

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών σε Συστήματα Μελανών Οπών στην Αριθμητική Σχετικότητα

Κωνσταντίνος Νεκτάριος Βασιλείου

Επιβλέπων Καθηγητής: Κωνσταντίνος Ν. Αναγνωστόπουλος

Οκτώβριος 2025

Περίληψη

Η γενική σχετικότητα του Einstein αποτελεί μια εξαιρετικά επιτυχημένη θεωρία της βαρύτητας. Οι εξισώσεις Einstein, γραμμένες σε συναλλοίωτη μορφή, αποκαλύπτουν τις βαθιές σχέσεις μεταξύ βαρύτητας και γεωμετρίας του χωροχρόνου, αλλά δεν είναι άμεσα κατάλληλες για τη μοντελοποίηση ρεαλιστικών αστροφυσικών συστημάτων. Στόχος του πρώτου κεφαλαίου αυτής της εργασίας είναι η αναδιατύπωση των εξισώσεων σε μορφή προβλήματος αρχικών τιμών (Cauchy) μέσω του 3+1 φορμαλισμού της γενικής σχετικότητας. Στο πλαίσιο αυτό, ο χωροχρόνος διαμερίζεται σε χωροειδείς υπερεπιφάνειες, και εισάγονται η χωρική μετρική γ_{ij} και η εξωγενής καμπυλότητα K_{ij} , οι οποίες παρέχουν μια ισοδύναμη περιγραφή της χωροχρονικής μετρικής $g_{\mu\nu}$. Οι εξισώσεις Einstein αναλύονται σε εξισώσεις περιορισμού πάνω στις υπερεπιφάνειες και σε εξισώσεις χρονικής εξέλιξης, δημιουργώντας έτσι μια κατάλληλη μορφή για αριθμητικές προσομοιώσεις. Όπως θα αποδείξουμε, δεδομένου ενός συνόλου αρχικών δεδομένων γ_{ij}, K_{ij} τα οποία ικανοποιούν τις εξισώσεις περιορισμού σε κάποια αρχική υπερεπιφάνεια, τα δεδομένα που προκύπτουν από τις εξισώσεις εξέλιξης συνεχίζουν να ικανοποιούν τις εξισώσεις περιορισμού και στις επόμενες υπερεπιφάνειες. Άρα, η λύση των εξισώσεων περιορισμού στην αρχική υπερεπιφάνεια αποτελεί ένα σημαντικό πρώτο βήμα για την εύρεση της χρονικής εξέλιξης του συστήματος. Με την επιλύση των εξισώσεων περιορισμού θα ασχοληθούμε στο δεύτερο μέρος. Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε δύο μεθόδους επίλυσης των εξισώσεων, την σύμμορφη διάσπαση York-Lichnerowicz και την σύμμορφη thin-sandwich προσέγγιση. Στο τελευταίο και κύριο μέρος, θα ασχοληθούμε με την εύρεση αρχικών δεδομένων σε ορισμένα απλά συστήματα μελανών οπών και θα μελετήσουμε τη γεωμετρία των υπερεπιφανειών στις οποίες αυτά ορίζονται. Αρχικά, θα εξετάσουμε την πιο απλή περίπτωση μιας μοναδικής μαύρης τρύπας Schwarzschild. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε αρχικά δεδομένα που αντιστοιχούν σε πολλαπλές μελανές οπές Schwarzschild για δύο χαρακτηριστικές τοπολογίες. Πρόκειται για τα δεδομένα τύπου Brill-Lindquist τα οποία αντιστοιχούν σε πολλά διαφορετικά σύμπαντα που συνδέονται με το αρχικό μέσα από γέφυρες Einstein-Rosen, αλλά όχι μεταξύ τους, και τα δεδομένα τύπου Misner τα οποία περιγράφουν δύο συμμετρικά σύμπαντα συνδεδεμένα με πολλές γέφυρες Einstein-Rosen. Τέλος, θα δούμε πως κατασκευάζονται τα λεγόμενα αρχικά δεδομένα Bowen-York, τα οποία αντιστοιχούν σε περιστρεφόμενες μελανές οπές.

Περιεχόμενα

1	Φορμαλισμός $3+1$	1
1.1	Διαμέριση του Χωροχρόνου	2
1.2	Προβολικός Τελεστής	2
1.3	$3+1$ Διαχωρισμός του χωροχρόνου	7
1.4	Εξωγενής Καμπυλότητα	12
1.5	Εξισώσεις Gauss Codazzi, Codazzi-Mainardi, Ricci	15
2	Εξισώσεις Einstein σε $3+1$ μορφή	19
2.1	Εξισώσεις Περιορισμού	19
2.2	Εξισώσεις Εξέλιξης	21
2.3	Χαμιλτονιανός Φορμαλισμός	31
3	Αρχικά Δεδομένα	36
3.1	Σύμμορφοι Μετασχηματισμοί	36
3.2	Σύμμορφη διάσπαση York-Lichnerowicz	38
3.2.1	Σύμμορφη εγκάρσια διάσπαση	40
3.2.2	Φυσική εγκάρσια διάσπαση	41
3.2.3	Σταθμισμένη εγκάρσια διάσπαση	44
3.3	Σύμμορφη thin-sandwich προσέγγιση	45
4	Αρχικά Δεδομένα σε Συστήματα Μελανών Οπών	48
4.1	Στιγμιαία στατικά αρχικά δεδομένα	48
4.1.1	Μαύρη τρύπα Schwarzschild	51
4.1.2	Πολλαπλές μαύρες τρύπες Schwarzschild	53
4.1.3	Αρχικά Δεδομένα τύπου Brill-Lindquist/Misner	57
4.2	Αρχικά Δεδομένα Bowen-York	64
4.2.1	Μέθοδος αντιστροφής	68
4.2.2	Μέθοδος Ιδιομορφιών	71

Κεφάλαιο 1

Φορμαλισμός 3+1

Εισαγωγή

Οι εξισώσεις Einstein οι οποίες περιγράφουν το βαρυτικό πεδίο, στην συνήθη διατύπωση τους είναι γραμμένες σε συναλλοιώτη μορφή, οπότε δεν υπάρχει ξεκάθαρος διαχωρισμός μεταξύ χώρου και χρόνου (εφόσον όλα τα συστήματα συντεταγμένων είναι ισοδύναμα). Βέβαια η συναλλοιώτητα των εξισώσεων είναι κάτι φυσικό και αναμενόμενο από τη σκοπιά της διαφορικής γεωμετρίας. Μάλιστα, η γεωμετρική θεώρηση της γενικής σχετικότητας αποκαλύπτει και μια σημαντική φυσική αλήθεια, ότι ο χρόνος και ο χώρος είναι άμεσα συνδεδεμένοι, για αυτό και μιλάμε πλέον για χωροχρόνο. Ωστόσο υπάρχουν περιπτώσεις όπου είναι επιθυμητός ο διαχωρισμός χώρου και χρόνου, όπως

- Όταν θέλουμε να έχουμε μια πιο διαισθητική εικόνα για κάποιες καταστάσεις, συγκεκριμένα να μπορούμε να έχουμε ένα είδος χρονικής εξέλιξης του βαρυτικού πεδίου (φυσικά ο χρόνος παραμένει μια απλή 'ταμπέλα' χωρίς να έχει την έννοια της κλασσικής φυσικής). Μπορεί, για παράδειγμα, έχοντας κάποια αρχικά δεδομένα για ένα αστροφυσικό σύστημα, να θέλουμε να προβλέψουμε την χρονική εξέλιξη του βαρυτικού πεδίου.
- Να δημιουργήσουμε έναν Χαμιλτονιανό φορμαλισμό για τη βαρύτητα που μπορεί να είναι η αρχή στο να γράψουμε μια κβαντική θεωρία της βαρύτητας.

Υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις σε αυτό το πρόβλημα, δηλαδή στο διαχωρισμό των εξισώσεων Einstein με τέτοιο τρόπο ώστε, ορίζοντας κάποια αρχικά δεδομένα, να μπορούμε να προβλέψουμε τη χρονική εξέλιξη του βαρυτικού πεδίου. Ο κάθε φορμαλισμός διαφέρει στον τρόπο με τον οποίο γίνεται αυτός ο διαχωρισμός. Η πιο συχνή προσέγγιση που χρησιμοποιείται στη αριθμητική σχετικότητα είναι ο 3+1 φορμαλισμός που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο. Σε αυτόν τον φορμαλισμό χωρίζουμε το χωροχρόνο σε έναν τρισδιάστατο χώρο και σε έναν μονοδιάστατο χρόνο.

1.1 Διαμέριση του Χωροχρόνου

Για να μελετήσουμε τη χρονική εξέλιξη ενός συστήματος στο χρόνο, θα πρέπει να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα Cauchy (ή πρόβλημα αρχικών τιμών).

Ορισμός 1.1 (Πρόβλημα Cauchy στη γενική σχετικότητα). *Δεδομένων αρχικών συνθηκών πάνω σε μια υπερεπιφάνεια, και συνοριακών συνθηκών, οι θεμελιώδεις εξισώσεις πρέπει να προβλέπουν τη χρονική εξέλιξη του συστήματος, το μέλλον και το παρελθόν του.*

Δηλαδή στα πλαίσια ενός προβλήματος Cauchy υπάρχει ένα σύνολο απο μεταβλητές (όχι απαραίτητα ανεξάρτητες, μπορεί να υπάρχουν δηλαδή εξισώσεις περιορισμού) για τις οποίες πρέπει να οριστούν κάποιες αρχικές τιμές πάνω σε μια υπερεπιφάνεια, καθώς και συνοριακές συνθήκες. Ένα σύνολο χρονικών εξισώσεων, με δεδομένες αυτές τις συνθήκες, δίνει τη χρονική εξέλιξη αυτών των μεταβλητών. Άρα δηλαδή ένα πρόβλημα Cauchy περιλαμβάνει:

- Ένα σύνολο εξισώσεων εξέλιξης με χρονικές παραγώγους των μεταβλητών του συστήματος.
- Πιθανόν, ένα σύνολο εξισώσεων περιορισμού, των μεταβλητών του συστήματος, πάνω σε υπερεπιφάνειες σταθερού χρόνου, δηλαδή χωρίς χρονικές παραγώγους.

Οι εξισώσεις Einstein στην αρχική covariant μορφή τους (τανυστικές εξισώσεις)

- Είναι αναλλοίωτες κάτω απο μετασχηματισμούς συντεταγμένων (δηλαδή ο χώρος και ο χρόνος χειρίζονται ισοδύναμα). Άρα δεν υπάρχει καθορισμένη χρονική διεύθυνση εξέλιξης.
- Ικανοποιούν τις ταυτότητες Bianchi $\nabla^m G_{mn} = 0$, το οποίο σημαίνει πως μόνο έξι από τις δέκα εξισώσεις Einstein είναι ανεξάρτητες (περιέχουν δηλαδή πραγματική δυναμική πληροφορία), οι υπόλοιπες λειτουργούν ως εξισώσεις περιορισμού (είναι απλώς γεωμετρικές σχέσεις που πρέπει πάντα να ικανοποιεί η μετρική) αντί για εξισώσεις εξέλιξης. Για να γίνει σαφής ο διαχωρισμός ανάμεσα σε εξισώσεις εξέλιξης και εξισώσεις περιορισμού, απαιτείται επιλογή συστήματος συντεταγμένων, η οποία όμως δεν είναι a priori καθορισμένη λόγω της συναλλοιότητας των εξισώσεων.
 - Δεν είναι προφανές το πως πρέπει να γίνει η επιλογή συστήματος συντεταγμένων ώστε να επιτευχθεί ο διαχωρισμός σε εξισώσεις εξέλιξης και σε εξισώσεις περιορισμού.

Οπότε, με βάση τα παραπάνω, συμπαίρνουμε ότι δεν αποτελούν πρόβλημα Cauchy. Θα πρέπει λοιπόν να επιλέξουμε ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων και να γράψουμε μια ισοδύναμη μορφή των εξισώσεων, για ένα καθορισμένο σύνολο μεταβλητών που θα περιγράφουν πλήρως τη φυσική του συστήματος, όπου θα διαχωρίζονται οι χωρικές με τις χρονικές παραγώγους. Επιθυμούμε ένα υποσύνολο εξισώσεων που θα περιέχουν πρώτες παραγώγους των μεταβλητών του συστήματος ως προς το χρόνο (γιατί έτσι ορίζεται ξεκάθαρα η χρονική εξέλιξη), από τις οποίες θα λαμβάνουμε τη χρονική εξέλιξη και ένα υποσύνολο εξισώσεων που θα περιλαμβάνουν μόνο χωρικές παραγώγους (οι εξισώσεις περιορισμού).

Το πρώτο πράγμα που θα κάνουμε λοιπόν είναι να διαχωρίσουμε το χώρο με το χρόνο (επιλογή κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων). Ο διαχωρισμός αυτός οδηγεί στον 3+1 φορμαλισμό της γενικής σχετικότητας. Θεωρούμε έναν καθολικά υπερβολικό χωροχρόνο με μετρική g_{ij} . Για καθολικά υπερβολικούς χωροχρόνους ισχύει το εξής θεώρημα [4]:

Θεώρημα 1.1. *Κάθε καθολικά υπερβολικός χωροχρόνος, μπορεί να υποστεί πλήρη διαμερισμό ή φύλλωση (completely foliated) δηλαδή να διαχωριστεί σε τρισδιάστατες υπερεπιφάνειες οι οποίες είναι χωροειδείς. Η κάθε υπερεπιφάνεια μπορεί να ταυτιστεί με μια τιμή κάποιας παραμέτρου t .*

Η παράμετρος t μπορεί να θεωρηθεί ένα είδος «παγκόσμιου» χρόνου χωρίς αυτό να σημαίνει βέβαια ότι θα ταυτίζεται με τον ιδιόχρονο κάποιου παρατηρητή. Ένας τέτοιος διαμερισμός του χωροχρόνου σε τρισδιάστατες χωροειδείς υπερεπιφάνειες ονομάζεται και συγχρονποίηση.

1.2 Προβολικός Τελεστής

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με μερικές βασικές έννοιες και ποσότητες που αφορούν τις υπερεπιφάνειες.

Ορισμός 1.2 (Ορθογώνιο διάνυσμα σε υπερεπιφάνεια). *Έστω διάνυσμα $\vec{s}$ στο σημείο P κάποιας υπερεπιφάνειας S της πολλαπλότητας. Λέμε ότι το $\vec{s}$ είναι ορθογώνιο στην επιφάνεια αν για το εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{v}$ οποιασδήποτε καμπύλης που ανήκει στην επιφάνεια και διέρχεται από το σημείο P να ισχύει:*

$$\vec{s} \cdot \vec{v} = g_{mn} s^m v^n = 0 \quad (1.2.1)$$

Ορισμός 1.3 (Εφαπτόμενο διάνυσμα σε υπερεπιφάνεια). Λέμε ότι κάποιο διάνυσμα $\vec{v}$ είναι εφαπτόμενο σε κάποια υπερεπιφάνεια S της πολλαπλότητας αν το τμήμα της καμπύλης της πολλαπλότητας στην οποία είναι εφαπτόμενο, ανήκει στην S .

