείκτης δε μετακινείται συνεχώς, αλλά με πηδήματα του 1/5 sec. Σε μερικά όργανα, οι υποδιαιρέσεις που είναι χαραγμένες είναι τόσο αραιές μεταξύ τους που μια εκτίμηση με το μάτι μπορεί να δώσει καλύτερη ακρίβεια στην ανάγνωση. Σε αυτές τις περιπτώσεις το σφάλμα μειώνεται αναλόγως, χωρίς βεβαίως να υπερεκτιμούμε τις δυνατότητές μας.

Το σφάλμα ανάγνωσης πρέπει να θεωρείται ως το κατώτατο όριο στο σφάλμα μέτρησης ενός μεγέθους. Επανάληψη της μέτρησης πολλές φορές δε θα οδηγήσει σε γνώση του μεγέθους με σφάλμα μικρότερο του σφάλματος ανάγνωσης. Σε ένα καλά σχεδιασμένο πείραμα, θα πρέπει το σφάλμα ανάγνωσης να είναι μικρότερο από τις διακυμάνσεις που παρατηρούνται σε διαδοχικές μετρήσεις ενός μεγέθους.

Μια ειδική περίπτωση που πρέπει να προσεχθεί αναφορικά με τον υπολογισμό του σφάλματος είναι αυτή στην οποία όλες οι μετρήσεις έχουν δώσει το ίδιο αποτέλεσμα. Είναι λάθος να θεωρηθεί ότι η τυπική απόκλιση είναι ίση με μηδέν. Π.χ. η μέτρηση ενός μήκους ℓ μπορεί να δώσει:

$$156 \quad 156 \quad 156 \quad 156 \quad 156\,\text{mm}.$$

Είναι λάθος να πούμε ότι $\ell = 156 \pm 0$ mm. Αυτό που συμβαίνει εδώ είναι ότι δε διαλέξαμε το κατάλληλο ευαίσθητο όργανο για τη μέτρηση ώστε να γίνουν φανερές οι διακυμάνσεις ή οι διαφορές στις εκτιμήσεις από μέτρηση σε μέτρηση. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορεί να χρησιμοποιούμε ένα χάρακα με υποδιαιρέσεις 1 mm αποφεύγοντας (πολύ σωστά!) να κάνουμε εκτίμηση του κλάσματος του mm στο μήκος. Στις περιπτώσεις αυτές ως σφάλμα της μέσης τιμής πρέπει να παίρνουμε τη διακριτική ικανότητα του μετρητικού οργάνου ή το σφάλμα ανάγνωσης. Στο παράδειγμά μας η ακρίβεια ανάγνωσης του μήκους είναι 1 mm και επομένως το τελικό αποτέλεσμα πρέπει να δοθεί ως $\ell = 156 \pm 1$ mm.

3.6. Διάδοση σφαλμάτων

Πολύ συχνά το μέγεθος που μας ενδιαφέρει δεν μετράται απευθείας, αλλά υπολογίζεται έμμεσα από τις μετρήσεις άλλων μεγεθών των οποίων είναι συνάρτηση. Για παράδειγμα, το εμβαδόν ενός κύκλου δεν μετράται άμεσα αλλά υπολογίζεται από μετρήσεις της ακτίνας του r, από τη σχέση $S = \pi r^2$. Η ηλεκτρική αντίσταση R υπολογίζεται ως ο λόγος $R = V/I$ δύο μετρούμενων μεγεθών, της διαφοράς δυναμικού V και της έντασης του ρεύματος I.

Για τη σχέση $S = \pi r^2$, με παραγώγιση έχουμε $dS = 2\pi r dr$ που μπορεί να ερμηνευθεί ως η σχέση που δίνει την (απειροστή) μεταβολή dS του εμβαδού του κύκλου για μεταβολή dr της ακτίνας του. Για μικρή μεταβολή δr σε σχέση με το r, δηλαδή για $\delta r/r << 1$, μπορούμε να έχουμε, προσεγγιστικά, $\delta S \approx 2\pi r \delta r$. Αυτή η σχέση μπορεί να θεωρηθεί ότι δίνει το σφάλμα δS στον υπολογισμό του S για ένα μικρό σφάλμα δr στην ακτίνα.

Επομένως $\delta S \approx (dS/dr)\delta r$. Στον υπολογισμό της (dS/dr) χρησιμοποιούμε την καλύτερη εκτίμηση που έχουμε για την τιμή της r, δηλαδή τη μέση τιμή $\bar{r}$ των μετρήσεων της ακτίνας.

Για συναρτήσεις $f(u, \upsilon, \omega, \ldots)$ περισσότερων της μιας ανεξάρτητων μεταβλητών u, υ, ω κλπ. ισχύει προφανώς

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon}\right) d\upsilon + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right) d\omega + \cdots \tag{14}$$

όπου df θεωρείται η μεταβολή του f για μεταβολές du, $d\upsilon$, $d\omega$ κλπ. των μεταβλητών. Η $\partial f/\partial u$ είναι η μερική παράγωγος της f ως προς u, αν θεωρήσουμε τις υπόλοιπες μεταβλητές ως σταθερές, κ.ο.κ. Η σχέση αυτή είναι μια καλή προσέγγιση για το σφάλμα δf στον υπολογισμό της f για μικρά σφάλματα δu, $\delta \upsilon$, $\delta \omega$ κλπ. με την προϋπόθεση ότι οι ποσοστιαίες τιμές $\delta u/u$, $\delta \upsilon/\upsilon$, $\delta \omega/\omega$ κλπ. είναι πολύ μικρότερες της μονάδας.

Έστω τώρα ότι γνωρίζουμε τα μεγέθη

$$u = \bar{u} \pm \delta u, \qquad v = \bar{v} \pm \delta v, \qquad \omega = \bar{\omega} \pm \delta \omega, \ldots$$

από μετρήσεις που κάναμε και θέλουμε να υπολογίσουμε το παράγωγο μέγεθος $f = \bar{f} \pm \delta f$. Από τη θεωρία των σφαλμάτων προκύπτει ότι η πιο πιθανή τιμή της $\bar{f}$ υπολογίζεται αν χρησιμοποιηθούν στη σχέση για το $f(u, v, \omega, \ldots)$ οι πιο πιθανές τιμές των $u, v, \omega, \ldots$, δηλαδή

$$\bar{f} = f(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\omega}, \ldots) \tag{15}$$

που είναι η τιμή της f που προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε τις μέσες τιμές $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\omega}, \ldots$ των μεταβλητών.

Ποιο είναι τώρα το σφάλμα ή η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής $\bar{f}$, δηλαδή το δf; Αν γνωρίζαμε τόσο το μέγεθος όσο και το πρόσημο των σφαλμάτων $\delta u, \delta v, \delta \omega, \ldots$ στα $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\omega}, \ldots$ θα είχαμε

$$\delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\delta u + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\delta v + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)\delta \omega + \cdots \tag{16}$$

για το σφάλμα δf στο $\bar{f}$. Αυτό όμως μας είναι αδύνατο, γιατί γνωρίζουμε μόνο τα τυπικά σφάλματα $\delta u = \sigma_{\bar{u}}$, $\delta v = \sigma_{\bar{v}}$ κλπ., που μόνο στατιστικές προβλέψεις μας επιτρέπουν να κάνουμε.