Ορισμός 1.4 (Προβολικός Τελεστής). Έστω S μια τρισδιάστατη υπερεπιφάνεια της πολλαπλότητας και έστω $\vec{s}$ το μοναδιαίο, ορθογώνιο στην υπερεπιφάνεια, διανυσματικό πεδίο. Αν το $\vec{s}$ είναι χωροειδές ($g_{mn}s^ms^n = +1$), ορίζουμε ως προβολικό τελεστή τον τανυστή:

$$P_n^m = \delta_n^m - s^ms_n \quad (1.2.2)$$

Θεώρημα 1.2. Αν κάποιο διανυσματικό πεδίο $\vec{v}$ είναι ορθογώνιο στο $\vec{s}$ ($g_{mn}v^ms^n = 0$) τότε το $\vec{v}$ είναι εφαπτόμενο στην υπερεπιφάνεια S .

Απόδειξη. Για να το αποδείξουμε, επιλέξουμε σε κάποιο τυχαίο σημείο της υπερεπιφάνειας, μια ορθοκανονική βάση όπου το coordinate vector ∂_0 ταυτίζεται με το $\vec{s}$. Τότε τα υπόλοιπα coordinate vectors θα είναι εφαπτόμενα στην υπερεπιφάνεια (αφού είναι τρισδιάστατη, οι υπόλοιποι 3 άξονες θα αποτελούν ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων για την υπερεπιφάνεια). Άρα, αν ένα διάνυσμα $\vec{v}$ είναι ορθογώνιο στο $\vec{s}$, τότε $g_{mn}v^ms^n = 0 \rightarrow v^0 = 0$, δηλαδή θα είναι αναγκαστικά εφαπτόμενο στην υπερεπιφάνεια. $\square$

Θεωρούμε τώρα ένα τυχαίο διανυσματικό πεδίο v^n . Παρατηρούμε ότι $(P_n^mv^n)s_m = (v^m - s^ms_nv^n)s_m = v^ms_m - s^ms_mv^ns_n = 0$. Άρα το $P_n^mv^n$ είναι ορθογώνιο στο s^m . Αυτό είναι και το νόημα του προβολικού τελεστή. Δρώντας σε ένα διανυσματικό πεδίο, παράγει ένα διανυσματικό πεδίο που είναι ορθογώνιο σε αυτό που σχετίζεται με τον ίδιο τον τελεστή και ταυτόχρονα εφαπτόμενο στην υπερεπιφάνεια που έχει κάθετο πεδίο το s^m .

- Αν $\vec{v}$ ορθογώνιο στο $\vec{s}$ ($g_{mn}v^ms^n = v_ns^n = 0$) τότε εύκολα βρίσκουμε ότι

$$P_n^mv^n = v^m \quad (1.2.3)$$

Άρα αν ένα διάνυσμα είναι εφαπτόμενο στην υπερεπιφάνεια η δράση του προβολικού τελεστή το αφήνει αναλλοίωτο.

- Αν $\vec{v}$ παράλληλο στο $\vec{s}$ ($\vec{v} = \lambda\vec{s}$) τότε

$$P_n^mv^n = v^m - s^ms_nv^n = v^m - \lambda s^m = 0 \quad (1.2.4)$$

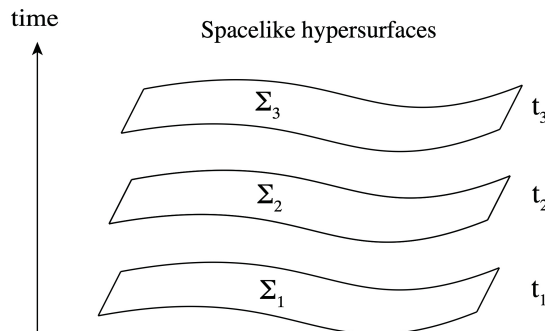
Άρα αν ένα διάνυσμα είναι κάθετο στην υπερεπιφάνεια η δράση του προβολικού τελεστή παράγει το μηδενικό διάνυσμα.

Για κάθε διανυσματικό πεδίο v^m μπορούμε να γράψουμε

$$v^m = \delta_a^mv^a = (P_a^m + s^ms_a)v^a = P_a^mv^a + s^ms_av^a \quad (1.2.5)$$

δηλαδή να το αναλύσουμε σε μια ορθογώνια και μια παράλληλη συνιστώσα ως προς το s^m

$$v_\perp^m = P_a^mv^a \quad v_\parallel^m = s_av^as^m. \quad (1.2.6)$$



Σχήμα 1.1: Ο διαμερισμός του χωροχρόνου σε χωροειδείς υπερεπιφάνειες.

Προφανώς $v_{\perp}^m s_m = 0$

Ισοδύναμα, «ορθογώνια/παράλληλη» συνιστώσα ως προς την υπερεπιφάνεια με ορθογώνιο σε αυτή διανυσματικό πεδίο το s^m (υπερεπιφάνεια S).

$$v_{\perp}^m = P_a^m v^a \quad v_{\perp}^m = s_a v^a s^m. \quad (1.2.7)$$

Ας υπολογίσουμε τώρα το μήκος του διανύσματος $P_n^m v^n$

$$\begin{aligned} g_{ab}(P_m^a v^m)(P_n^b v^n) &= g_{ab}[(\delta_m^a - s^a s_m)v^m][(\delta_n^b - s^b s_n)v^n] = g_{ab}(v^a - s^a s_m v^m)(v^b - s^b s_n v^n) = \\ &= g_{ab}v^a v^b - g_{ab}v^a s^b s_n v^n - g_{ab}s^a s_m v^m v^b + g_{ab}s^a s^b (s_m v^m)^2 = g_{ab}v^a v^b - s_a s_n v^a v^n = \\ &= (g_{mn} - s_m s_n)v^m v^n = P_{mn}v^m v^n \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

όπου λάβαμε υπ όψιν ότι $g_{ab}s^a s_m v^m v^b = s_b v^b s_m v^m = (s_m v^m)^2$ και $g_{ab}s^a s^b = +1$

Έα το μέτρο του προβαλλόμενου διανύσματος μπορεί να υπολογιστεί κατευθείαν από τον ταυυστή P_{mn} , δηλαδή τον προβολικό τελεστή με κατεβασμένο δείκτη.

Στην περίπτωση που έχουμε ένα 1-form πεδίο, ο προβολικός τελεστής δρα προφανώς ως:

$$P_n^m w_m$$

Πάλι βρίσκουμε ότι

- $(P_n^m w_m)s^m = 0$
- Αν $w_n s^n = 0 \rightarrow P_n^m w_m = w_n$
- Αν $w_m = \lambda s_m \rightarrow P_n^m w_m = 0$

Στην περίπτωση που το $\vec{s}$ είναι χρονοειδές, τότε ορίζουμε

$$P_n^m = \delta_n^m + s^m s_n \quad (1.2.9)$$

Η ανάλυση είναι παρόμοια με τα παραπάνω.

Ορισμός 1.5. *Επαγόμενη μετρική (Induced metric)* Έστω πολλαπλότητα (M, g_{ij}) και κάποια υπερεπιφάνεια S . Η επαγόμενη μετρική γ_{ij} της g_{ij} στην S , είναι ένας ταυυστής της υπερεπιφάνειας που προκύπτει από τον περιορισμό της g_{ij} στην S . Συγκεκριμένα θεωρούμε την υπερεπιφάνεια ως ξεχωριστή τρισδιάστατη πολλαπλότητα. Η επαγόμενη μετρική ορίζεται σε αυτή την τρισδιάστατη πολλαπλότητα, με τέτοιο τρόπο ώστε η δράση της σε τρισδιάστατα διανύσματα της S να είναι ακριβώς όπως η δράση της g_{ij} στα αντίστοιχα τετραδιάστατα διανύσματα της M που είναι εφαπτόμενα στην S .

Με ποιον τρόπο θα εμβαπτίσουμε την επαγόμενη μετρική στην M ώστε να την δούμε και ως ταυυστή που «ζει» στην πολλαπλότητα; Ο ταυυστής της επαγόμενης μετρικής που θα ορίσουμε θα πρέπει να είναι συνεπής με τον προηγούμενο ορισμό. Δηλαδή, η δράση του σε τετραδιάστατα διανύσματα της M εφαπτόμενα στην S θα πρέπει να είναι ίδια με την δράση της γ_{ij} ορισμένης στην S , στα αντίστοιχα τρισδιάστατα διανύσματα της S . Με βάση τον προηγούμενο ορισμό, συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι ο ταυυστής αυτός θα πρέπει να δρα σε διανύσματα τα οποία είναι εφαπτόμενα στην S όπως ακριβώς δρα σε αυτά η g_{ij} . Επίσης, είναι λογικό να απαιτήσουμε, η δράση του σε ορθογώνια στην υπερεπιφάνεια διανύσματα, να οριστεί ώστε να μηδενίζει το αποτέλεσμα (διότι πρόκειται για μια εμβάπτιση ενός ταυυστή που ορίζεται σε μια υπερεπιφάνεια, το οποίο σημαίνει ότι μόνο η δράση σε εφαπτόμενα στην υπερεπιφάνεια διανύσματα, μπορεί να προσδιοριστεί). Ορίζουμε λοιπόν την επαγόμενη μετρική στην M με βάση την παρακάτω σχέση

$$\gamma_{mn} v^m w^n = g_{mn} (P_a^m v^a) (P_b^n w^b) \quad (1.2.10)$$

Πράγματι είναι συνεπής με τις παραπάνω απαιτήσεις, γιατί αν v^m εφαπτόμενο στην S τότε $P_a^m v^a = v^m$, ενώ αν v^m ορθογώνιο στην S τότε $P_a^m v^a = 0$. Αυτή η σχέση σημαίνει ότι η επαγόμενη μετρική ορισμένη στην πολλαπλότητα, δρα σε διανύσματα ακριβώς όπως η μετρική στις εφαπτόμενες στην υπερεπιφάνεια συνιστώσες αυτών των διανυσμάτων (ισοδύναμα, στις προβολές των διανυσμάτων αυτών στην υπερεπιφάνεια). Με βάση την παραπάνω σχέση συμπαίρνουμε ότι:

$$\gamma_{mn} = P_m^a P_n^b g_{ab} = P_{mn} \quad (1.2.11)$$

Αρα ο προβολικός τελεστής με κατεβασμένο δείκτη ταυτίζεται με την επαγόμενη μετρική ορισμένη στο M . Γενικά ένας τέτοιος τανυστής, ο οποίος όταν δρά σε ένα διάνυσμα λαμβάνει υπ όψιν μόνο την εφαπτόμενη συνιστώσα ως προς κάποια υπερεπιφάνεια, ονομάζεται **χωρικός/χρονικός** ως προς την υπερεπιφάνεια (ανάλογα με το αν η υπερεπιφάνεια είναι χωρική ή χρονική) (βλ. παρακάτω). Συγκεκριμένα, έχουμε τον εξής ορισμό για τον χωρικό τανυστή (παρόμοιος είναι και για τον χρονικό)

Ορισμός 1.6 (Χωρικός τανυστής). Έστω S μια χωροειδής υπερεπιφάνεια με ορθογώνιο διανυσματικό πεδίο $\vec{\eta}$. Ένας τανυστής της πολλαπλότητας $T_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ ορισμένος στα σημεία της υπερεπιφάνειας ονομάζεται **χωρικός** αν σε κάθε σημείο αυτής, η συστολή του με το $\vec{\eta}$ σε οποιονδήποτε δείκτη είναι μηδέν:

$$T(\dots, \eta^m, \dots) = T(\dots, \eta_m, \dots) = 0 \quad (1.2.12)$$

Με βάση τον ορισμό, ένα διάνυσμα v^μ είναι χωρικό (αντίστοιχα χρονικό) αν $v^\mu \eta_\mu = 0$. Με βάση το θεώρημα 1.2 ένα χωρικό (αντίστοιχα χρονικό) διάνυσμα είναι εφαπτόμενο στην υπερεπιφάνεια.

Παρατήρηση 1.1. Είναι προφανές πως όταν έχουμε έναν χωρικό τανυστή μπορούμε να χρησιμοποιούμε την επαγόμενη μετρική $\gamma_{\mu\nu}$, $\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\kappa} g^{\mu\lambda} \gamma_{\kappa\lambda} = g^{\mu\nu} + \eta^\mu \eta^\nu$ για να ανεβοκατεβάζουμε δείκτες (ισοδύναμα, με τα $P_{\mu\nu}$, $P^{\mu\nu}$). Πράγματι

$$g_{a i_k} T_{j_1 j_2 \dots j_\nu}^{i_1 i_2 \dots i_\mu} = \gamma_{a i_k} T_{j_1 j_2 \dots j_\nu}^{i_1 i_2 \dots i_\mu} + \underbrace{\eta_a \eta_{i_k} T_{j_1 j_2 \dots j_\nu}^{i_1 i_2 \dots i_\mu}}_0 = \gamma_{a i_k} T_{j_1 j_2 \dots j_\nu}^{i_1 i_2 \dots i_\mu} \quad (1.2.13)$$

Φυσικά, ο τανυστής που προκύπτει είναι πάλι χωρικός διότι η επαγόμενη μετρική είναι χωρικός τανυστής. Προσοχή: $\gamma_{\mu\kappa} \gamma^{\kappa\nu} \neq \delta_\mu^\nu$. Αν όμως γ_{ij} η επαγόμενη μετρική ορισμένη σε κάποια υπερεπιφάνεια, τότε ορίζουμε $\gamma^{ij} = (\gamma_{ij})^{-1}$. Αν επιλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων ώστε ∂_i εφαπτόμενα στην υπερεπιφάνεια, τότε θα ισχύει:

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{0\nu} \\ \gamma_{\mu 0} & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad (1.2.14)$$

δε θα ισχύει όμως ότι

$$\gamma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma^{00} & \gamma^{0\nu} \\ \gamma^{\mu 0} & \gamma^{ij} \end{pmatrix}$$

Μόνο στην περίπτωση που επιλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων στην πολλαπλότητα ώστε ∂_0 ορθογώνιο στην υπερεπιφάνεια και ∂_i εφαπτόμενα στην υπερεπιφάνεια, τότε θα ισχύει:

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad (1.2.15)$$

$$\gamma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{ij} \end{pmatrix} = (\gamma_{\mu\nu})^{-1} \quad (1.2.16)$$

εφόσον

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 \\ 0 & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad (1.2.17)$$

Γενικά θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\gamma_{\mu\nu}$ για την επαγόμενη μετρική ορισμένη στην πολλαπλότητα και το συμβολισμό γ_{ij} για την επαγόμενη μετρική ορισμένη στην υπερεπιφάνεια.

Είναι προφανές πως η δράση ενός χωρικού/χρονικού τανυστή σε οποιοδήποτε 1-form, διάνυσμα, λαμβάνει υπ όψιν μόνο την εφαπτομενική συνιστώσα στην υπερεπιφάνεια $P_a^m v^a$, $P_m^a w_a$ αντίστοιχα. Μάλιστα αυτή η πρόταση είναι ισοδύναμη και με τον παραπάνω ορισμό.