Υποθέτοντας γκαουσιανές κατανομές για τα σφάλματα, με τυπικές αποκλίσεις $\sigma_{\bar{u}} = \delta u$, $\sigma_{\bar{v}} = \delta v$, $\sigma_{\bar{\omega}} = \delta \omega$ κλπ., και ότι τα σφάλματα στα $u, v, \omega, \ldots$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, προκύπτει ότι η καλύτερη εκτίμηση για την τυπική απόκλιση της μέσης τιμής $\bar{f}$ είναι

$$\sigma_{\bar{f}} = \delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\,\delta u\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\,\delta v\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\,\delta \omega\right)^2 + \cdots} \tag{17}$$

Και πάλι στον υπολογισμό των τιμών των μερικών παραγώγων χρησιμοποιούνται οι μέσες τιμές των μεταβλητών $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\omega}, \ldots$

Στον Πίνακα ΙΙ παραθέτουμε μερικά χρήσιμα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του κανόνα αυτού, κυρίως για συναρτήσεις μίας ή δύο μεταβλητών. Τα παραδείγματα που ακολουθούν δείχνουν τη χρήση των αποτελεσμάτων σε αριθμητικούς υπολογισμούς.

Πίνακας II

Διάδοση σφαλμάτων. Υπολογισμός τυπικών αποκλίσεων (σφαλμάτων) συναρτήσεων f μιας ή δύο μεταβλητών u, υ.

Αποτελέσματα μετρήσεων: $u = \overline{u} \pm \delta u, \quad v = \overline{v} \pm \delta v \ldots$

Οι α και k είναι γνωστές σταθερές.

Τα $\delta u, \delta v, \delta\omega, \ldots$ και δf θεωρούνται πάντοτε θετικά.

Συνάρτηση f	Τυπική απόκλιση της μέσης τιμής, $\sigma_{\overline{f}}$ ή σφάλμα δf
Γενική σχέση $f = f(u, v, \omega, \ldots)$	$\delta f = \sigma_{\overline{f}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\delta u\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\delta v\right)^2 + \cdots}$
Άθροισμα $f = u + v$	$\delta f = \sqrt{(\delta u)^2 + (\delta v)^2}$
Διαφορά $f = u - v$	$\delta f = \sqrt{(\delta u)^2 + (\delta v)^2}$
Γενικά $f = u \pm v \pm \omega \pm \ldots$	$\delta f = \sqrt{(\delta u)^2 + (\delta v)^2 + (\delta\omega)^2 + \cdots}$
Πολλ. με σταθερά $f = ku$	$\delta f = k\delta u$
Γινόμενο $f = uv$	$\delta f = \overline{u}\,\overline{v}\sqrt{\left(\frac{\delta u}{\overline{u}}\right)^2 + \left(\frac{\delta v}{\overline{v}}\right)^2}$
Λόγος $f = \frac{u}{v}$	$\delta f = \frac{\overline{u}}{\overline{v}}\sqrt{\left(\frac{\delta u}{\overline{u}}\right)^2 + \left(\frac{\delta v}{\overline{v}}\right)^2}$
Δύναμη $f = u^{\alpha}$	$\delta f = \lvert\alpha\rvert(\overline{u})^{\alpha-1}\delta u$
Λογάριθμος $f = \ln u$	$\delta f = \frac{\delta u}{\overline{u}}$
Εκθετικό $f = e^{u}$	$\delta f = e^{\overline{u}}\,\delta u$

Παραδείγματα

Σημείωση. Στα παραδείγματα που ακολουθούν, τα τελικά αποτελέσματα δίνονται με τόσα σημαντικά ψηφία όσα προκύπτουν από τους κανόνες που παρατίθενται στην παράγραφο 4.1.3.

1. Μια σειρά μετρήσεων της ακτίνας ενός κύκλου έδωσε $r = 9{,}820 \pm 0{,}010$ m. Το μήκος της περιφέρειας δίνεται από τη σχέση $\ell = 2\pi r$ και επομένως $\overline{\ell} = 2\pi \overline{r} = 2\pi \times 9{,}820 = 61{,}701$ m και $\delta\ell = 2\pi\delta r = 2\pi \times 0{,}010 = 0{,}063$ m. Επομένως

$$\ell = 61{,}701 \pm 0{,}063 \text{ m}.$$

Το εμβαδόν του κύκλου $S = \pi r^2$ υπολογίζεται ως $\overline{S} = \pi(9{,}820)^2 = 302{,}95 \text{ m}^2$. Το σφάλμα στο $\overline{S}$ είναι $\delta S = (\partial S/\partial r)\delta r = 2\pi \overline{r}\delta r$. Επομέ-μένως $\delta S = 2\pi \times 9{,}820 \times 0{,}010 = 0{,}62 \text{ m}^2$. Τελικά,

$$S = 302{,}95 \pm 0{,}62 \text{ m}^2.$$

2. Το ρεύμα μέσα από μια αντίσταση είναι $I = 81{,}32 \pm 0{,}51$ mA και η διαφορά δυναμικού στα άκρα της είναι $V = 3{,}60 \pm 0{,}23$ Volt. Επομένως

$$\overline{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{3{,}60}{0{,}08132} = 44{,}27\ \Omega$$

και

$$\delta R = \overline{R}\sqrt{\left(\frac{\delta V}{\overline{V}}\right)^2 + \left(\frac{\delta I}{\overline{I}}\right)^2} = 44{,}27\sqrt{\left(\frac{0{,}21}{3{,}60}\right)^2 + \left(\frac{0{,}51}{81{,}32}\right)^2} = 2{,}60\ \Omega$$

Επομένως $R = 44{,}3 \pm 2{,}6\ \ \Omega$.

3. Έστω ότι η σχέση $f = k\,\dfrac{uv^5}{w^3}$ δίνει την εξάρτηση του μεγέθους f από τη σταθερά k και τις μεταβλητές u, v και w των οποίων οι τιμές μετρήθηκαν ως $\overline{u} \pm \delta u$, $\overline{v} \pm \delta v$ και $\overline{w} \pm \delta w$ αντίστοιχα. Τότε,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = k\,\frac{v^5}{w^3} = \frac{f}{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 5k\,\frac{uv^4}{w^3} = 5\,\frac{f}{v} \qquad \text{και}$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = -3k\,\frac{uv^5}{w^4} = -3\,\frac{f}{w}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (17), βρίσκουμε το σφάλμα στο f:

$$\delta f = \left\{ \left(\frac{\overline{f}}{\overline{u}}\, \delta u \right)^2 + \left(5\, \frac{\overline{f}}{\overline{v}}\, \delta v \right)^2 + \left(-3\, \frac{\overline{f}}{\overline{w}}\, \delta w \right)^2 \right\}^{1/2}$$

και τελικά

$$\left(\frac{\delta f}{\overline{f}} \right)^2 = \left(\frac{\delta u}{\overline{u}} \right)^2 + \left(5\, \frac{\delta v}{\overline{v}} \right)^2 + \left(3\, \frac{\delta w}{\overline{w}} \right)^2$$

Το σχετικό σφάλμα στο f είναι επομένως η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των σχετικών σφαλμάτων των u, v^5 και w^3.

4. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Θα δώσουμε μερικές χρήσιμες πληροφορίες για την παρουσίαση αποτελεσμάτων σε αριθμητική μορφή και με τη μορφή γραφικών παραστάσεων.

4.1. Παρουσίαση αριθμητικών αποτελεσμάτων

Το αποτέλεσμα μιας σειράς μετρήσεων παρουσιάζεται πάντοτε στη μορφή:

(Φυσικό μέγεθος) = (Μέση τιμή) ± (Τυπική απόκλιση της μέσης τιμής) (Μονάδες)

Μερικές φορές δίνεται και ο αριθμός των μετρήσεων που έγιναν. Δηλαδή

$$x = \overline{x} \pm \delta x \quad (\text{μονάδες}) \quad (\text{n μετρήσεις})$$

π.χ. $x = 4{,}51 \pm 0{,}21$ m (12 μετρήσεις).

Χρειάζεται προσοχή στον αριθμό σημαντικών ψηφίων που δίνονται στα αριθμητικά αποτελέσματα και το θέμα αυτό θα συζητηθεί παρακάτω.

4.1.1. Σημαντικά ψηφία. Στρογγύλευμα αριθμών

Σημαντικά ψηφία ενός αριθμού λέγονται όλα του τα ψηφία εκτός από τα συνεχόμενα μηδενικά που ενδεχομένως να υπάρχουν στην αρχή του αριθμού, αν αυτός είναι δεκαδικός. Η θέση της υποδιαστολής ή ένας εκθέτης του 10 ως πολλαπλασιαστικός παράγοντας δεν επηρεάζει τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων.

Μερικά παραδείγματα δίνονται στον Πίνακα III.

Πίνακας III
Παραδείγματα αριθμών με διαφορετικό αριθμό σημαντικών ψηφίων

Αριθμός σημαντικών ψηφίων			
1	2	3	4
2	15	100	2400
0,3	0,18	0,243	0,8900
0,004	0,020	0,00140	0,03051
4×10^{-3}	$2,0 \times 10^{-3}$	$1,40 \times 10^{-3}$	$3,401 \times 10^{-2}$
8×10^{7}	$0,99 \times 10^{6}$	$4,05 \times 10^{9}$	$1,300 \times 10^{6}$

Αν θέλουμε να μειώσουμε κατά έναν τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων ενός *δεκαδικού* αριθμού, τον «στρογγυλεύουμε» ως εξής:

Αν το δεξιότερο (λιγότερο σημαντικό) ψηφίο είναι 0, 1, 2, 3 ή 4, απλώς παραλείπεται. Αν είναι 5, 6, 7, 8 ή 9, παραλείπεται, και το αμέσως προηγούμενο ψηφίο αυξάνεται κατά μονάδα.

Παραδείγματα: $1,42 \approx 1,4$ και $1,46 \approx 1,5$.

Για να στρογγυλεύσουμε ακέραιους, τους μετατρέπουμε πρώτα σε δεκαδικούς με μια δύναμη του 10 ως πολλαπλάσιο και στρογγυλεύουμε τον δεκαδικό.

Παραδείγματα: $1432 = 1,432 \times 10^3 \approx 1,43 \times 10^3$ και $1506 \approx 1,51 \times 10^3$.

Θα ήταν λάθος να πούμε ότι $1432 \approx 1430$ κλπ., γιατί σε αυτή την περίπτωση το τελευταίο μηδενικό θα εθεωρείτο σημαντικό ψηφίο, πράγμα που δεν είναι αληθές.

Υπάρχουν μερικές προβληματικές περιπτώσεις όσον αφορά τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων. Αν για παράδειγμα θέλουμε να δώσουμε τον αριθμό 1200 m με δύο μόνο σημαντικά ψηφία, μπορούμε να γράψουμε $1,2 \times 10^3$ m ή 1,2 km. Όμως είναι κάπως ασυνήθιστο να δώσουμε το 40 με ένα σημαντικό ψηφίο ως 4×10. Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορεί, αν χρειάζεται, να αναφερθεί ρητά ποιος είναι ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων για να μην υπάρχει αβεβαιότητα.

4.1.2. Αβεβαιότητα στην τιμή του σφάλματος

Η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής, ως αποτέλεσμα ενός πεπερασμένου αριθμού μετρήσεων, δεν είναι γνωστή με απόλυτη ακρίβεια. Προκύπτει από τη θεωρία ότι το τυπικό σφάλμα στην τιμή της τυπικής απόκλισης της μέσης τιμής σ_μ (δηλαδή το σφάλμα του σφάλματος) είναι

$$\pm \frac{\sigma_\mu}{\sqrt{2(n-1)}}$$

όπου n είναι ο αριθμός των μετρήσεων. Βλέπουμε έτσι ότι,

για	$n = 9$	μετρήσεις,	το	τυπικό	σφάλμα	στην	σ_μ	είναι	25%
»	$n = 51$	»	»	»	»	»	»	»	10%
»	$n = 200$	»	»	»	»	»	»	»	5%
»	$n = 5000$	»	»	»	»	»	»	»	1%

Είναι λοιπόν σαφές ότι, για τον συνήθη αριθμό μετρήσεων που συναντά κανείς σε ένα εκπαιδευτικό εργαστήριο, η αβεβαιότητα στην τιμή της σ_μ δε δικαιολογεί να δίνονται τελικές τιμές σφαλμάτων με περισσότερα του ενός σημαντικά ψηφία. Στην επιστημονική έρευνα όμως, ο αριθμός των μετρήσεων είναι συνήθως αρκετά μεγάλος ώστε να δικαιολογεί μεγαλύτερη ακρίβεια στο σ_μ. Για το λόγο αυτό είναι επιθυμητό να συνηθίσει κανείς στο να δίνει τις τιμές των σφαλμάτων με δύο σημαντικά ψηφία.

4.1.3. Παρουσίαση αριθμητικών αποτελεσμάτων

Σύμφωνα με όσα είπαμε πιο πάνω, θα εξετάσουμε τώρα την ακρίβεια με την οποία παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα.

Ένα κοινό λάθος που γίνεται είναι η παρουσίαση αποτελεσμάτων με αδικαιολόγητα μεγάλο αριθμό σημαντικών ψηφίων. Για παράδειγμα, αν η διάμετρος ενός δίσκου βρέθηκε να είναι $D = 2{,}3$ cm (αγνοούμε το σφάλμα προς το παρόν), είναι λάθος να δώσουμε το εμβαδόν της επιφάνειάς του ως $S = (\pi/4)\,D^2 = 4{,}154756285\ \text{cm}^2$ επειδή έτσι εμφανίστηκε το αποτέλεσμα στην οθόνη του υπολογιστή. Τέτοια ακρίβεια στο S είναι αδικαιολόγητη δεδομένου ότι το D είναι γνωστό με δύο σημαντικά ψηφία, το τελευταίο από τα οποία μπορεί να είναι και αβέβαιο. Αν για παράδειγμα είχαμε $D = 2{,}29$ cm τότε θα ήταν $S = 4{,}12$ cm^2, ενώ για $D = 2{,}31$ cm θα είχαμε $S = 4{,}19$ cm^2. Βλέπουμε λοιπόν ότι δύο σημαντικά ψηφία στο S είναι τα μόνα για τα οποία μπορούμε να είμαστε σίγουροι. Προφανώς το σφάλμα σε ένα αποτέλεσμα παίζει αποτελεσματικό ρόλο στον αριθμό σημαντικών ψηφίων με τα οποία δίνεται.