Είδαμε πιο πάνω πως μπορούμε να μετατρέψουμε τον μετρικό τανυστή σε χωρικό/χρονικό ως προς κάποια υπερεπιφάνεια (επαγόμενη μετρική). Λέμε ότι ο χωρικός/χρονικός αυτός τανυστής είναι μια «προβολή» του μετρικού τανυστή στην υπερεπιφάνεια. Αυτή η διαδικασία μπορεί να γίνει και για οποιονδήποτε τανυστή, ορισμένο στην πολλαπλότητα.

Έστω ότι έχουμε έναν τανυστή T_n^m τύπου (1,1) ορισμένο στην πολλαπλότητα. Αν K_n^m η προβολή του τανυστή στην υπερεπιφάνεια, τότε για ένα οποιοδήποτε διάνυσμα και ένα οποιοδήποτε 1-form ορισμένα σε κάποιο σημείο της υπερεπιφάνειας, έχουμε ότι

$$K_a^b v^a w_b = T_a^b (P_m^a v^m) (P_b^n w_n) \rightarrow K_m^n = P_m^a P_b^n T_n^m$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε για οποιονδήποτε τανυστή, οπότε καταλήγουμε στο θεώρημα

Θεώρημα 1.3 (Προβολή τανυστή σε υπερεπιφάνεια). Έστω ένας τανυστής $T_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ ορισμένος στην πολλαπλότητα και έστω κάποια υπερεπιφάνεια της πολλαπλότητας με μοναδιαίο ορθογώνιο διανυσματικό πεδίο σε αυτή $\vec{s}$ και αντίστοιχο προβολικό τελεστή P_n^m . Ο τανυστής

$$P_{m_1}^{i_1} P_{m_2}^{i_2} \dots P_{m_k}^{i_k} P_{j_1}^{n_1} P_{j_2}^{n_2} \dots P_{j_l}^{n_l} T_{n_1 n_2 \dots n_l}^{m_1 m_2 \dots m_k} \quad (1.2.18)$$

είναι χωρικός/χρονικός ως προς την υπερεπιφάνεια.

Όπως και η επαγομένη μετρική (με βάση όσα αναφέραμε πριν), έτσι και για κάθε χωρικό/χρονικό τανυστή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι «ζει» είτε στην πολλαπλότητα είτε στην υπερεπιφάνεια, στην περίπτωση που θεωρήσουμε την υπερεπιφάνεια ως μια ξεχωριστή τρισδιάστατη πολλαπλότητα. Προφανώς, ως τανυστής ορισμένος στην υπερεπιφάνεια, δρά σε τρισδιάστατα διανύσματα/1-forms αυτής όπως δρά ο ορισμένος στην πολλαπλότητα τανυστής, στα αντίστοιχα τετραδιάστατα διανύσματα/1-forms που είναι εφαπτόμενα στην υπερεπιφάνεια.

Παρατήρηση 1.2. Έστω χωρικός τανυστής $T_{\mu\nu}$ ορισμένος στην πολλαπλότητα, και T_{ij} ο ίδιος τανυστής ορισμένος σε κάποια υπερεπιφάνεια. Έστω ένα σύστημα συντεταγμένων (∂_t, ∂_i) ώστε ∂_i εφαπτόμενα στην υπερεπιφάνεια. Αν T_{ij} τα components του αντίστοιχου τανυστή στο σύστημα συντεταγμένων ∂_i τότε τα components του $T_{\mu\nu}$ στο σύστημα συντεταγμένων (∂_t, ∂_i) είναι

$$\begin{pmatrix} T_{00} & T_{0i} \\ T_{i0} & T_{ij} \end{pmatrix} \quad (1.2.19)$$

Η γενίκευση για έναν τυχαίο τανυστή τύπου (m, n) είναι προφανής.

Μια υπερεπιφάνεια ονομάζεται:

- Χωροειδής αν η επαγομένη μετρική έχει υπογραφή 0 (riemmanian υποπολλαπλότητα) σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $\gamma_{ij} = \text{diag}(+1, +1, +1)$
- Χρονοειδής αν η επαγομένη μετρική έχει υπογραφή 1 (pseudo-riemmanian υποπολλαπλότητα) σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $\gamma_{ij} = \text{diag}(-1, +1, +1)$

Είναι προφανές ότι το κάθετο διανυσματικό πεδίο στην υπερεπιφάνεια είναι:

- Χρονοειδές, αν η υπερεπιφάνεια είναι χωροειδής.
- Χωροειδές, αν η υπερεπιφάνεια είναι χρονοειδής.

επειδή ο χωροχρόνος είναι μια pseudo-riemmanian πολλαπλότητα (σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $g_{ij} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$)

Θεώρημα 1.4 (Συναλλοίωτη παράγωγος). Έστω μια υπερεπιφάνεια Σ (κάθετο διανυσματικό πεδίο $\vec{s}$, προβολικός τελεστής P_ν^μ) με επαγομένη μετρική $\gamma_{\mu\nu}$. Για τη μοναδική συναλλοίωτη παράγωγο που είναι χωρίς στρέψη και συμβατή με την επαγομένη μετρική (σύνδεση Levi-Civita) ισχύει ότι:

$$D_m T_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k} = P_{m_1}^{i_1} P_{m_2}^{i_2} \dots P_{m_k}^{i_k} P_{j_1}^{n_1} P_{j_2}^{n_2} \dots P_{j_l}^{n_l} P_m^a \nabla_a T_{n_1 n_2 \dots n_l}^{m_1 m_2 \dots m_k} \quad (1.2.20)$$

Απόδειξη. Επειδή η ∇_m είναι σύνδεση Levi-Civita της πολλαπλότητας μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι και η D_m ικανοποιεί όλες τις βασικές ιδιότητες που έχει μια σύνδεση (γραμμικότητα, αναγωγή σε κλίση για ένα βαθμωτό πεδίο, μεταθετικότητα με συστολές, ισχύ του κανόνα Leibnitz. Οπότε μένει να αποδείξουμε ότι είναι συμβατή με τη μετρική και ότι είναι χωρίς στρέψη

- Συμβατότητα με τη μετρική

$$D_a \gamma_{\mu\nu} = P_a^k P_\mu^l P_\nu^m \nabla_k (g_{lm} \pm s_l s_m) = P_a^k P_\mu^l P_\nu^m (\nabla_k g_{lm} + s_l \nabla s_m + s_m \nabla s_l) = 0$$

διότι $\nabla_k g_{lm} = 0$, $P_\mu^l s_l = 0$, $P_\nu^m s_m = 0$

- Χωρίς στρέψη

$$D_a D_b f = P_a^m P_b^n \nabla_m \partial_n f = P_a^m P_b^n (\partial_m \partial_n f - \Gamma_{mn}^k \partial_k f)$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} D_b D_a f &= P_b^m P_a^n \nabla_m \partial_n f = P_b^m P_a^n (\partial_m \partial_n f - \Gamma_{mn}^k \partial_k f) = P_a^m P_b^n (\partial_n \partial_m f - \Gamma_{nm}^k \partial_k f) = \\ &P_a^m P_b^n (\partial_m \partial_n f - \Gamma_{mn}^k \partial_k f) \end{aligned}$$

διότι $\Gamma_{mn}^k = \Gamma_{nm}^k$. Άρα τελικά

$$[D_a, D_b]f = 0$$

□

Είναι προφανές ότι ο τανυστής

$$D_m T_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k}$$

είναι χωρικός/χρονικός ως προς την υπερεπιφάνεια. Επειδή λοιπόν μπορούμε να τον δούμε και σαν τανυστή που ορίζεται στην υπερεπιφάνεια, ορίζουμε την D ως την συναλοϊώτη παράγωγο της υπερεπιφάνειας. Για την ακρίβεια όμως, με βάση τον ορισμό, ο D είναι ένας τελεστής που δρα σε τανυστές της πολλαπλότητας. Άρα θα πρέπει να προσδιορίσουμε τον αντίστοιχο τελεστή που είναι ορισμένος στην υπερεπιφάνεια. Πως δρά δηλαδή αυτός ο τελεστής (D, Σ) σε έναν τανυστή ορισμένο στην υπερεπιφάνεια.

Αν T_{ij} τανυστής ορισμένος στην υπερεπιφάνεια Σ τότε η δράση του D στον T_{ij} προκύπτει ως εξής. Αν $T_{\mu\nu}$ ο αντίστοιχος τανυστής που ορίζεται στην πολλαπλότητα (δρα σε τετραδιάστατα διανύσματα εφαπτόμενα στην υπερεπιφάνεια όπως δρα ο T_{ij} στα αντίστοιχα τριδιάστατα στην υπερεπιφάνεια, και για τυχαίο τετραδιάστατο διάνυσμα λαμβάνει υπ όψιν μόνο την εφαπτόμενη στην υπερεπιφάνεια συνιστώσα) (οπότε $T_{\mu\nu}$ χωρικός/χρονικός), τότε $D_k T_{ij}$ είναι ο τανυστής που προκύπτει από τον περιορισμό του τανυστή $D_\lambda T_{\mu\nu}$ στην Σ (εξάλλου $D_\lambda T_{\mu\nu}$ χωρικός/χρονικός οπότε μπορούμε να τον δούμε ως τανυστή ορισμένο στην υπερεπιφάνεια). Η γενίκευση για έναν τυχαίο τανυστή τύπου (m, n) είναι προφανής.

Άρα αν γ_{ij} η επαγόμενη μετρική ορισμένη στην υπερεπιφάνεια, τότε $D_k \gamma_{ij} = 0$ εφόσον $D_\lambda \gamma_{\mu\nu} = 0$. Άρα όντως η D , ορισμένη στην υπερεπιφάνεια, είναι η σύνδεση Levi-Civita της υπερεπιφάνειας.

Παρατήρηση 1.3. Ανάλογα με το αν ο τελεστής είναι ορισμένος στην πολλαπλότητα ή την υπερεπιφάνεια θα γράφουμε (D, M) , (D, Σ) . Παρόμοια και για έναν τανυστή θα γράφουμε $(T_{\mu\nu}, M)$, $(T_{\mu\nu}, \Sigma)$.

1.3 3+1 Διαχωρισμός του χωροχρόνου

Υπενθυμίζουμε ότι ένας καθολικά υπερβολικός χωροχρόνος μπορεί να υποστεί πλήρη διαμερισμό. Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τη γεωμετρία του χωροχρόνου που έχει υποστεί έναν τέτοιο διαμερισμό, δηλαδή ένα διαχωρισμό σε χωροειδείς υπερεπιφάνειες οι οποίες δεν έχουν κοινά σημεία και χαρακτηρίζονται από μια τιμή κάποιας παραμέτρου t . Κάθε υπερεπιφάνεια (ονομάζεται συχνά και 'φέτα' της διαμέρισης) αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου t . Η συνάρτηση t (συνάρτηση παγκόσμιου χρόνου) όπως ορίζεται στην πολλαπλότητα του χωροχρόνου αποτελεί ένα ομαλό βαθμωτό πεδίο.

Ορισμός 1.7. (Προσαρμοσμένες συντεταγμένες)

Οι προσαρμοσμένες συντεταγμένες (adapted coordinates) ως προς μια διαμέριση, αποτελούν ένα σύστημα συντεταγμένων της πολλαπλότητας M που προκύπτει με φυσικό τρόπο κατά την επιλογή μιας διαμέρισης του M σε υπερεπιφάνειες S_t . Συγκεκριμένα ένα σημείο $P \in S_t$ σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων, έχει συντεταγμένες:

$$x^n = (t, x^i)$$

όπου $x^i = (x^1, x^2, x^3)$ ένα σύστημα συντεταγμένων της S_t .

Για τα διανύσματα συντεταγμένων :

- $(\partial_i, \partial_i) > 0$ χωροειδή
- $(\partial_t, \partial_t) < 0$ χρονοειδές

Ορίζουμε το $\nabla^m t$ το οποίο είναι ένα κάθετο διανυσματικό πεδίο στις υπερεπιφάνειες της διαμέρισης. Θα δείξουμε ότι όντως είναι κάθετο. Έστω η συνάρτηση $f(P) = t$ ορισμένη στην πολλαπλότητα και έστω V^m ένα διανυσματικό πεδίο εφαπτόμενο σε κάποια υπερεπιφάνεια Σ . Τότε ισχύει

$$V_\mu \nabla^\mu t = V^\mu \nabla_\mu t = dt(V) = V(t) = 0 \quad (1.3.1)$$

διότι το t έχει παντού ίδια τιμή πάνω στην υπερεπιφάνεια Σ .

Το διανυσματικό πεδίο αυτό είναι χρονοειδές, διότι οι υπερεπιφάνειες είναι χωροειδείς (βλ. προηγούμενη ενότητα). Η βαθμωτή ποσότητα

$$\alpha = 1/\sqrt{|(\nabla^m t, \nabla^m t)|} = 1/\sqrt{|g_{mn}(\nabla^m t)(\nabla^n t)|} = (-g_{mn}(\nabla^m t)(\nabla^n t))^{-1/2} \quad (1.3.2)$$

ονομάζεται **συνάρτηση μετάβασης (lapse function)**

Ορίζουμε ως μοναδιαίο ορθογώνιο στις υπερεπιφάνειες της διαμέρισης διανυσματικό πεδίο η^n το:

$$\eta^m = -\alpha \nabla^m t \quad (1.3.3)$$

Πρόταση 1.1. Ισχύει ότι:

$$\eta^n \nabla_m \eta_n = \eta_n \nabla_m \eta^n = 0 \quad (1.3.4)$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_m(-1) = \nabla_m(\eta^n \eta_n) = \eta_n \nabla_m \eta^n + \eta^n \nabla_m \eta_n = g_{na} \eta^a \nabla_m g^{nb} \eta_b + \eta^n \nabla_m \eta_n = \\ &= g_{na} \eta^a \eta_b \underbrace{\nabla_m g^{nb}}_0 + g_{na} \eta^a g^{nb} \nabla_m \eta_b + \eta^n \nabla_m \eta_n = \delta_a^b \eta^a \nabla_m \eta_b + \eta^n \nabla_m \eta_n = \eta^a \nabla_n \eta_a + \eta^n \nabla_m \eta_n = \\ &= 2\eta^n \nabla_m \eta_n \rightarrow \eta^n \nabla_m \eta_n = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Επίσης } 0 = \eta_n \nabla_m \eta^n + \underbrace{\eta^n \nabla_m \eta_n}_0 \rightarrow \eta_n \nabla_m \eta^n = 0 \quad \square$$

Βάλαμε το πρόσημο - ώστε το η να δείχνει προς το μέλλον. Ας δούμε γιατί ισχύει αυτό. Έστω ένα σύστημα συντεταγμένων (t, x^i) προσαρμοσμένο στη διαμέριση. Η χρονική συνιστώσα του $\nabla^m t$ είναι

$$dt(\nabla^m t) = \nabla_m t \nabla^m t < 0$$

διότι $\nabla^m t$ χρονοειδές. Άρα για να δείχνει προς το μέλλον πρέπει να βάλουμε το πρόσημο -.