Οι κανόνες για την παρουσίαση ενός **τελικού** αριθμητικού αποτελέσματος είναι οι εξής:

1. Το τελικό σφάλμα στο μετρούμενο μέγεθος δίνεται με δύο σημαντικά ψηφία.

2. Από τη στιγμή που έχουμε αποφασίσει για την τιμή του σφάλματος, η μέση τιμή δίνεται με την ίδια ακρίβεια με την οποία δόθηκε το σφάλμα.

Παραδείγματα: $3{,}10 \pm 0{,}20$ $\quad$ $128{,}0 \pm 3{,}0$ $\quad$ $(4{,}19 \pm 0{,}38) \times 10^{-6}$

$4{,}20 \pm 0{,}14$ $\quad$ $13{,}3 \pm 2{,}4$ $\quad$ $(8{,}12 \pm 0{,}35) \times 10^{5}$.

Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι, για να αποφευχθεί η συσσώρευση σφαλμάτων από το στρογγύλευμα πολλών αριθμών, στον υπολογισμό ενδιαμέσων αποτελεσμάτων (δηλαδή όλων εκτός του τελικού) τα σφάλματα καταχωρούνται με τρία σημαντικά ψηφία και οι μέσες τιμές με την ίδια ακρίβεια.

4.2. Γραφικές παραστάσεις

Η απεικόνιση των αποτελεσμάτων με τη μορφή γραφικής παράστασης μπορεί να υπαγορεύεται από τουλάχιστον έναν από τους ακόλουθους λόγους:

(α) Για να δοθεί με εποπτικό τρόπο η σχέση μεταξύ δύο μεγεθών, αναδεικνύοντας χαρακτηριστικά που δε θα γίνονταν εμφανή σε έναν πίνακα αριθμητικών τιμών.

(β) Για να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό της κλίσης ή του σημείου τομής ενός άξονα, κυρίως στην περίπτωση όπου η σχέση μεταξύ των δύο μεγεθών είναι γραμμική.

(γ) Για να διερευνηθεί η μορφή της σχέσης μεταξύ δύο μεγεθών (γραμμική, εκθετική κλπ.) που μπορεί ακολούθως να διατυπωθεί σε μαθηματική μορφή για μεγαλύτερη ακρίβεια.

(δ) Για την επαλήθευση μιας θεωρητικής σχέσης μεταξύ δύο μεγεθών με τη σύγκριση της θεωρητικής καμπύλης με τα πειραματικά σημεία.

(ε) Για να χρησιμοποιηθεί ως καμπύλη βαθμονόμησης ενός οργάνου ή γενικά για να είναι δυνατή η εύρεση της τιμής της μιας μεταβλητής που αντιστοιχεί σε κάποια τιμή της άλλης για την οποία δεν υπάρχουν πειραματικές μετρήσεις.

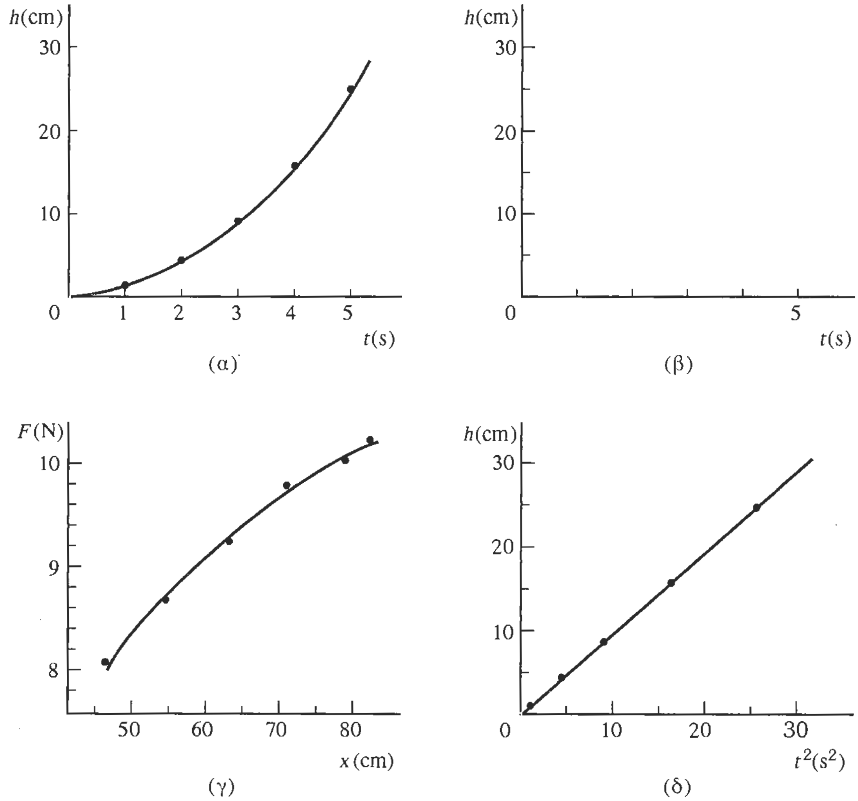
Οι κυριότεροι κανόνες για την καλύτερη παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτων σε γραφική μορφή θα δοθούν παρακάτω.

4.2.1. Η επιλογή των αξόνων

Το μέγεθος που θεωρείται ως ανεξάρτητη μεταβλητή σχεδιάζεται ως τετμημένη (άξονας των x) ενώ η εξαρτημένη μεταβλητή ως τεταγμένη (άξονας των y). Η διάκριση δεν είναι πάντοτε δυνατή. Γενικά, αν στο πείραμα εμείς καθορίζουμε τις τιμές μιας μεταβλητής (π.χ. την τάση στα άκρα μιας αντίστασης), τότε αυτή θεωρείται η ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ το αποτέλεσμα (π.χ. το ρεύμα μέσα από την αντίσταση) είναι η εξαρτημένη. Αυτό όμως δεν πρέπει να θεωρείται ως απαράβατος κανόνας. Η φράση «καταγράψετε το μέγεθος V ως συνάρτηση του t» δηλώνει ότι η t είναι η ανεξάρτητη και η V η εξαρτημένη μεταβλητή.