Εφόσον το η^m είναι χρονοειδές, οι ολοκληρωτικές καμπύλες του μπορούν να αποτελούν κοσμικές γραμμές για κάποιον παρατηρητή. Ένας τέτοιος παρατηρητής, του οποίου η κοσμική γραμμή ταυτίζεται με κάποια από τις ολοκληρωτικές καμπύλες του η^m ονομάζεται **κανονικός παρατηρητής (ή Eulerian observer)**. Ένας τέτοιος παρατηρητής λοιπόν, κινείται 'κάθετα' στις χωρικές υπερεπιφάνειες και στο σύστημα του, γεγονότα που συμβαίνουν σε μια υπερεπιφάνεια είναι ταυτόχρονα.

Το η^m είναι η 4-ταχύτητα ενός κανονικού παρατηρητή. Η 4-επιτάχυνση ορίζεται ως:

$$a^\alpha = D_\eta \eta^\alpha = \eta^m \nabla_m \eta^\alpha \quad (1.3.5)$$

Πρόταση 1.2. Ισχύει ότι

$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha} D_\alpha a = D_\alpha \ln \alpha \quad (1.3.6)$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} a_\alpha &= D_\eta \eta_\alpha = \eta^m \nabla_m \eta_\alpha = -\eta^m \nabla_m (\alpha \nabla_\alpha t) = -\eta^m \nabla_m \alpha \nabla_\alpha t - \alpha \eta^m \underbrace{\nabla_m \nabla_\alpha t}_{\nabla_\alpha \nabla_m t} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \eta_\alpha \eta^m \nabla_m \alpha + \alpha \eta^m \nabla_\alpha \left(-\frac{1}{\alpha} \eta_m \right) = \frac{1}{\alpha} \eta_\alpha \eta^m \nabla_m \alpha + \frac{1}{\alpha} \nabla_\alpha \alpha \underbrace{\eta^m \eta_m}_{-1} - \underbrace{\eta^m \nabla_\alpha \eta_m}_0 = \\ &= \frac{1}{\alpha} (\nabla_\alpha \alpha + \eta_\alpha \eta^m \nabla_m \alpha) = \frac{1}{\alpha} P_a^m \nabla_m \alpha = \frac{1}{\alpha} \gamma_a^m \nabla_m \alpha \\ &= \frac{1}{\alpha} D_\alpha a = D_\alpha \ln \alpha \end{aligned}$$

□

Ορίζουμε τώρα ως **κάθετο διάνυσμα χρονικής εξέλιξης (normal evolution vector)** το διανυσματικό πεδίο

$$m^a = \alpha \eta^a \quad (1.3.7)$$

Προφανώς

$$m^a m_a = -\alpha^2 \quad (1.3.8)$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$(\nabla^a t, m^a) = \alpha(\nabla^a t, \eta^a) = -\alpha^2 \underbrace{(\nabla^a t, \nabla^a t)}_{-\alpha^{-2}} = 1 \quad (1.3.9)$$

Θεωρούμε ένα chart (U, ϕ) της πολλαπλότητας το οποίο περιέχει τις υπερεπιφάνειες $S_t, S_{t+\delta t}$. Μπορούμε να μετακινηθούμε από την επιφάνεια S_t στην γειτονική επιφάνεια $S_{t+\delta t}$ (συγκεκριμένα αναφερόμαστε στις εικόνες τους στο $\mathbb{R}^4$ μέσω της ϕ) με μια μετατόπιση κατά $\delta t \vec{m}$ όπου το $\vec{m}$ είναι το διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^4$ που αντιστοιχεί(μέσω της ϕ) στο διανυσματικό πεδίο χρονικής εξέλιξης m^a της πολλαπλότητας. Δηλαδή, αν $p \in S_t$, τότε $\vec{p}' = \vec{p} + \delta t \vec{m} \in S_{t+\delta t}$ όπου $\vec{p}, \vec{p}'$ τα διανύσματα(του $\mathbb{R}^4$) θέσης των σημείων p, p' .

Ας το αποδείξουμε

Έστω η συνάρτηση $f(P) = t$ της πολλαπλότητας M και το chart (U, ϕ) . Έστω σημείο $p \in S_t$, το οποίο στο $\mathbb{R}^n$ μέσω της ϕ , έχει συντεταγμένες $\vec{p}$. Επίσης, έστω $\gamma(\lambda)$ η ολοκληρωτική καμπύλη του m^a (συντεταγμένες της καμπύλης στο $\mathbb{R}^4$, μέσω της $\phi: x^m(\lambda)$) η οποία διέρχεται από το σημείο p , $\gamma(0) = p$. Από τον ορισμό του διανύσματος σε μια πολλαπλότητα έχουμε:

$$m^a(f)|_p = \lim_{\delta\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(\delta\lambda)) - f(\gamma(0))}{\delta\lambda} = \lim_{\delta\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x^m(\delta\lambda)) - f(x^m(0))}{\delta\lambda}$$

Όταν $\delta\lambda \rightarrow 0$, τότε

$$x^m(\delta\lambda) = x^m(0) + \left. \frac{dx^m}{d\lambda} \right|_0 \delta\lambda = \vec{p} + \left. \frac{dx^m}{d\lambda} \right|_0 \delta\lambda = \vec{p} + \vec{m}\delta\lambda$$

Θέτοντας $\delta\lambda = \delta t \rightarrow 0$, έχουμε τελικά:

$$m^a(f)|_p = \frac{f(\vec{p} + \delta t \vec{m}) - f(\vec{p})}{\delta t}$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$m^a(f) = df(m^a) = dt(m^a) = \nabla_a t(m^a) = (\nabla^a t, m^a)$$

Οπότε τελικά έχουμε:

$$\delta t (\nabla^a t, m^a) = t(\vec{p} + \delta t \vec{m}) - t(\vec{p}) \rightarrow t(\vec{p}') = t(\vec{p}) + \delta t \quad (1.3.10)$$

Στον ομοιομορφικό στο chart (U, ϕ) χώρο $\mathbb{R}^4$ το απειροστά μικρό διάνυσμα το οποίο συνδέει τα σημεία p, p' είναι το $\delta t \vec{m}$. Υπενθυμίζουμε ότι, το στοιχειώδες μήκος του απειροστά μικρού ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα σημεία p, p' , ισούται με

$$ds = \sqrt{|g(\delta t m^a, \delta t m^a)|} \quad (1.3.11)$$

όπου $\delta t m^a$ είναι το διάνυσμα της πολλαπλότητας M που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\delta t \vec{m}$ του $\mathbb{R}^4$ μέσω της ϕ . Άρα λοιπόν

$$ds = \sqrt{|g(\delta t m^a, \delta t m^a)|} = \delta t \sqrt{g_{ab} m^a m^b} = \alpha \delta t \quad (1.3.12)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο ιδιόχρονος που μετράει ένας κανονικός παρατηρητής μεταξύ των γεγονότων p, p' ισούται με:

$$\delta\tau = \alpha \delta t \quad (1.3.13)$$

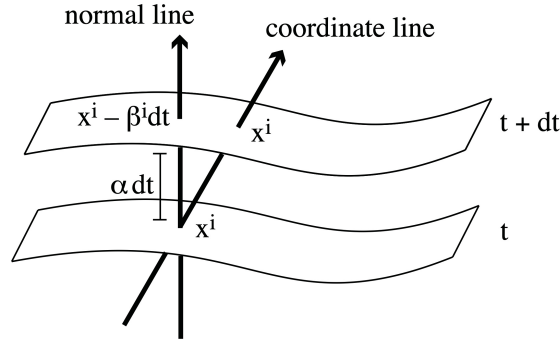
Έστω τώρα ένα σύστημα συντεταγμένων (t, x^i) προσαρμοσμένο σε κάποια διαμέριση. Ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο μετατόπισης(shift vector field) ως:

$$\beta^a = \partial_t - m^a \quad (1.3.14)$$

Το διανυσματικό πεδίο μετατόπισης μας δείχνει την απόκλιση που έχει, σε κάποιο σημείο κάποιας υπερεπιφάνειας, το διάνυσμα χρονικής συντεταγμένης από το ορθογώνιο διάνυσμα χρονικής εξέλιξης.

Ας υπολογίσουμε τώρα τα components του διανύσματος σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων, σε κάποιο σημείο $P \in S_t$.

$$\beta^0 = 1 - m^0 = 1 - dt(m^a) = 1 - \underbrace{\nabla_a t(m^a)}_1 = 0$$



Σχήμα 1.2: Δύο απειροστά κοντινές υπερεπιφάνειες, και η οπτικοποίηση των μεγεθών της συνάρτησης μετάβασης και του διανύσματος μετατόπισης

Έστω η συνάρτηση $f(P) = x^i$

Για το i -χωρικό component του β^a ισχύει ότι

$$\beta^i = \beta^a(f) = \beta^a(x^i)$$

Άρα

$$\beta^i = \beta^a(x^i) = -m^a(x^i) = -\frac{x^i(\vec{p} + \delta t \vec{m}) - x^i(\vec{p})}{\delta t}$$

με βάση όσα είπαμε πιο πριν. Άρα τελικά:

$$\beta^i = \frac{x^i(\vec{p}) - x^i(\vec{p} + \delta t \vec{m})}{\delta t} \rightarrow \beta^a = (0, \beta^i) \quad (1.3.15)$$

Από αυτή τη σχέση, έχουμε ότι:

$$x^i(\vec{p} + \delta t \vec{m}) = x^i(\vec{p}) - \delta t \beta^i \quad (1.3.16)$$

Άρα τα β^i μας δίνουν την πληροφορία για το πως αλλάζουν οι χωρικές συντεταγμένες καθώς πηγαίνουμε από μια υπερεπιφάνεια S_t στην απειροστά γειτονική της $S_{t+\delta t}$ αν κινηθούμε κάθετα στην S_t , σε σχέση με το αν είχαμε κινηθεί σε μια γραμμή σταθερών χωρικών συντεταγμένων (βλ. σχήμα 1.2). Το διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ που αντιστοιχεί στο β^a ενώνει αυτά τα δύο σημεία τομής της $S_{t+\delta t}$ με τις αντίστοιχες γραμμές (κάθετη και σταθερών χωρικών συντεταγμένων). Μπορούμε επίσης να πούμε ότι το β^i είναι η «σχετική ταχύτητα» μεταξύ ενός κανονικού παρατηρητή και ενός παρατηρητή που κινείται σε γραμμή σταθερών χωρικών συντεταγμένων. Επίσης το β^a είναι ορθογώνιο του η^a αφού

$$\eta_a = -a \nabla_a t = -a dt = (-a, 0, 0, 0) \quad (1.3.17)$$

Τέλος από τις 1.3.14, 1.3.7 μπορούμε να βρούμε ότι τα components του η^μ σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο σε κάποιο foliation είναι

$$\eta^\mu = \left(\frac{1}{a}, -\frac{\beta^i}{a} \right) \quad (1.3.18)$$

Παρατήρηση 1.4. Προφανώς δεν ισχύει $t^a = \partial_t = \nabla^a t$, δηλαδή το διάνυσμα χρονικής συντεταγμένης δεν είναι απαραίτητα κάθετο στην υπερεπιφάνεια.

Ισχύει ότι

$$t^\mu \eta_\mu = (\beta^\mu + a \eta^\mu) \eta_\mu = a \rightarrow t^\mu \nabla_\mu t = 1 \quad (1.3.19)$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε ότι το διανυσματικό πεδίο μετατόπισης β^μ είναι η προβολή του t^μ στις υπερεπιφάνειες. Πράγματι:

$$\gamma_{\mu\nu} t^\nu = \underbrace{\alpha \gamma_{\mu\nu} \eta^\nu}_0 + \gamma_{\mu\nu} \beta^\nu = \beta_\mu \rightarrow \beta^\mu = P^\mu_\nu t^\nu \quad (1.3.20)$$

Για να ορίσουμε το β^μ χρησιμοποιήσαμε κάποιο σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στη διαμέριση. Πως όμως μπορούμε να το ορίσουμε με κάποιον τρόπο που να μην εξαρτάται από κάποιο σύστημα συντεταγμένων; Θα πρέπει να αντικαταστήσουμε το ∂_t με ένα διανυσματικό πεδίο που δεν εξαρτάται από κάποιο σύστημα συντεταγμένων.

Διαλέγουμε ένα διανυσματικό πεδίο t^μ που ικανοποιεί την εξίσωση $t^\mu \nabla_\mu t = 1$. Το t^μ δεν είναι απαραίτητο να είναι χρονοειδές. Μπορεί φυσικά και να είναι χωροειδές. Αυτό είναι δυνατό διότι, όπως είχαμε αναφέρει και προηγουμένως, ο χρόνος t δεν αντιστοιχεί απαραίτητα στον ιδιόχρονο κάποιου παρατηρητή (δεν υπάρχει δηλαδή απαραίτητα παρατηρητής με κοσμική γραμμή ταυτιζόμενη με κάποια χρονική γραμμή). Οι μόνες προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιεί το διανυσματικό πεδίο t^μ είναι:

- Να μην είναι εφαπτόμενο στις χωρικές υπερεπιφάνειες. Πράγματι ισχύει, αλλιώς θα ήταν $t^\mu \nabla_\mu t = 0$
- Να δείχνει προς το μέλλον πράγματι : $t^\mu \nabla_\mu t = 1 \Leftrightarrow t^\mu \eta_\mu = -\alpha \Leftrightarrow \underbrace{(t_1^\mu)}_{\perp S_t} + \underbrace{(t_2^\mu)}_{// S_t} \eta_\mu = \alpha \Leftrightarrow t_1^\mu \eta_\mu = \alpha \Leftrightarrow t_1^\mu = \alpha \eta^\mu = m^\mu$ Το m^μ όπως δείξαμε προηγουμένως δείχνει προς το μέλλον

Άρα λοιπόν, η εξίσωση $t^\mu \nabla_\mu t = 1$ περιλαμβάνει όλες τις απαραίτητες προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιεί το διανυσματικό πεδίο t^μ .

Σαν τελευταία εκρεμότητα για αυτή την ενότητα έχουμε τον υπολογισμό των components της μετρικής σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων.

Πρόταση 1.3. (Components της μετρικής) Σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο σε κάποια διαμέριση, τα components της μετρικής, σε μορφή πίνακα είναι:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta^k \beta_k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad (1.3.21)$$

όπου γ_{ij} τα components της επαγόμενης μετρικής σε κάποια υπερεπιφάνεια, $\beta_i = \gamma_{ij} \beta^j$.

Απόδειξη. Έχουμε

- $g_{00} = g(\partial_t, \partial_t) = g(\beta^\mu + \alpha \eta^\mu, \beta^\mu + \alpha \eta^\mu) = \beta_\mu \beta^\mu + \alpha^2 \eta_\mu \eta^\mu = -\alpha^2 + \beta_i \beta^i$
- $g_{0i} = g_{i0} = g(\partial_t, \partial_i) = g(\beta^\mu + \alpha \eta^\mu, \partial_i) = g(\beta^\mu, \partial_i) = \beta_\mu \delta_i^\mu = \beta_i$
- $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \gamma_{ij}$ αφού ∂_i, ∂_j χωρικά (εφαπτόμενα στην υπερεπιφάνεια)
Ισχύει ότι $\beta_\mu = g_{\mu\kappa} \beta^\kappa = \gamma_{\mu\kappa} \beta^\kappa$ επειδή β^μ χωρικό. Άρα $\rightarrow \beta_i = \gamma_{i\kappa} \beta^\kappa = \gamma_{ij} \beta^j$ επειδή $\beta^0 = 0$

□

Εύκολα βρίσκουμε ότι τα components της $g^{\mu\nu}$ είναι

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^j/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j / \alpha^2 \end{pmatrix} \quad (1.3.22)$$

όπου $\gamma^{ij} = (\gamma_{ij})^{-1}$.

Παρατήρηση 1.5. Με γ_{ij} αναφερόμαστε στην επαγόμενη μετρική ορισμένη στην υπερεπιφάνεια, ενώ με $\gamma_{\mu\nu}$ αναφερόμαστε στην επαγόμενη μετρική ορισμένη σε όλη την πολλαπλότητα (στον πλήρη χωροχρόνο), $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \eta_\mu \eta_\nu$. Ισχύει $\gamma_{ik} \gamma^{kj} = \delta_i^j$, ενώ $\gamma_{\mu\lambda} \gamma^{\lambda\nu} \neq \delta_\mu^\nu$.

Εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι σε ένα σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο σε κάποια διαμέριση τα components της χωρικής μετρικής $(\gamma_{\mu\nu}, M)$ είναι:

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \beta^\kappa \beta_\kappa & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad (1.3.23)$$

και

$$\gamma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j / \alpha^2 \end{pmatrix} \quad (1.3.24)$$

1.4 Εξωγενής Καμπυλότητα

Οι τρισδιάστατες υπερεπιφάνειες του χωροχρόνου όπως γνωρίζουμε, αποτελούν υποπολλαπλότητες με μετρική γ_{ij} . Η καμπυλότητα τους χαρακτηρίζεται από τον τρισδιάστατο τανυστή Riemann, ο οποίος ορίζεται σε όρους της επαγόμενης μετρικής γ_{ij} . Αυτή η καμπυλότητα που χαρακτηρίζει τις υπερεπιφάνειες είναι το «κλασσικό» είδος καμπυλότητας που χαρακτηρίζει μια πολλαπλότητα. Ωστόσο υπάρχει και ένα άλλο είδος καμπυλότητας που χαρακτηρίζει τις υπερεπιφάνειες το οποίο έχει να κάνει με τον τρόπο που αναδύονται στην τετραδιάστατη πολλαπλότητα του χωροχρόνου. Αυτό το είδος της καμπυλότητας ονομάζεται εξωγενής καμπυλότητα.

Για να ορίσουμε την εξωγενή καμπυλότητα μιας υπερεπιφάνειας, εστιάζουμε στην απόκλιση που έχει το ορθογώνιο σε μια υπερεπιφάνεια διανυσματικό πεδίο σε σχέση με το διανυσματικό πεδίο που προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση του κατά μήκος ολοκληρωτικών καμπυλών ενός άλλου διανυσματικού πεδίου. Συγκεκριμένα, η εξωγενής καμπυλότητα χαρακτηρίζεται από έναν τανυστή που όπως θα δούμε, μας δίνει την πληροφορία για αυτή την απόκλιση.

Ορισμός 1.8. (Τανυστής εξωγενούς καμπυλότητας) Ορίζουμε τον τανυστή εξωγενούς καμπυλότητας ως:

$$K_{\mu\nu} = -P_\mu^\alpha P_\nu^\beta \nabla_\alpha \eta_\beta \quad (1.4.1)$$

Με βάση τον ορισμό έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= -(\delta_\mu^\alpha + \eta_\mu^\alpha)(\delta_\nu^\beta + \eta_\nu^\beta) \nabla_\alpha \eta_\beta = -(\delta_\mu^\alpha + \eta_\mu^\alpha)(\nabla_\alpha \eta_\nu + \underbrace{\eta_\nu^\beta \nabla_\alpha \eta_\beta}_0) = -(\delta_\mu^\alpha + \eta_\mu^\alpha) \nabla_\alpha \eta_\nu = \\ &= -\nabla_\mu \eta_\nu + \eta_\mu^\alpha \nabla_\alpha \eta_\nu \end{aligned}$$

Άρα λοιπόν

$$K_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \eta_\nu + \eta_\mu^\alpha \nabla_\alpha \eta_\nu \quad (1.4.2)$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$K_{\mu\nu} = -P_\mu^\alpha P_\nu^\beta \nabla_\alpha \eta_\beta = -P_\mu^\alpha \nabla_\alpha \eta_\nu \quad (1.4.3)$$

Επίσης, είναι προφανές με βάση τον ορισμό ότι ο τανυστής $K_{\mu\nu}$ είναι χωρικός. Οπότε

$$\eta^\mu K_{\mu\nu} = \eta^\nu K_{\mu\nu} = 0 \quad (1.4.4)$$

Ας δούμε τώρα πως δράει ο τανυστής της εξωγενούς καμπυλότητας σε ένα διανυσματικό πεδίο.

Έστω μια καμπύλη $\gamma(t)$ ορισμένη σε κάποια υπερεπιφάνεια και v^μ το εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο σε αυτή.

$$K_\mu^\nu v^\mu = v^\mu \nabla_\mu \eta^\nu + \underbrace{v^\mu \eta_\mu^\alpha \nabla_\alpha \eta^\nu}_0 = D_v \eta^\nu \quad (1.4.5)$$

όπου D_v η κατακατεύθυνση συναλλοίωτη παράγωγος στην κατεύθυνση του v^μ .

Αν έχουμε παράλληλη μετατόπιση του $\eta^\mu \rightarrow D_v \eta^\nu = 0 \rightarrow K_\mu^\nu v^\mu = 0$ διαφορετικά $K_\mu^\nu v^\mu \neq 0$

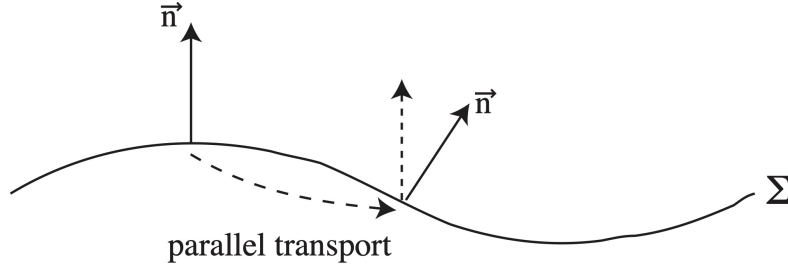
Άρα πράγματι ο τανυστής εξωγενούς καμπυλότητας μας δίνει την πληροφορία για το πόσο αποκλίνει από την παράλληλη μετατόπιση, ένα ορθογώνιο στην υπερεπιφάνεια διανυσματικό πεδίο, κατά μήκος μιας ολοκληρωτικής καμπύλης ενός άλλου διανυσματικού πεδίου.

Γιατί δε χρησιμοποιήσαμε μόνο τον όρο $\nabla_\mu \eta_\nu$ στον ορισμό αφού στην παραπάνω περίπτωση ο δεύτερος όρος μηδενίζεται;

Θέλουμε ο $K_{\mu\nu}$ να είναι χωρικός, οπότε ήταν απαραίτητη η χρήση του προβολικού τελεστή. Διαφορετικά αν ορίζαμε $K_{\mu\nu} = \nabla_\mu \eta_\nu$, τότε για να ήταν χωρικός θα έπρεπε να ισχύει $\eta^\nu \nabla_\mu \eta_\nu = \eta^\mu \nabla_\mu \eta_\nu = 0$, όμως $\eta^\mu \nabla_\mu \eta_\nu \neq 0$, εκτός αν οι κανονικές γραμμές είναι γεωδαισιακές, που δεν είναι απαραίτητο να ισχύει.

Θεώρημα 1.5. Ο τανυστής εξωγενούς καμπυλότητας είναι συμμετρικός

$$K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu} \quad (1.4.6)$$



Σχήμα 1.3: Ο τανυστής εξωγενούς καμπυλότητας είναι ένα μέτρο του κατά πόσο αποκλίνει από το να είναι ορθογώνιο στην υπερεπιφάνεια, ένα διάνυσμα που έχει προκύψει από παράλληλη μετατόπιση ορθογωνίου στην υπερεπιφάνεια διανύσματος.

Απόδειξη. 1ος Τρόπος(Σχέση $K_{\mu\nu} = -P_\mu^\alpha \nabla_\alpha \eta_\nu$)

Ο τανυστής $\nabla_\mu \eta_\nu$ δεν είναι συμμετρικός εν γένει. Θα ήταν αν ίσχυε $\eta_\nu = \nabla_\nu t$ το οποίο δεν είναι απαραίτητο να ισχύει. Η προβολή όμως αυτού του τανυστή είναι συμμετρικός τανυστής όπως θα δούμε.

Έστω το σύνολο των χρονοειδών γεωδαισιακών που είναι ορθογώνιες στην υπερεπιφάνεια Σ με τα μοναδιαία ορθογώνια διανύσματα(στην Σ) να σχηματίσουν το διανυσματικό πεδίο $\vec{\xi}$. Θεωρούμε τώρα μια καινούρια διαμέριση στη γειτονία της Σ ώστε $\xi_\mu = \nabla_\mu \tilde{t}$ (παράμετρος για την καινούρια διαμέριση).

$$P_\mu^\alpha \nabla_\alpha \xi_\nu = -(\nabla_\mu \xi_\nu + \xi_\mu \xi^\alpha \nabla_\alpha \xi_\nu) = -\nabla_\mu \xi_\nu$$

Πάνω στην Σ : $\vec{\xi} = \vec{\eta}$ (όχι όμως εκτός της Σ)

Θυμίζουμε ότι: $\nabla_\mu T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots} = \partial_\mu T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots} - \Gamma_{\mu \lambda_1}^\rho T_{\rho \lambda_2 \dots} - \Gamma_{\mu \lambda_2}^\rho T_{\lambda_1 \rho \dots} - \dots$

$$P_\mu^\alpha \nabla_\alpha \xi_\nu = P_\mu^\alpha (\partial_\alpha \xi_\nu - \Gamma_{\alpha\nu}^\rho \xi_\rho)$$

σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένων στη διαμέριση.

Επειδή $P_0^\alpha = \delta_0^\alpha + \eta^\alpha \eta_0 = 0$ θα εμφανίζονται μόνο χωρικές παράγωγοι.

Άρα διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω ποσότητα εξαρτάται μόνο από παραγώγους σε κατευθύνσεις της υπερεπιφάνειας. Οπότε, επειδή $\vec{\eta} = \vec{\xi}$ πάνω στην υπερεπιφάνεια:

$$K_{\mu\nu} = P_\mu^\alpha \nabla_\alpha \eta_\nu = P_\mu^\alpha \nabla_\alpha \xi_\nu = -\nabla_\mu \xi_\nu = -\nabla_\mu \nabla_\nu \tilde{t} = -\nabla_\nu \nabla_\mu \tilde{t} = -\nabla_\nu \xi_\mu = P_\nu^\alpha \nabla_\alpha \xi_\mu = P_\nu^\alpha \nabla_\alpha \eta_\mu = K_{\nu\mu}$$

2ος Τρόπος(Σχέση $K_{\mu\nu} = -P_\mu^\alpha P_\nu^\beta \nabla_\alpha \eta_\beta$)

$$K_{\mu\nu} = -P_\mu^\alpha P_\nu^\beta \nabla_\alpha \eta_\beta = -P_\mu^\alpha P_\nu^\beta \nabla_\alpha (-\alpha \nabla_\beta t) = \alpha P_\mu^\alpha P_\nu^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta t + P_\mu^\alpha \underbrace{P_\nu^\beta \nabla_\beta t}_{=0} \nabla_\alpha \alpha = \alpha P_\mu^\alpha P_\nu^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta t =$$

$$\alpha P_\mu^\alpha P_\nu^\beta \nabla_\beta \nabla_\alpha t = K_{\nu\mu}$$

□

Παρατήρηση 1.6. Να σημειώσουμε, ότι επειδή η εξωτερική καμπυλότητα, όπως είδαμε στην παραπάνω απόδειξη, εξαρτάται μόνο από τη συμπεριφορά του $\vec{\eta}$ στην υπερεπιφάνεια, αποτελεί μια γεωμετρική ιδιότητα της ίδιας της υπερεπιφάνειας.

Πρόταση 1.4. (Αποσύνθεση τανυστή) Για έναν τανυστή $S_{\mu\nu}$ ισχύει ότι:

$$S_{\mu\nu} = P_\mu^\alpha P_\nu^\beta S_{\alpha\beta} - \eta_\nu \eta^\beta P_\mu^\alpha S_{\alpha\beta} - \eta_\mu \eta^\alpha P_\nu^\beta S_{\alpha\beta} + \eta_\mu \eta_\nu \eta^\alpha \eta^\beta T_{\alpha\beta} \quad (1.4.7)$$

Με βάση την παραπάνω πρόταση εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι :

Πρόταση 1.5. Η συστολή ενός πλήρως αντισυμμετρικού τανυστή $T_{\mu\nu}$ με τον τανυστή $\nabla_\mu \eta_\mu$ δίνει:

$$T^{\mu\nu} \nabla_\mu \eta_\mu = 0 \quad (1.4.8)$$

Απόδειξη. Με βάση την 1.4.7 έχουμε ότι

$$\nabla_\mu \eta_\nu = K_{\mu\nu} - \eta_\mu \eta^c K_{c\nu} - \eta_\nu \eta^c K_{\mu c} + \eta_\mu \eta_\nu \eta^c \eta^d K_{cd}$$

Άρα

$$T^{\mu\nu} \nabla_\mu \eta_\nu = \underbrace{T^{\mu\nu} K_{\mu\nu}}_0 - T^{\mu\nu} \eta_\mu \eta^c K_{c\nu} - T^{\mu\nu} \eta_\nu \eta^c K_{\mu c} + \underbrace{T^{\mu\nu} \eta_\mu \eta_\nu \eta^c \eta^d K_{cd}}_0 = T^{\nu\mu} \eta_\mu \eta^c K_{\nu c} - T^{\mu\nu} \eta_\nu \eta^c K_{\mu c} = 0$$