Αφού χαραχτούν οι άξονες, αναγράφονται δίπλα τους τα μεγέθη που αντιπροσωπεύουν και μέσα σε παρένθεση οι μονάδες που χρησιμοποιούνται, π.χ. $t(s)$ ή $h(\mathrm{cm})$, Σχ. 4(α). Επιλέγεται η κλίμακα του κάθε άξονα και χαράσσονται πάνω σε αυτόν οι αριθμητικές τιμές της κλίμακας. Για ευκολία, κάθε υποδιαίρεση του χαρτιού αντιστοιχεί σε 1, 2 ή 5 μονάδες ή στα αντίστοιχα πολλαπλάσια μιας δύναμης του 10, ανάλογα με την περιοχή τιμών που θα καλυφθεί. Αυτό γίνεται για να είναι εύκολη τόσο η καταγραφή όσο και η ανάγνωση των αριθμητικών τιμών (σε ένα χαρτί μιλιμετρέ με υποδιαιρέσεις σε cm και mm θα ήταν κάπως άβολο να αντιστοιχήσουμε ένα cm της κλίμακας σε 70 μονάδες της μεταβλητής, για παράδειγμα). Στον άξονα αναγράφονται οι αριθμητικές τιμές σε ένα λογικό αριθμό σημείων ώστε η εύρεση ενδιάμεσων τιμών να είναι εύκολη, χωρίς όμως να παραφορτώνεται η κλίμακα με αριθμούς που θα μπορούσαν να προκαλέσουν σύγχυση ενώ δεν προσφέρουν τίποτε. Στους άξονες μπορεί να υπάρχουν και υποδιαιρέσεις για τις οποίες δε δίνονται οι αντίστοιχες αριθμητικές τιμές, αν αυτές μπορούν εύκολα να βρεθούν από τις τιμές που αναγράφονται, Σχ. 4(β).

Δεν είναι απαραίτητο οι κλίμακες να αρχίζουν από το 0 αλλά μπορούν να καλύπτουν μόνο την περιοχή για την οποία υπάρχουν πειραματικά αποτελέσματα, Σχ. 4(γ), εκτός αν το 0 αποτελεί σημαντικό ή χρήσιμο σημείο της καμπύλης.



Σχήμα 4. Γραφικές παραστάσεις. Επιλογή και σχεδίαση των αξόνων.

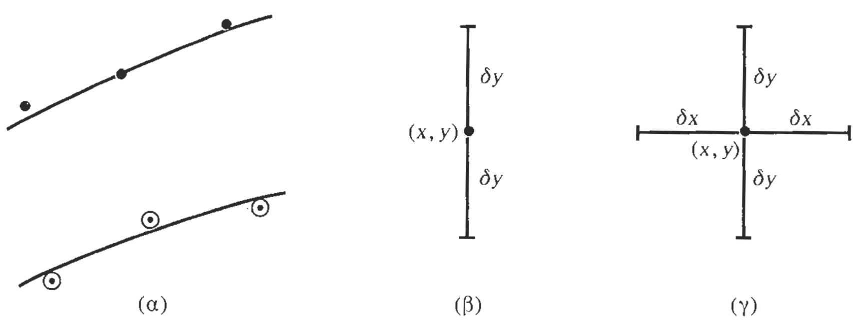
Οι κλίμακες δεν είναι απαραίτητο να είναι γραμμικές ως προς τα μεγέθη που μετρήθηκαν. Αν αναμένεται για παράδειγμα ότι η σχέση που συνδέει το h και το t στο Σχ. 4(α) είναι $h=(1/2)gt^2$ τότε, αν καταγραφεί η h ως συνάρτηση του t^2 όπως στο Σχ. 4(δ), τα σημεία θα πρέπει να βρίσκονται κοντά στην ευθεία που περνά από το (0, 0) και έχει κλίση g/2. Η ευθεία αυτή είναι εύκολο να σχεδιαστεί αλλά και η γραμμική σχέση πιο εύκολο να διαπιστωθεί αντί της παραβολικής του Σχ. 4(α). Άλλα παραδείγματα επιλογής μεταβλητών ώστε να προκύψει γραμμική σχέση δίνονται στον Πίνακα IV.

Πίνακας IV
Παραδείγματα αλλαγής των μεταβλητών ώστε να γραμμικοποιηθούν μη γραμμικές σχέσεις

Μη γραμμική σχέση	Νέες μεταβλητές x	Νέες μεταβλητές y	Γραμμική σχέση που προκύπτει
$h = h_0 + \frac{1}{2} g t^2$	t^2	h	$y = h_0 + \frac{1}{2} g x$
$F = \frac{k}{r^2}$	$\frac{1}{r^2}$	F	$y = kx$
$N = N_0 e^{-\lambda t}$	t	$\ln N$	$y = \ln N_0 - \lambda x$
$v = k r^n$	$\log r$	$\log v$	$y = \log k + nx$

4.2.2. Απεικόνιση των πειραματικών σημείων

Σε κάθε ζεύγος τιμών της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής αντιστοιχεί ένα σημείο στη γραφική τους παράσταση. Το σημείο πρέπει να είναι ευδιάκριτο και γι' αυτό ή σχεδιάζουμε μια αρκετά μεγάλη κουκίδα ή ένα σημείο με ένα μικρό κύκλο γύρω του, Σχ. 5(α). Τα σημεία πρέπει να είναι αρκετά μεγάλα ώστε να μην καλύπτονται από την καμπύλη που θα σχεδιαστεί για αυτά και να μη συγχέονται με τυχαία σημάδια στο χαρτί. Επίσης, αν για να σχεδιαστεί μια καμπύλη που προβλέπεται από τη θεωρία χρειαστεί να σημειωθούν στο χαρτί κάποια σημεία από τους υπολογισμούς, αυτά πρέπει μετά να σβήνονται για να μην εκλαμβάνονται ως πειραματικά σημεία.



Σχήμα 5. Η απεικόνιση πειραματικών σημείων σε γραφικές παραστάσεις.

Αν για την τιμή x της ανεξάρτητης μεταβλητής η αντίστοιχη τιμή της εξαρτημένης είναι $y \pm \delta y$, αν δηλαδή είναι γνωστό και το σφάλμα στην y, τότε εκτός από την τελεία στο σημείο (x, y) σημειώνεται στη γραφική παράσταση και το σφάλμα όπως φαίνεται στο Σχ. 5(β), με τη σχεδίαση από το σημείο (x, y) ευθειών μήκους δy στις κατευθύνσεις $\pm y$. Στις περιπτώσεις που και η μεταβλητή x είναι γνωστή με το σφάλμα της, δx, το ίδιο γίνεται και με αυτό, όπως φαίνεται στο Σχ. 5(γ).

Σε περιπτώσεις όπου χρειάζεται να σχεδιαστούν δύο ή περισσότερες σειρές μετρήσεων στο ίδιο διάγραμμα, χρησιμοποιούνται διαφορετικά σύμβολα για τα σημεία της κάθε σειράς (π.χ. κύκλοι, σταυροί, τρίγωνα κλπ.) για να ξεχωρίζουν. Σημειώνεται δε στο σχήμα σε τι αντιστοιχούν οι διάφορες σειρές μετρήσεων.

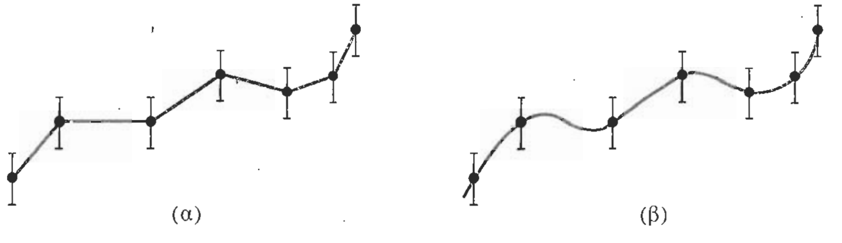
Τέλος, ας σημειωθεί ότι **στους άξονες δεν πρέπει να σημειώνονται οι τιμές των πειραματικών σημείων,** αλλά μόνον οι αριθμοί που αναφέρονται στη βαθμολογία των αξόνων όπως έχει ήδη περιγραφεί.