□

Πρόταση 1.6. Η εξωγενής καμπυλότητα έχει την ισοδύναμη μορφή:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\vec{\eta}} \gamma_{\mu\nu} \quad (1.4.9)$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{\eta}} \gamma_{\mu\nu} &= \eta^\alpha \nabla_\alpha \gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\alpha} \nabla_\nu \eta^\alpha + \gamma_{\nu\alpha} \nabla_\mu \eta^\alpha = \eta^\alpha \nabla_\alpha (\eta_\mu \eta_\nu) + \eta^\alpha \underbrace{\nabla_\alpha g_{\mu\nu}}_0 + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu \eta^\alpha + \eta_\mu \underbrace{\eta_\alpha \nabla_\nu \eta^\alpha}_0 + \\ &g_{\nu\alpha} \nabla_\mu \eta^\alpha + \eta_\nu \underbrace{\eta_\alpha \nabla_\mu \eta^\alpha}_0 = \eta^\alpha \nabla_\alpha (\eta_\mu \eta_\nu) + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu \eta^\alpha + g_{\nu\alpha} \nabla_\mu \eta^\alpha = \\ &\eta^\alpha \eta_\mu \nabla_\alpha \eta_\nu + \eta^\alpha \eta_\nu \nabla_\alpha \eta_\mu + \nabla_\nu \eta_\mu + \nabla_\mu \eta_\nu = \\ &(\gamma_\mu^\alpha - g_\mu^\alpha) \nabla_\alpha \eta_\nu + (\gamma_\nu^\alpha - g_\nu^\alpha) \nabla_\alpha \eta_\mu + \nabla_\nu \eta_\mu + \nabla_\mu \eta_\nu = \\ &\gamma_\mu^\alpha \nabla_\alpha \eta_\nu + \gamma_\nu^\alpha \nabla_\alpha \eta_\mu - \underbrace{g_{\mu\kappa} g^{\kappa\alpha} \nabla_\alpha \eta_\nu}_{\nabla_\mu \eta_\nu} - \underbrace{g_{\nu\kappa} g^{\kappa\alpha} \nabla_\alpha \eta_\mu}_{\nabla_\nu \eta_\mu} + \nabla_\nu \eta_\mu + \nabla_\mu \eta_\nu = \\ &-2K_{\mu\nu} \end{aligned}$$

□

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες $\gamma(t)$ του διανυσματικού πεδίου $\vec{\eta}$ ορίζουν μια οικογένεια απεικονίσεων από την πολλαπλότητα στον εαυτό της $M \rightarrow M$ (1-parameter family of diffeomorphisms). Ισχύει ότι:

$$\mathcal{L}_{\vec{\eta}} \gamma_{\mu\nu} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^* \gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}) \quad (1.4.10)$$

Συμπαιρόνουμε λοιπόν ότι η εξωγενής καμπυλότητα είναι διαισθητικά η «ταχύτητα» της χωρικής μετρικής όπως την αντιλαμβάνεται ένας κανονικός παρατηρητής.

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε, ότι αν ϕ μια βαθμωτή συνάρτηση τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{L}_{\vec{\eta}} \gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi} \mathcal{L}_{\phi \vec{\eta}} \gamma_{\mu\nu} \quad (1.4.11)$$

Αν θέσουμε $\phi = \alpha$ (συνάρτηση μετάβασης) τότε έχουμε

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\alpha} \mathcal{L}_{\alpha \vec{\eta}} \gamma_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\alpha} (\mathcal{L}_{\vec{\epsilon}} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}) \gamma_{\mu\nu} \rightarrow (\mathcal{L}_{\vec{\epsilon}} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}) \gamma_{\mu\nu} = -2\alpha K_{\mu\nu} \quad (1.4.12)$$

Διαλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων (t, x^i) προσαρμοσμένο σε κάποια διαμέριση. Τότε ισχύει ότι:

$$\mathcal{L}_{\vec{\epsilon}} \gamma_{\mu\nu} = t^\lambda \partial_\lambda \gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\rho\nu} \partial_\mu t^\rho + \gamma_{\mu\rho} \partial_\nu t^\rho = \partial_t \gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\rho\nu} \partial_\mu t^\rho + \gamma_{\mu\rho} \partial_\nu t^\rho \quad (1.4.13)$$

Από την 1.4.12, αν επικεντρωθούμε μόνο στα χωρικά components έχουμε:

$$\partial_t \gamma_{ij} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} \quad (1.4.14)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τα $\mathcal{L}_{\vec{\beta}} \gamma_{ij}$.

Αρχικά υπενθυμίσουμε τη σύμβαση πως, με τους δείκτες μ, ν αναφερόμαστε σε έναν ταυστή(και στα αντίστοιχα components) που είναι ορισμένος στην τετραδιάστατη πολλαπλότητα, ενώ με τους δείκτες (i, j) , σε έναν ταυστή(και στα αντίστοιχα components) που είναι ορισμένος σε κάποια υπερεπιφάνεια. Αν έχουμε έναν χωρικό ταυστή $T_{\mu\nu}$ ορισμένο στην πολλαπλότητα, τότε T_{ij} είναι ο ίδιος ταυστής ορισμένος στην υπερεπιφάνεια, και αντίστροφα(γιατί όπως είχαμε πει, ένας χωρικός ταυστής ορισμένος στην πολλαπλότητα

μπορεί να θεωρηθεί ότι ζει και στην υπερεπιφάνεια). Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε και το συμβολισμό $(T_{\mu\nu}, M)$, $(T_{\mu\nu}, \Sigma)$ για να δείξουμε που είναι ορισμένος ο τανυστής (αν χρησιμοποιούμε αυτό τον συμβολισμό τότε δεν έχει σημασία αν θα χρησιμοποιούμε τους δείκτες (i, j) ή (μ, ν)). Επίσης, με βάση την παρατήρηση 1.2, σε ένα σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο σε κάποια διαμέριση (t, x^i) , τα components του T_{ij} στο σύστημα συντεταγμένων (x^i) , θα είναι ίδια με τα αντίστοιχα components του $T_{\mu\nu}$ στο σύστημα συντεταγμένων (t, x^i) . Με βάση την 1.4.10 (εδώ βέβαια έχουμε το πεδίο $\vec{\beta}$ αντί του $\vec{\eta}$), ο τανυστής $\mathcal{L}_{\vec{\beta}}\gamma_{\mu\nu}$ είναι χωρικός, εφόσον $\vec{\beta}$ εφαπτόμενο στην υπερεπιφάνεια. Άρα λοιπόν, τα χωρικά components του $\mathcal{L}_{\vec{\beta}}\gamma_{\mu\nu}$ είναι ίσα με τα components του $\mathcal{L}_{\vec{\beta}}\gamma_{ij}$ η αλλιώς

$$(\mathcal{L}_{\vec{\beta}}\gamma_{ij}, M) = (\mathcal{L}_{\vec{\beta}}\gamma_{ij}, \Sigma) \quad (1.4.15)$$

Θυμίζουμε ότι (D, Σ) είναι η συνναλωίωτη παράγωγος της υπερεπιφάνειας. Άρα θα ισχύει:

$$(\mathcal{L}_{\vec{\beta}}\gamma_{ij}, \Sigma) = \beta^k \underbrace{D_k \gamma_{ij} + \gamma_{kj} D_i \beta^k + \gamma_{ik} D_j \beta^k}_0 = D_i(\gamma_{kj} \beta^k) - \beta^k \underbrace{D_i \gamma_{kj} + D_j(\gamma_{ik} \beta^k)}_0 - \beta^k \underbrace{D_j \gamma_{ik}}_0 = D_i \beta_j + D_j \beta_i \quad (1.4.16)$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$(D_\mu \beta^\nu, M) = \gamma_\mu^\alpha \gamma_\delta^\nu \nabla_\alpha \beta^\delta \quad (1.4.17)$$

Με βάση όσα είπαμε παραπάνω ισχύει ότι:

$$(D_i \beta^j, \Sigma) = (D_i \beta^j, M) = \gamma_i^\alpha \gamma_\delta^j \nabla_\alpha \beta^\delta \quad (1.4.18)$$

για τα components των παραπάνω τανυστών.

Άρα λοιπόν από την 1.4.14 έχουμε τελικά:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i \quad (1.4.19)$$

Χρειαζόμαστε ακόμη ένα σύνολο από εξισώσεις χρονικής εξέλιξης για τα K_{ij} ώστε να γράψουμε πλήρως τις εξισώσεις Einstein ως πρόβλημα Cauchy. Μέχρι στιγμής χρησιμοποιήσαμε μόνο γεωμετρικές έννοιες και εν τέλη καταλήξαμε στις εξισώσεις 1.4.19, χωρίς καμία αναφορά στις εξισώσεις Einstein. Οπότε είναι προφανές ότι απο αυτές, οι οποίες περιγράφουν τη δυναμική του συστήματος, θα προέλθουν οι εξισώσεις για τα K_{ij} (σε αντίθεση με τις παραπάνω που προήλθαν από την «κινηματική»).

Παρατήρηση 1.7. Ενδιαφερόμαστε μόνο για τα χωρικά components διότι τα χρονικά δεν είναι ανεξάρτητα. Συγκεκριμένα, επειδή πρόκειται για χωρικό τανυστή, ισχύει προφανώς

$$\gamma_{\mu\nu} \eta^\mu = \gamma_{\mu\nu} \eta^\nu = 0$$

οπότε τα χρονικά components, είναι συνάρτηση των χωρικών (το $\eta^\mu = (\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^i}{\alpha})$ εξαρτάται από τις συναρτήσεις βαθμίδας α, β^i οι οποίες επιλέγονται ελεύθερα αντιπροσωπεύοντας την ελευθερία που έχουμε ως προς την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων).

1.5 Εξισώσεις Gauss Codazzi, Codazzi-Mainardi, Ricci

Σε αυτή την ενότητα, θα εξάγουμε τρεις πολύ σημαντικές γεωμετρικές σχέσεις στα πλαίσια του 3+1 φορμαλισμού, τις τανυστικές εξισώσεις Gauss Codazzi, Codazzi-Mainardi και Ricci.

- Η τανυστική εξίσωση Gauss Codazzi προκύπτει από προβολή του τανυστή Riemann της πολλαπλότητας στις υπερεπιφάνειες, δηλαδή παίρνοντας συστολές με τον προβολικό τελεστή.
- Η τανυστική εξίσωση Codazzi-Mainardi παίρνοντας παίρνοντας συστολές στους 3 δείκτες του τανυστή Riemann της πολλαπλότητας, με τον προβολικό τελεστή και μία συστολή στον άλλο δείκτη με το μοναδιαίο ορθογώνιο στις υπερεπιφάνειες διανυσματικό πεδίο.
- Η εξίσωση Ricci προκύπτει παίρνοντας παίρνοντας συστολές στους 2 δείκτες του τανυστή Riemann της πολλαπλότητας με τον προβολικό τελεστή και 2 συστολές στους άλλους δείκτες με το μοναδιαίο ορθογώνιο στις υπερεπιφάνειες διανυσματικό πεδίο.

Πρόταση 1.7. (Εξίσωση Gauss Codazzi) Έστω μια πολλαπλότητα M και μια διαμέριση αυτής σε χωροειδείς υπερεπιφάνειες S_t με μοναδιαίο ορθογώνιο σε αυτές διανυσματικό πεδίο $\vec{n}$. Σε κάθε υπερεπιφάνεια ικανοποιείται η εξίσωση:

$$P_\delta^\alpha P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma R_{\kappa\lambda\sigma}^\delta = {}^{(3)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha + K_{\nu\beta} K_\mu^\alpha - K_{\mu\beta} K_\nu^\alpha \quad (1.5.1)$$

όπου ${}^{(3)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ ο τανυστής Riemann της τρισδιάστατης υπερεπιφάνειας S , ορισμένος στην πολλαπλότητα M .

Πριν την απόδειξη, θα κάνουμε ένα σχόλιο για τον τανυστή Riemann της υπερεπιφάνειας.

Για τον τανυστή Riemann της υπερεπιφάνειας S , έχουμε:

$$D_\mu D_\nu v^\alpha - D_\nu D_\mu v^\alpha = {}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}^\alpha v^\lambda \quad (1.5.2)$$

όπου $D = (D, S)$, $\vec{v} \in S$

Ισχύει ότι:

$${}^{(3)}R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (1.5.3)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \gamma^{\rho\sigma} (\partial_\mu \gamma_{\nu\sigma} + \partial_\nu \gamma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \gamma_{\mu\nu}) \quad (1.5.4)$$

όπου $\gamma_{\mu\nu} = (\gamma_{\mu\nu}, S)$.

Ο τανυστής Riemann της τρισδιάστατης υπερεπιφάνειας S , ορισμένος στην πολλαπλότητα M , $({}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}^\alpha, M)$, ορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να δρά σε διανύσματα εφαπτόμενα στην υπερεπιφάνεια όπως ο $({}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}^\alpha, S)$ στα αντίστοιχα διανύσματα της υπερεπιφάνειας και να δίνει μηδενικό αποτέλεσμα όταν δρα σε διανύσματα ορθογώνια στην υπερεπιφάνεια. Είναι προφανές ότι θα ορίζεται με βάση τη σχέση:

$$D_\mu D_\nu v^\alpha - D_\nu D_\mu v^\alpha = {}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}^\alpha v^\lambda$$

όπου $D = (D, M)$, $\vec{v} \in M$, εφαπτόμενο στην υπερεπιφάνεια. Άρα θα δίνεται προφανώς από τον τύπο 1.5.3 μόνο που τώρα θα είναι $\gamma_{\mu\nu} = (\gamma_{\mu\nu}, M)$. Αν διαλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων (t, x^i) ώστε ∂_i εφαπτόμενα στην υπερεπιφάνεια, τότε προφανώς:

$$({}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}^\alpha, M) = ({}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}^\alpha, S)$$

για τα χωρικά components του $({}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}^\alpha, M)$

Απόδειξη. Για τον τανυστή Riemann της υπερεπιφάνειας S , ορισμένο στην πολλαπλότητα, έχουμε:

$$D_\mu D_\nu v^\alpha - D_\nu D_\mu v^\alpha = {}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}^\alpha v^\lambda \quad (1.5.5)$$

όπου $D = (D, M)$, v εφαπτόμενο στην S .

Έχουμε

$$D_\mu D_\nu v^\alpha = D_\mu (D_\nu v^\alpha) = P_\mu^\lambda P_\nu^\kappa P_\rho^\alpha \nabla_\lambda (D_\kappa v^\rho) = P_\mu^\lambda P_\nu^\kappa P_\rho^\alpha \nabla_\lambda (P_\kappa^\sigma P_\delta^\rho \nabla_\sigma v^\delta) \quad (1.5.6)$$

Προφανώς ισχύει ότι $\nabla_\lambda \delta_\beta^\alpha = 0$, $P_\alpha^\beta \eta_\beta = P_\alpha^\beta = 0$, $\eta_\alpha v^\alpha = 0$.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, καθώς και τις 1.3.4, 1.4.1, 1.4.3, έχουμε:

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu v^\alpha &= P_\mu^\lambda P_\nu^\kappa P_\delta^\alpha \eta^\sigma \nabla_\lambda \eta_\kappa \nabla_\sigma v^\delta + P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma P_\rho^\alpha \eta_\delta \nabla_\lambda \eta^\rho \nabla_\sigma v^\delta + P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma P_\delta^\alpha \nabla_\lambda \nabla_\sigma v^\delta = \\ &= P_\delta^\alpha \eta^\sigma \nabla_\sigma v^\delta K_{\mu\nu} - P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma P_\rho^\alpha v^\delta \nabla_\lambda \eta^\rho \nabla_\sigma \eta_\delta + P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma P_\delta^\alpha \nabla_\lambda \nabla_\sigma v^\delta = \\ &= P_\delta^\alpha \eta^\sigma \nabla_\sigma v^\delta K_{\mu\nu} - K_\mu^\alpha K_{\nu\delta} v^\delta + P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma P_\delta^\alpha \nabla_\lambda \nabla_\sigma v^\delta \end{aligned}$$

αν εναλλάξουμε τους δείκτες $\mu \leftrightarrow \nu$ έχουμε:

$$\begin{aligned} D_\nu D_\mu v^\alpha &= -P_\delta^\alpha \eta^\sigma \nabla_\sigma v^\delta K_{\nu\mu} - K_\nu^\alpha K_{\mu\delta} v^\delta + P_\nu^\lambda P_\mu^\sigma P_\delta^\alpha \nabla_\lambda \nabla_\sigma v^\delta = \\ &= -P_\delta^\alpha \eta^\sigma \nabla_\sigma v^\delta K_{\nu\mu} - K_\nu^\alpha K_{\mu\delta} v^\delta + \underbrace{P_\nu^\lambda P_\mu^\sigma P_\delta^\alpha \nabla_\sigma \nabla_\lambda v^\delta}_{\lambda \leftrightarrow \sigma} \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε τη συμμετρία $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$. Άρα:

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu v^\alpha - D_\nu D_\mu v^\alpha &= (K_{\mu\delta} K_\nu^\alpha - K_{\nu\delta} K_\mu^\alpha) v^\delta + P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma P_\delta^\alpha (\nabla_\lambda \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\lambda) v^\delta \\ {}^{(3)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha v^\beta &= (K_{\mu\beta} K_\nu^\alpha - K_{\nu\beta} K_\mu^\alpha) v^\beta + P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma P_\delta^\alpha R_{\kappa\lambda\sigma}^\delta v^\kappa \\ {}^{(3)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha v^\beta &= (K_{\mu\beta} K_\nu^\alpha - K_{\nu\beta} K_\mu^\alpha) v^\beta + P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma P_\delta^\alpha P_\beta^\kappa R_{\kappa\lambda\sigma}^\delta v^\beta \rightarrow \\ P_\delta^\alpha P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma &= {}^{(3)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha + K_{\nu\beta} K_\mu^\alpha - K_{\mu\beta} K_\nu^\alpha \end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.8. (Εξίσωση Codazzi-Mainardi) Έστω μια πολλαπλότητα M και μια διαμέριση αυτής σε χωροειδείς υπερεπιφάνειες S_t με μοναδιαίο ορθογώνιο σε αυτές διανυσματικό πεδίο $\vec{\eta}$. Σε κάθε υπερεπιφάνεια ικανοποιείται η εξίσωση:

$$P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda \eta^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu} = D_\beta K_{\alpha\mu} - D_\alpha K_{\beta\mu} \quad (1.5.7)$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι $K_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \eta_\nu + \eta_\mu \eta^\alpha \nabla_\alpha \eta_\nu = -\nabla_\mu \eta_\nu - \eta_\mu a_\nu$.

Επίσης $a^\mu \eta_\mu = \eta_\mu \eta^\nu \nabla_\nu \eta^\mu = 0$, δηλαδή το a^μ είναι χωρικό διάνυσμα.

Επίσης $\gamma_\nu^\mu \eta_\mu = 0$

Λαμβάνοντας υπ όψιν τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$\begin{aligned} D_\beta K_{\alpha\mu} &= \gamma_\beta^\kappa \gamma_\alpha^\delta \gamma_\mu^\lambda \nabla_\kappa K_{\delta\lambda} = \gamma_\beta^\kappa \gamma_\alpha^\delta \gamma_\mu^\lambda \nabla_\kappa (-\nabla_\delta \eta_\lambda - \eta_\delta a_\lambda) = \\ &= -\gamma_\beta^\kappa \gamma_\alpha^\delta \gamma_\mu^\lambda \nabla_\kappa \nabla_\delta \eta_\lambda - \gamma_\beta^\kappa \gamma_\alpha^\delta \gamma_\mu^\lambda \nabla_\kappa \eta_\delta = \\ &= -\gamma_\beta^\kappa \gamma_\alpha^\delta \gamma_\mu^\lambda \nabla_\kappa \nabla_\delta \eta_\lambda - a_\mu K_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

Εναλλάσσοντας τους δείκτες $\beta \leftrightarrow \alpha$ έχουμε:

$$\begin{aligned} D_\alpha K_{\beta\mu} &= -\gamma_\alpha^\kappa \gamma_\beta^\delta \gamma_\mu^\lambda \nabla_\kappa \nabla_\delta \eta_\lambda - a_\mu K_{\alpha\beta} \stackrel{\kappa \leftrightarrow \delta}{=} \\ &= -\gamma_\alpha^\delta \gamma_\beta^\kappa \gamma_\mu^\lambda \nabla_\delta \nabla_\kappa \eta_\lambda - a_\mu K_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

Άρα

$$D_\beta K_{\alpha\mu} - D_\alpha K_{\beta\mu} = \gamma_\alpha^\delta \gamma_\beta^\kappa \gamma_\mu^\lambda (\nabla_\delta \nabla_\kappa - \nabla_\kappa \nabla_\delta) \eta_\lambda = \gamma_\alpha^\delta \gamma_\beta^\kappa \gamma_\mu^\lambda R_{\lambda\nu\delta\kappa} \eta^\nu = \gamma_\alpha^\delta \gamma_\beta^\kappa \gamma_\mu^\lambda R_{\delta\kappa\lambda\nu} \eta^\nu$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη συμμετρία του τανυστή Riemann

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

□

Πρόταση 1.9. (Εξίσωση Ricci) Έστω μια πολλαπλότητα M και μια διαμέριση αυτής σε χωροειδείς υπερεπιφάνειες S_t με μοναδιαίο ορθογώνιο σε αυτές διανυσματικό πεδίο $\vec{\eta}$. Ισχύει η εξίσωση:

$$\eta^d \eta^c \gamma_a^d \gamma_b^c R_{qcrd} = \mathcal{L}_{\vec{\eta}} K_{ab} + \frac{1}{\alpha} D_a D_b \alpha + K_b^c K_{ac} \quad (1.5.8)$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{\eta}} K_{ab} &= \eta^c \nabla_c K_{ab} + K_{cb} \nabla_a \eta^c + K_{ac} \nabla_b \eta^c = \\ &= \eta^c \nabla_c (-\nabla_a \eta_b - \eta_a a_b) - K_{cb} (K_a^c + \eta_a a^c) - K_{ac} (K_b^c + \eta_b a^c) = \\ &= -\eta^c \nabla_c \nabla_a \eta_b - \eta^c \nabla_c (\eta_a a_b) - K_{ca} K_b^c - K_{cb} K_a^c - K_{ca} \eta_b a^c - K_{cb} \eta_a a^c \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} K_a^c K_{cb} + \eta_a a^c K_{cb} &= (\nabla_a \eta^c + \eta_a a^c) (\nabla_c \eta_b + \eta_c a_b) - \eta_a a^c (\nabla_c \eta_b + \eta_c a_b) = \\ &= \nabla_a \eta^c \nabla_c \eta_b + \underbrace{a_b \eta_c \nabla_a \eta_c}_{=0} + \eta_a a^c \nabla_c \eta_b + \eta_a \eta_c a^c a_b - \eta_a a^c \nabla_c \eta_b - \eta_a \eta_c a^c a_b = \\ &= \nabla_a \eta^c \nabla_c \eta_b \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

Από τις 1.5.9, 1.5.10 έχουμε:

$$\eta^c \nabla_a \nabla_c \eta_b = \nabla_a a_b - K_a^c K_{cb} - \eta_a a^c K_{cb} \quad (1.5.11)$$

Από τον ορισμό του τανυστή Riemann ισχύει ότι

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] v^\rho &= R_{\lambda\mu\nu}^\rho v^\lambda \rightarrow [\nabla_\mu, \nabla_\nu] v_\rho = R_{\rho\lambda\mu\nu} v^\lambda \rightarrow [\nabla_\mu, \nabla_\nu] v_\rho = -R_{\lambda\rho\mu\nu} v^\lambda \\ &\rightarrow [\nabla_\nu, \nabla_\mu] v_\rho = R_{\lambda\rho\mu\nu} v^\lambda \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

Οπότε

$$R_{dbac} \eta^d = (\nabla_c \nabla_a - \nabla_a \nabla_c) \eta_b \quad (1.5.13)$$

Από 1.5.9, 1.5.13 έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\bar{\eta}}K_{ab} = & -\eta^d\eta^c R_{dbac} - \eta^c\nabla_a\nabla_c\eta_b - \eta^c a_b\nabla_c\eta_a - \eta^c\eta_a\nabla_c a_b - K_{ca}K_b^c - K_{cb}K_a^c - K_{ca}\eta_b a^c - K_{cb}\eta_a a^c = \\ & -\eta^d\eta^c R_{dbac} - \nabla_a a_b - \eta^c\eta_a\nabla_c a_b - a_a a_b - K_b^c K_{ac} - K_{ca}\eta_b a^c\end{aligned}\quad (1.5.14)$$

λόγω της 1.5.11.

Θα δείξουμε τώρα ότι $\eta^a \mathcal{L}_{\bar{\eta}}K_{ab} = 0$. Έχουμε:

$$\eta^a \mathcal{L}_{\bar{\eta}}K_{ab} = \underbrace{-\eta^d\eta^c\eta^a R_{dbac}}_{0, R_{dbac} = -R_{dbca}} - \eta^a \nabla_a a_b - \underbrace{\eta^c \eta^a \eta_a \nabla_c a_b}_{-1} - \underbrace{\eta^a a_a a_b}_0 = 0$$

Προφανώς λόγω συμμετρίας $\eta^a \mathcal{L}_{\bar{\eta}}K_{ba} = \eta^a \mathcal{L}_{\bar{\eta}}K_{ab} = 0$. Άρα ο τανυστής $\mathcal{L}_{\bar{\eta}}K_{ab}$ είναι χωρικός.

Γενικά για έναν χωρικό τανυστή:

$$\gamma_\nu^\lambda T_{\mu\lambda} = \delta_\nu^\lambda T_{\mu\lambda} + \eta_\nu \underbrace{\eta^\lambda T_{\mu\lambda}}_0 = T_{\mu\nu}$$

$$\gamma_\mu^\lambda T_{\lambda\nu} = \delta_\mu^\lambda T_{\lambda\nu} + \eta_\mu \underbrace{\eta^\lambda T_{\lambda\nu}}_0 = T_{\mu\nu}$$

Παίρνοντας συστολές με τον προβολικό τελεστή στους δύο δείκτες a, b στα δύο μέλη της εξίσωσης 1.5.14 και λαμβάνοντας υπ όψιν ότι $a_\mu, K_{\mu\nu}, \mathcal{L}_{\bar{\eta}}K_{ab}$ χωρικοί και ότι $\gamma_\mu^\lambda \eta_\lambda = 0$ έχουμε:

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}}K_{ab} = -\eta^d\eta^c\gamma_a^q\gamma_b^r R_{drqc} - \underbrace{\gamma_a^q\gamma_b^r \nabla_q a_r}_{D_a a_b} - a_a a_b - K_b^c K_{ac} = \eta^d\eta^c\gamma_a^q\gamma_b^r R_{qcrd} - D_a a_b - a_a a_b - K_b^c K_{ac} \quad (1.5.15)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι:

$$a_a a_b + D_a a_b = \frac{1}{\alpha} D_a D_b \alpha \quad (1.5.16)$$

Υπενθυμίζουμε τη σχέση 1.3.6, $a_a = D_a \ln(\alpha)$. Έχουμε λοιπόν:

$$a_a = D_a \ln \alpha = \frac{1}{\alpha} D_a \alpha \quad (1.5.17)$$

Άρα λοιπόν, πράγματι

$$a_a a_b + D_a a_b = \frac{1}{\alpha^2} D_a \alpha D_b \alpha + D_a \left(\frac{1}{\alpha} D_b \alpha \right) = \frac{1}{\alpha^2} D_a \alpha D_b \alpha - \frac{1}{\alpha^2} D_a \alpha D_b \alpha + \frac{1}{\alpha} D_a D_b \alpha = \frac{1}{\alpha} D_a D_b \alpha$$

Άρα τελικά, από 1.5.15, 1.5.16 έχουμε:

$$\mathcal{L}_{\bar{\eta}}K_{ab} = \eta^d\eta^c\gamma_a^q\gamma_b^r R_{qcrd} - \frac{1}{\alpha} D_a D_b \alpha - K_b^c K_{ac} \quad (1.5.18)$$

□

Κεφάλαιο 2

Εξισώσεις Einstein σε 3+1 μορφή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξάγουμε τις εξισώσεις Einstein στα πλαίσια του φορμαλισμού 3+1 οι οποίες πλέον, όπως θα δούμε, αποτελούν ένα πρόβλημα Cauchy. Το σύνολο των εξισώσεων που θα προκύψουν αποτελείται από δύο κατηγορίες, τις

- Εξισώσεις περιορισμού (constraint equations) οι οποίες είναι εξισώσεις που αφορούν τις υπερεπιφάνειες.
- Εξισώσεις εξέλιξης (Evolution Equations) οι οποίες περιγράφουν την χρονική εξέλιξη του βαρυτικού πεδίου σε υπερεπιφάνειες αυξανόμενου χρόνου.

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, έχουμε ήδη εξάγει τις εξισώσεις εξέλιξης της χωρικής μετρικής χρησιμοποιώντας όμως μόνο γεωμετρικές έννοιες. Η δυναμική του βαρυτικού πεδίου περιέχεται στις εξισώσεις Einstein οπότε από αυτές θα προκύψουν οι υπόλοιπες εξισώσεις εξέλιξης, συγκεκριμένα της εξωγενούς καμπυλότητας.

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι αν διαλέξουμε ένα σύνολο από αρχικά δεδομένα σε κάποια αρχική υπερεπιφάνεια, τα οποία ικανοποιούν τις εξισώσεις περιορισμού, τότε οι λύσεις που προκύπτουν από τις εξισώσεις εξέλιξης θα συνεχίσουν να ικανοποιούν τις εξισώσεις περιορισμού και στις επόμενες υπερεπιφάνειες. Αυτό σημαίνει πως αν έχουμε κάποια συνεπή αρχικά δεδομένα (να ικανοποιούν δηλαδή τις εξισώσεις περιορισμού), μπορούμε να προσδιορίσουμε πλήρως το βαρυτικό πεδίο στο χρόνο μόνο με τις εξισώσεις εξέλιξης, γνωρίζοντας ότι οι υπόλοιπες θα ικανοποιούνται αυτόματα.

Τέλος, έχοντας αυτή τη μορφή των εξισώσεων Einstein, θα δούμε πως μπορούμε να γράψουμε έναν Χαμιλτονιανό φορμαλισμό της γενικής σχετικότητας.