4.2.3. Χάραξη της καμπύλης

Αφού σημειωθούν στο διάγραμμα όλα τα σημεία μαζί με τα σφάλματά τους (αν υπάρχουν), χαράσσεται η καλύτερη καμπύλη που αντιστοιχεί σε αυτά.

Ο όρος «καλύτερη καμπύλη» έχει διαφορετικό νόημα ανάλογα με την περίπτωση που εξετάζεται. Κατ' αρχήν πρέπει να τονιστεί ότι η καμπύλη δεν πρέπει κατ' ανάγκη να περνά από όλα τα πειραματικά σημεία, Σχ. 6(α), (β). Κάτι τέτοιο, στις σπάνιες περιπτώσεις που μπορεί να συμβεί, πρέπει να είναι πολύ καλά τεκμηριωμένο.

Αν η μορφή της καμπύλης είναι γνωστή από τη θεωρία, τότε και αυτή λαμβάνεται ως δεδομένη. Για παράδειγμα, μπορεί να είναι γνωστό ότι η σχέση είναι γραμμική ή ότι η ευθεία ή η καμπύλη πρέπει να περνά από το μηδέν ή από κάποιο άλλο σημείο.

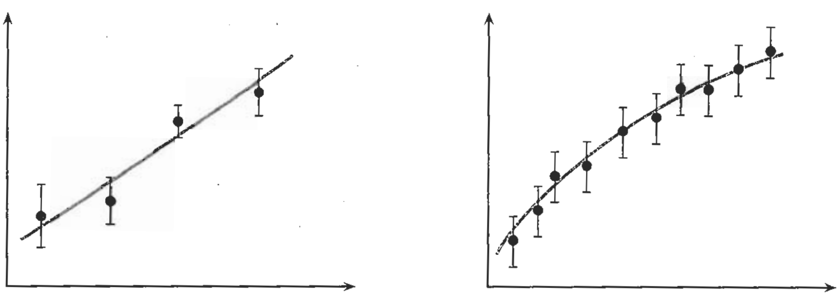


(α) (β)

Σχήμα 6. Λανθασμένη χάραξη καμπύλης.

Η καμπύλη πρέπει να είναι η ομαλότερη καμπύλη που περνά ανάμεσα στα σημεία. Απόκλιση από την ομαλή καμπύλη (ή και την ευθεία) δικαιολογείται μόνο αν υπάρχουν αρκετά αξιόπιστα πειραματικά σημεία στην περιοχή. Στη χάραξη της καμπύλης, σημαντικότατο ρόλο παίζουν και τα σφάλματα που αντιστοιχούν στα πειραματικά σημεία. Όπου είναι δυνατόν, η καμπύλη πρέπει να επιδιώκεται να περνά μέσα από τα όρια των σφαλμάτων. Δεν πρέπει όμως να ξεχνάμε ότι σημεία που απέχουν από την καμπύλη κατά περισσότερο από μια τυπική απόκλιση δεν αποκλείονται από τη θεωρία. Αν βεβαίως ένα σημείο απέχει πολύ από την καμπύλη, πρέπει να επανεξετάζεται και να απορρίπτεται, αν δεν βρεθούν σοβαροί λόγοι για να γίνει δεκτό ως σωστό πειραματικό αποτέλεσμα.

Έχοντας υπόψη όσα ειπώθηκαν, μπορούμε να δούμε ότι τα σημεία του Σχ. 7(α) δε δικαιολογούν τη χάραξη άλλης καμπύλης από την ευθεία που φαίνεται στο σχήμα. Αν όμως, παρά τα μεγάλα σφάλματα, τα πειραματικά σημεία παρουσιάζουν μια συστηματική συμπεριφορά όπως στο Σχ. 7(β), τότε η χάραξη μιας καμπύλης, αντί της ευθείας, δικαιολογείται.

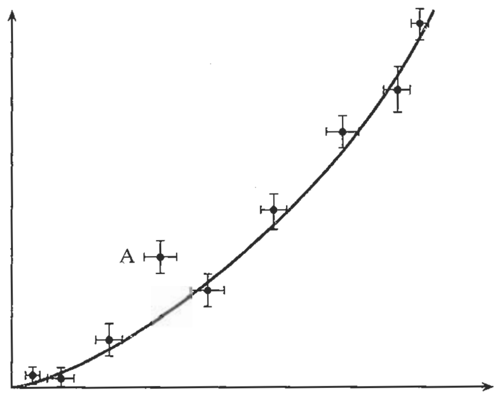


(α) (β)

Σχήμα 7. Η σχεδίαση της καλύτερης καμπύλης πρέπει να λαμβάνει υπόψη τόσο τα σφάλματα των πειραματικών σημείων όσο και την τυχόν συστηματική συμπεριφορά τους.

Η συστηματική συμπεριφορά ενός τόσο μεγάλου αριθμού σημείων, μας κάνει να συμπεράνουμε ότι για κάποιο λόγο τα σφάλματα έχουν υπερεκτιμηθεί.

Στην περίπτωση του Σχ. 8 είναι προφανές ότι η σχέση δεν είναι ευθύγραμμη. Η θέση των σημείων και το μέγεθος των σφαλμάτων υπαγορεύουν τη χάραξη μιας καμπύλης όπως φαίνεται στο σχήμα. Βεβαίως η ακριβής θέση και η μορφή της καμπύλης δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη. Επίσης είναι προφανές ότι το σημείο Α στο Σχ. 8 πρέπει να αγνοηθεί, εκτός αν επιπρόσθετες μετρήσεις σε αυτήν την περιοχή δείξουν ότι υπάρχει πράγματι μια απόκλιση από την καμπύλη που χαράχτηκε.



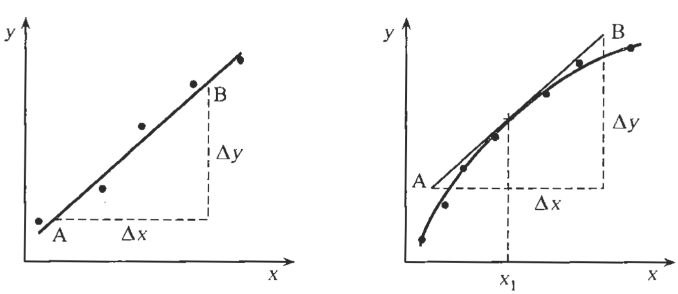
Σχήμα 8. Η χάραξη καμπύλης και όχι ευθείας δικαιολογείται από τις θέσεις των πειραματικών σημείων και τα σφάλματά τους. Το σημείο Α είναι πολύ πιθανόν ότι πρέπει να αγνοηθεί.

Στα δύο παραρτήματα που ακολουθούν περιγράφεται ο τρόπος υπολογισμού της κλίσης μιας ευθείας ή μιας καμπύλης σε κάποιο σημείο και η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων για την εύρεση της καλύτερης ευθείας που περνά ανάμεσα από κάποια δεδομένα πειραματικά σημεία.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α:

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΛΙΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ Ή ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Πολύ συχνά, έχοντας χαράξει μια ευθεία όπως αυτή προκύπτει από τα πειραματικά σημεία (Σχ. 9(α)), χρειαζόμαστε να βρούμε την κλίση της. Στη σχέση $y = \alpha + \beta x$, που υποθέτουμε ότι συνδέει την ανεξάρτητη μεταβλητή x με την εξαρτημένη y, ζητείται το β.



(α) (β)

Σχήμα 9. Ο υπολογισμός της κλίσης ευθείας ή καμπύλης σε ένα σημείο.

Προφανώς ισχύει ότι $dy/dx = \beta$. Για τον υπολογισμό της κλίσης β, παίρνουμε δύο σημεία A και B πάνω στην ευθεία, με συντεταγμένες (x_A, y_A) και (x_B, y_B) στις κατάλληλες μονάδες των x και y. Η κλίση δίνεται από το λόγο

$$\beta = \frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \tag{A.1}$$

Οι μονάδες του β βρίσκονται από τη σχέση:

[μονάδες της κλίσης] = [μονάδες του y]/[μονάδες του x].

Για ακριβέστερο αποτέλεσμα, τα σημεία A και B πρέπει να απέχουν όσο το δυνατόν περισσότερο μεταξύ τους.

Ένα λάθος που γίνεται συχνά είναι να χρησιμοποιούνται ως σημεία A και B δύο πειραματικά σημεία. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αγνοούνται όλα τα πειραματικά σημεία εκτός των δύο που χρησιμοποιήθηκαν. Επίσης λανθασμένη είναι η άποψη ότι κλίση της ευθείας είναι η εφθ όπου θ είναι είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των x. Αυτό ισχύει μόνο στην περίπτωση που οι άξονες x και y έχουν τις ίδιες μονάδες και τις ίδιες κλίμακες και σε καμμιά άλλη περίπτωση.

Για τον υπολογισμό της κλίσης μιας καμπύλης σε ένα της σημείο (έστω P στο Σχ. 9(β)), η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής: Αφού σχεδιαστεί η καμπύλη, σχεδιάζουμε μια ευθεία AB εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο P στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε την κλίση. Η ζητούμενη κλίση $(dy/dx)_P$ είναι η κλίση της ευθείας AB που υπολογίζεται όπως περιγράψαμε πιο πάνω.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β:

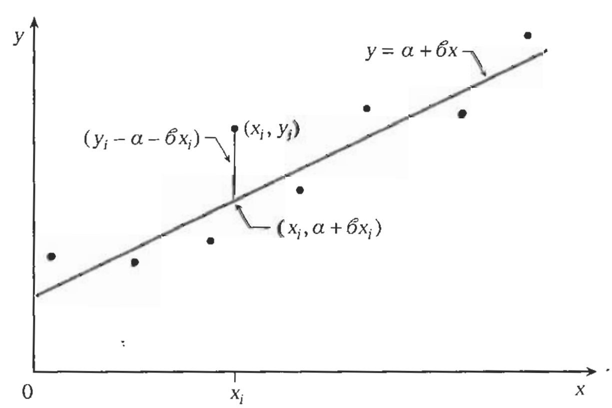
Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Για την ακριβέστερη εύρεση της ευθείας ή καμπύλης που αντιστοιχεί σε κάποια πειραματικά σημεία χρησιμοποιείται η **μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.** Θα περιγράψουμε τη μέθοδο για την περίπτωση που υποθέτουμε μια γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών x και y.

Έστω ότι τα n πειραματικά σημεία (x_i, y_i) έχουν σχεδιαστεί όπως στο Σχ. 10. Υποθέτουμε ότι η σχέση που συνδέει τα x και y είναι η

$$y = \alpha + \beta x \tag{B.1}$$

Ζητείται ο προσδιορισμός του σημείου $(0, \alpha)$ στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα των y και της κλίσης β της ευθείας. Στη μέθοδο



Σχήμα 10. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

που θα περιγράψουμε, υποθέτουμε ότι οι τιμές x_i είναι γνωστές με αμελητέα σφάλματα και ότι οι αποκλίσεις των πειραματικών σημείων από την ευθεία (Β.1) οφείλονται στις αποκλίσεις των τιμών y_i από τις πραγματικές.

Για την τιμή x_i της ανεξάρτητης μεταβλητής, η τιμή του y που αναμένεται από την Εξ. (Β.1) είναι $\alpha + \beta x_i$. Αντί αυτής, η παρατηρούμενη τιμή είναι y_i. Η απόκλιση του σημείου (x_i, y_i) από την ευθεία είναι επομένως

$$d_i = y_i - \alpha - \beta x_i \tag{B.2}$$

όπως φαίνεται στο Σχ. 10.

Αποδεικνύεται θεωρητικά ότι η πιθανότερη ευθεία που αντιστοιχεί στα πειραματικά σημεία είναι αυτή που δίνεται από εκείνες τις τιμές του α και β που ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγώνων των d_i για όλα τα πειραματικά σημεία. Είναι δηλαδή

$$S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 = \text{ελάχιστο.} \tag{B.3}$$

Οι αναγκαίες συνθήκες για ελάχιστο S είναι

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \tag{B.4}$$

από τις οποίες προκύπτουν οι σχέσεις

$$\alpha n + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{B.5}$$

και

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{B.6}$$

Αυτές μπορούν να λυθούν ως προς α και β:

$$\alpha = \frac{[y]\,[x^2] - [x]\,[xy]}{n[x^2] - [x]^2} \tag{B.7}$$

$$\beta = \frac{n[xy] - [x]\,[y]}{n[x^2] - [x]^2} \tag{B.8}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το συμβολισμό

$$[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad [x^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad [xy] = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{κ.λ.π.} \tag{B.9}$$

Τα σφάλματα $\delta\alpha$ και $\delta\beta$ των α και β μπορούν επίσης να προσδιοριστούν. Έχοντας βρει τις τιμές των α και β υπολογίζουμε τις αποκλίσεις $d_i = y_i - \alpha - \beta x_i$ για κάθε πειραματικό σημείο και το άθροισμα $[d^2]$. Τότε

$$\delta\alpha = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \frac{[x^2]\,[d^2]}{n[x^2] - [x]^2}} \tag{B.10}$$

$$\delta\beta = \delta\alpha \sqrt{\frac{n}{[x^2]}} \tag{B.11}$$

και έχουμε τις τελικές τιμές $\alpha \pm \delta\alpha$ και $\beta \pm \delta\beta$.

Στην πράξη, πριν εφαρμοστεί η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, πρέπει να σχεδιαστούν τα σημεία ώστε να διαπιστωθεί ότι μια γραμμική σχέση θα ήταν πράγματι δεκτή και για να απορριφθούν σημεία που τυχόν αποκλίνουν πολύ από την αναμενόμενη γραμμική σχέση.

Ένα αριθμητικό παράδειγμα της εφαρμογής της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων δίνεται στον Πίνακα V, για την περίπτωση της σχέσης $y = \alpha + \beta x$.

Πίνακας V
Αριθμητικό παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων στην περίπτωση $y = \alpha + \beta x$.

(Για απλότητα παραλείφθηκαν οι μονάδες των μεγεθών)

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	d_i	d_i^2
0,0	4,6	0,0	0,0	– 0,04	0,0016
1,0	7,1	7,1	1,0	0,14	0,0196
2,0	9,5	19,0	4,0	0,22	0,0484
3,0	11,5	34,5	9,0	– 0,10	0,0100
4,0	13,7	54,8	16,0	– 0,22	0,0484
5,0	15,9	79,5	25,0	– 0,34	0,1156
6,0	18,6	111,6	36,0	0,04	0,0016
7,0	20,9	146,3	49,0	0,02	0,0004
8,0	23,5	188,0	64,0	0,30	0,0900
9,0	25,4	228,6	81,0	– 0,12	0,0144
45,0 $= [x]$	150,7 $= [y]$	869,4 $= [xy]$	285,0 $= [x^2]$		0,3500 $= [d^2]$

$n = 10$

$$\alpha = \frac{150{,}7 \times 285 - 45 \times 869{,}4}{10 \times 285 - 45^2} = 4{,}638$$

$$\beta = \frac{10 \times 869{,}4 - 45 \times 150{,}7}{10 \times 285 - 45^2} = 2{,}318$$

$$\delta\alpha = \sqrt{\frac{1}{8} \times \frac{285 \times 0{,}3500}{10 \times 285 - 45^2}} = 0{,}1229$$

$$\delta\beta = 0{,}1229 \sqrt{\frac{10}{285}} = 0{,}0230$$

Επομένως $\alpha = 4{,}64 \pm 0{,}12$ και $\beta = 2{,}318 \pm 0{,}023$.

ΣΥΝΟΨΙΣΗ ΤΩΝ ΚΥΡΙΟΤΕΡΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

– Αν n μετρήσεις ενός μεγέθους x δώσουν αποτελέσματα x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ορίζονται ως:

μέση τιμή

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

και **τυπική απόκλιση** ή **σφάλμα της μέσης τιμής**

$$\boxed{\sigma_{\overline{x}} = \delta x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}}$$

– Το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης παρουσιάζεται ως

$$\boxed{x = \overline{x} \pm \delta x \ (\text{μονάδες})}$$

– Το σφάλμα δx δίνεται τελικά με δύο σημαντικά ψηφία και η μέση τιμή $\overline{x}$ με την ίδια ακρίβεια.

– Για σύνθετα μεγέθη $f(u, \upsilon, \omega, \ldots)$, που υπολογίζονται από τις μετρήσεις των μεγεθών $u, \upsilon, \omega, \ldots$, τα αποτελέσματα των οποίων είναι $\overline{u} \pm \delta u$, $\overline{\upsilon} \pm \delta \upsilon$, κ.ο.κ., η πιο πιθανή τιμή είναι η

$$\overline{f} = f(\overline{u}, \overline{\upsilon}, \overline{\omega}, \ldots)$$

και το σφάλμα της είναι

$$\boxed{\delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\,\delta u\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon}\,\delta \upsilon\right)^2 + \cdots}}$$

– Η εύρεση της καλύτερης ευθείας $y = \alpha + \beta x$ που αντιστοιχεί σε μια σειρά πειραματικών μετρήσεων (x_i, y_i) γίνεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (Παράρτημα Β). Τα α και β δίνονται από τις Εξ. (Β.7) και (Β.8) και τα σφάλματά τους, $\delta\alpha$ και $\delta\beta$, από τις (Β.10) και (Β.11) αντίστοιχα.

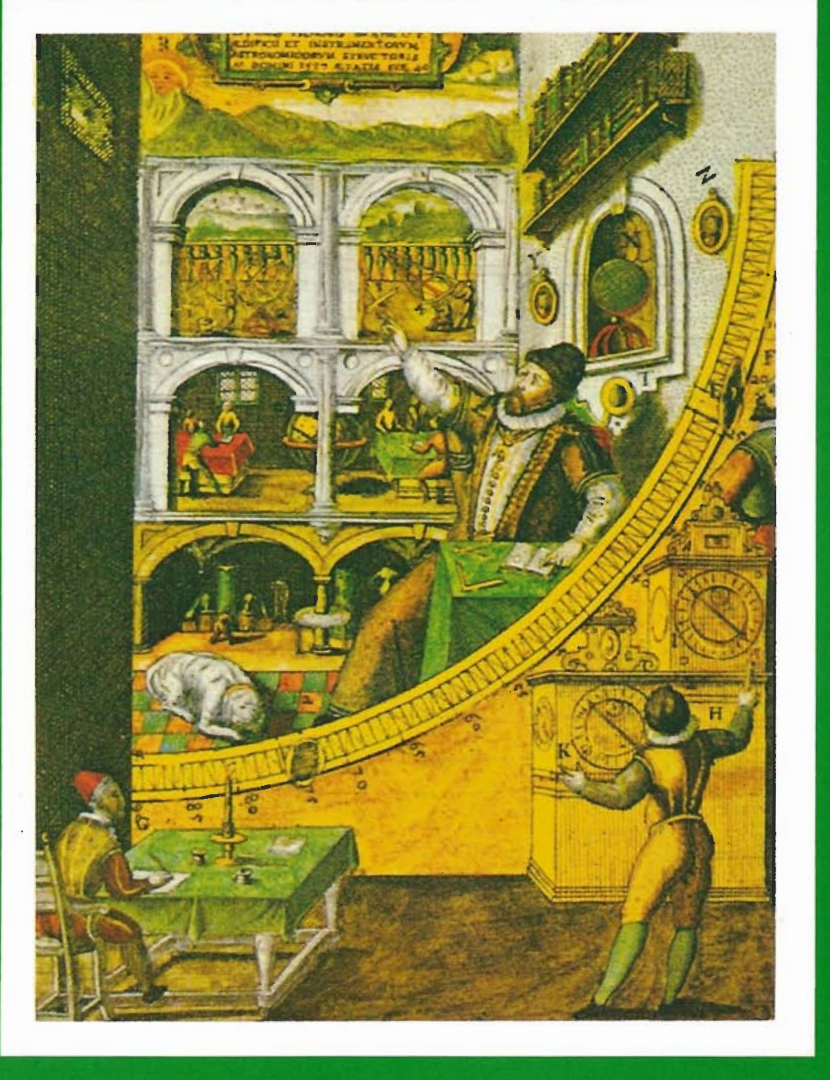
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. J. Topping. *Errors of Observation and their Treatment.* (Institute of Physics, London).
2. G.L. Squires. *Practical Physics.* (McGraw - Hill, U.K.).
3. P.R. Bevington. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences.* (McGraw - Hill, N.Y.).
4. H. Young. *Statistical Treatment of Experimental Data.* (McGraw - Hill, N.Y.).
5. N.C. Barford. *Experimental Measurements: Precision, Error and Truth.* (Addison - Wesley, Reading, Mass.).
6. S.L. Meyer. *Data Analysis for Scientists and Engineers.* (J. Wiley and sons, N.Y.).

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Τομέας Φυσικής, Γενικό Τμήμα

Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής

Τόμος Ι



Εκδόσεις Συμμετρία

Αθήνα 1994