2.1 Εξισώσεις Περιορισμού

Υπενθυμίζουμε τις εξισώσεις Einstein σε τανυστική μορφή

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.1.1)$$

και στην ισοδύναμη μορφή

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (2.1.2)$$

Ξεκινώντας από τον τανυστή Riemann παίρνουμε τις εξής συστολές με τον προβολικό τελεστή:

$$\begin{aligned} P^{\alpha\mu} P^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= (g^{\alpha\mu} + \eta^\alpha \eta^\mu)(g^{\beta\nu} + \eta^\beta \eta^\nu) R_{\alpha\beta\mu\nu} = (g^{\alpha\mu} + \eta^\alpha \eta^\mu)(R_{\alpha\nu\mu}^\nu + \eta^\beta \eta^\nu R_{\alpha\beta\mu\nu}) = \\ &= (g^{\alpha\mu} + \eta^\alpha \eta^\mu)(R_{\alpha\mu} + \eta^\beta \eta^\nu R_{\alpha\beta\mu\nu}) = R + \eta^\alpha \eta^\mu R_{\alpha\mu} + \eta^\beta \eta^\nu R_{\beta\nu} + \eta^\alpha \eta^\beta \eta^\mu \eta^\nu R_{\alpha\beta\mu\nu} = \\ &= R + 2\eta^\mu \eta^\nu R_{\mu\nu} = 2\eta^\mu \eta^\nu G_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Τώρα, θα θεωρήσουμε συστολές σε δύο δείκτες της εξίσωσης Gauss-Codazzi με τον μετρικό τανυστή

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma R_{\delta\kappa\lambda\sigma} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} \rightarrow P^{\alpha\mu} P^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} \quad (2.1.4)$$

όπου $K^2 = K_\mu^\mu$.

Άρα από τις 2.1.3, 2.1.4 έχουμε:

$$2\eta^\mu \eta^\nu G_{\mu\nu} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} \quad (2.1.5)$$

Άρα από την εξίσωση Einstein έχουμε:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \rightarrow {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} = 16\pi\rho \quad (2.1.6)$$

όπου

$$\begin{aligned} \rho &= \eta^\mu \eta^\nu T_{\mu\nu} \\ {}^{(3)}R &= \gamma^{\mu\alpha} {}^{(3)}R_{\alpha\nu\mu} \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο τανυστής Riemann της τρισδιάστατης υπερεπιφάνειας S , ορισμένος στην πολλαπλότητα $M, ({}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}, M)$, ορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να δρά σε διανύσματα εφαπτόμενα στην υπερεπιφάνεια όπως ο $({}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}, S)$ στα αντίστοιχα διανύσματα της υπερεπιφάνειας και να δίνει μηδενικό αποτέλεσμα όταν δρά σε διανύσματα ορθογώνια στην υπερεπιφάνεια. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο σε κάποια διαμέριση, για το οποίο ισχύει ότι $\partial_t = \eta^\mu$, τα μη χωρικά components του $({}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}, M)$ θα είναι 0 και τα χωρικά του components θα δίνονται από τη σχέση 1.5.3 η οποία εξ ορισμού έχει μόνο χωρικές παραγώγους (διότι πρόκειται για τον $({}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}, S)$). Σε αυτή την περίπτωση, λαμβάνοντας υπ όψιν και τη σχέση 1.2.16, διαπιστώνουμε πως ισχύει ότι $({}^{(3)}R, S) = ({}^{(3)}R, M)$ και επειδή το $({}^{(3)}R)$ ως βαθμωτό μέγεθος θα είναι το ίδιο σε κάθε σύστημα συντεταγμένων, διαπιστώνουμε ότι πάντα ισχύει $({}^{(3)}R, M) = ({}^{(3)}R, S)$. Άρα, λοιπόν η έκφραση

$${}^{(3)}R = {}^{(3)}R_M = \gamma^{\mu\alpha} {}^{(3)}R_{\alpha\nu\mu}, \quad \gamma^{\mu\alpha} = (\gamma^{\mu\alpha}, M), \quad {}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}^\alpha = ({}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}^\alpha, M) \quad (2.1.8)$$

θα είναι ίση με την έκφραση

$${}^{(3)}R_S = \gamma^{\mu\alpha} {}^{(3)}R_{\alpha\nu\mu}^\nu, \quad \gamma^{\mu\alpha} = (\gamma^{\mu\alpha}, S), \quad {}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}^\alpha = ({}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}^\alpha, S) \quad (2.1.9)$$

άρα τελικά το $({}^{(3)}R)$ θα έχει μόνο χωρικές παραγώγους. Αυτό ήταν αναμενόμενο διότι ο $({}^{(3)}R_{\lambda\mu\nu}^\alpha)$ είναι ένας χωρικός τανυστής (η πληροφορία που καθορίζει τον τανυστή στην πολλαπλότητα υπάρχει όλη στην υπερεπιφάνεια) οπότε δε μπορεί να εξαρτάται από τιμές μεγεθών εκτός της υπερεπιφάνειας. Άρα λοιπόν αφού η 2.1.6 δεν έχει χρονικές παραγώγους, δεν είναι εξίσωση εξέλιξης, αλλά εξίσωση περιορισμού που πρέπει να ικανοποιείται κάθε χρονική στιγμή, σε κάθε υπερεπιφάνεια.

Αυτή η εξίσωση ονομάζεται **Χαμιλτονιανός/Ενεργειακός περιορισμός (Hamiltonian/Energy constraint)**.

Παίρνουμε τώρα τη συστολή

$$P^{\alpha\mu} \eta^\nu G_{\mu\nu} = P^{\alpha\mu} \eta^\nu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} P^\alpha_\nu \eta^\nu R = P^{\alpha\mu} \eta_\nu R_{\mu\nu} \quad (2.1.10)$$

Από την εξίσωση Codazzi-Mainardi

$$P^\delta_\alpha P^{\beta\kappa} P^{\mu\lambda} \eta^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu} = D^\beta K^\mu_\alpha - D_\alpha K^{\beta\mu} \quad (2.1.11)$$

Παίρνουμε τώρα τη συστολή στους α, μ

$$\begin{aligned} P^\delta_\mu P^{\mu\lambda} P^{\beta\kappa} \eta^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu} &= D^\beta K^\mu_\mu - D_\mu K^{\beta\mu} \rightarrow P^{\delta\lambda} P^{\beta\kappa} \eta^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu} = D^\beta K - D_\mu K^{\beta\mu} \rightarrow \\ P^{\beta\kappa} (g^{\delta\lambda} + \eta^\delta \eta^\lambda) \eta^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu} &= D^\beta K - D_\mu K^{\beta\mu} \rightarrow P^{\beta\kappa} (\eta^\nu R_{\kappa\nu} + \underbrace{\eta^\delta \eta^\lambda \eta^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu}}_0) = D^\beta K - D_\mu K^{\beta\mu} \rightarrow \\ P^{\beta\kappa} \eta^\nu R_{\kappa\nu} &= D^\beta K - D_\mu K^{\beta\mu} \rightarrow P^{\alpha\mu} \eta^\nu R_{\mu\nu} = D^\alpha K - D_\mu K^{\alpha\mu} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Από τις σχέσεις 2.1.10, 2.1.12 έχουμε:

$$\begin{aligned} P^{\alpha\mu} \eta^\nu G_{\mu\nu} &= D^\alpha K - D_\mu K^{\alpha\mu} \rightarrow \gamma^{\alpha\mu} \eta^\nu G_{\mu\nu} = D^\alpha K - D_\mu K^{\alpha\mu} \rightarrow \gamma^{\alpha\mu} \eta^\nu G_{\mu\nu} = \gamma^{\alpha\mu} D_\mu K - D_\mu K^{\alpha\mu} \rightarrow \\ \gamma^{\alpha\mu} \eta^\nu G_{\mu\nu} &= D_\mu \gamma^{\alpha\mu} K - \underbrace{K D_\mu \gamma^{\alpha\mu}}_0 - D_\mu K^{\alpha\mu} \rightarrow \gamma^{\alpha\mu} \eta^\nu G_{\mu\nu} = D_\mu (\gamma^{\alpha\mu} K - K^{\alpha\mu}) \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Λαμβάνοντας υπ όψιν και την εξίσωση Einstein έχουμε τελικά

$$D_\mu (K^{\alpha\mu} - \gamma^{\alpha\mu} K) = 8\pi j^\alpha \quad (2.1.14)$$

όπου

$$j^\alpha = -\gamma^{\alpha\mu}\eta^\nu T_{\mu\nu} \quad (2.1.15)$$

Από τις 1.3.17, 1.3.18 έχουμε ότι τα components του προβολικού τελεστή σε ένα σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο σε κάποια διαμέριση, είναι

$$P_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \eta^\mu \eta_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_j^i \end{pmatrix} \quad (2.1.16)$$

Σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων, το αριστερό μέλος της 2.1.14 γίνεται:

$$\begin{aligned} P_\mu^\kappa P_\lambda^\mu P_\beta^\alpha \nabla_\kappa (K^{\lambda\beta} - \gamma^{\lambda\beta} K) &= P_\mu^\kappa P_\lambda^\mu P_\beta^\alpha [\partial_\kappa (K^{\lambda\beta} - \gamma^{\lambda\beta} K) + \Gamma_{\kappa\rho}^\lambda (K^{\rho\beta} - \gamma^{\rho\beta} K) + \Gamma_{\kappa\rho}^\beta (K^{\lambda\rho} - \gamma^{\lambda\rho} K)] = \\ &P_\lambda^\kappa P_\beta^\alpha [\partial_\kappa (K^{\lambda\beta} - \gamma^{\lambda\beta} K) + \Gamma_{\kappa\rho}^\lambda (K^{\rho\beta} - \gamma^{\rho\beta} K) + \Gamma_{\kappa\rho}^\beta (K^{\lambda\rho} - \gamma^{\lambda\rho} K)] \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

όπου

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \gamma^{\rho\sigma} (\partial_\mu \gamma_{\nu\sigma} + \partial_\nu \gamma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \gamma_{\mu\nu}) \quad (2.1.18)$$

Από τις σχέσεις 1.3.24, 2.1.16 διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω έκφραση δεν περιέχει χρονικές παραγώγους της χωρικής μετρικής και της εξωγενούς καμπυλότητας. Αυτό ήταν αναμενόμενο, διότι ο $D_\mu (K^{\alpha\mu} - \gamma^{\alpha\mu} K)$ είναι ένας χωρικός ταυστής. Ως χωρικός ταυστής μπορεί να οριστεί και στην υπερεπιφάνεια (η υπερεπιφάνεια περιέχει όλη την πληροφορία που απαιτείται για να οριστεί ο ταυστής στην πολλαπλότητα) οπότε δε μπορεί να εξαρτάται από τιμές μεγεθών εκτός της υπερεπιφάνειας, άρα τα components του σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων, δε μπορεί να περιέχουν χρονικές παραγώγους. Οπότε λοιπόν, όπως και πριν, αφού δεν υπάρχουν χρονικές παράγωγοι στις εξισώσεις 2.1.14, δεν είναι εξισώσεις εξέλιξης αλλά εξισώσεις περιορισμού. Αυτές οι εξισώσεις ονομάζονται **Εξισώσεις περιορισμού της ορμής (momentum constraints)**.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι στον φορμαλισμό 3+1 έχουμε 12 δυναμικές ποσότητες $\gamma_{ij}(t, \vec{x})$, $K_{ij}(t, \vec{x})$. Οι αρχικές τιμές τους σε κάποια υπερεπιφάνεια (αρχικές συνθήκες) δεν μπορούν να προσδιοριστούν αυθαίρετα διότι πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις περιορισμού.

$$\text{Ερμηνεία των } \rho = \eta^\mu \eta^\nu T_{\mu\nu}, j^i = -P^{i\mu} \eta^\nu T_{\mu\nu}$$

Όπως έχουμε πει το η^μ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη ενός κανονικού παρατηρητή, είναι δηλαδή η 4-ταχύτητα του. Άρα λοιπόν στο σύστημα συντεταγμένων ενός κανονικού παρατηρητή θα είναι

$$\eta^\mu = (1, 0, 0, 0)$$

Δηλαδή, το σύστημα συντεταγμένων ενός κανονικού παρατηρητή ταυτίζεται με το σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο σε κάποια διαμέριση με

$$\partial_t = \eta^\mu$$

Σε αυτή την περίπτωση προφανώς ισχύει $\alpha = 1$, $\beta^i = 0$. Άρα λοιπόν

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \gamma^{ij} \end{pmatrix}$$

Οπότε

- $\rho = T_{00} = g_{0\alpha} g_{0\beta} T^{\alpha\beta} = T^{00}$
είναι δηλαδή η πυκνότητα ενέργειας που αντιλαμβάνεται ένας κανονικός παρατηρητής
- $j^i = -P^{i\mu} T_{\mu 0} = -g^{i\mu} T_{\mu 0} = -T_0^i = -g_{0\alpha} T^{i\alpha} = T^{i0}$
είναι δηλαδή η πυκνότητα ορμής στη διεύθυνση i που αντιλαμβάνεται ένας κανονικός παρατηρητής.

2.2 Εξισώσεις Εξέλιξης

Τα Hamiltonian/momentum constraints αντιστοιχούν σε 4 από τις εξισώσεις Einstein. Οι εξισώσεις εξέλιξης του K_{ij} που αναζητούμε θα προέλθουν από τις υπόλοιπες εξισώσεις Einstein.

Στις εξισώσεις Gauss-Codazzi, Codazzi-Mainardi θεωρήσαμε τις εξής συστολές με τον τανυστή Riemann

$$\gamma_\alpha^\delta \gamma_\beta^\kappa \gamma_\mu^\lambda \gamma_\nu^\sigma R_{\delta\kappa\lambda\sigma} = {}^{(3)}R_{\alpha\beta\mu\nu} + K_{\alpha\mu}K_{\beta\nu} - K_{\alpha\nu}K_{\beta\mu}$$

$$\gamma_\alpha^\delta \gamma_\beta^\kappa \gamma_\mu^\lambda \eta^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu} = D_\beta K_{\alpha\mu} - D_\alpha K_{\beta\mu}$$

Αυτές οι εξισώσεις περιορίζουν τις τιμές που μπορεί να πάρει ο τανυστής Riemann δεδομένων των μεγεθών $K_{\alpha\beta}$, ${}^{(3)}R_{\alpha\beta\mu\nu}$ που χαρακτηρίζουν τις υπερεπιφάνειες. Αυτό είναι αναμενόμενο, διότι η καμπυλότητα στην πολλαπλότητα θα εξαρτάται σε ένα βαθμό από την εσωτερική και εξωγενή καμπυλότητα των υπερεπιφανειών. Όμως επειδή οι υπερεπιφάνειες αποτελούν 3-διάστατες υποπολλαπλότητες δεν θα είναι δυνατό να προσδιοριστεί πλήρως ο τανυστής Riemann από τις παραπάνω εξισώσεις (διότι περιέχουν πληροφορίες που αφορούν μόνο τις υποπολλαπλότητες). Πράγματι, όπως θα δούμε, οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν μόνο 14 από τα 20 ανεξάρτητα components του τανυστή Riemann.

Ανεξάρτητα components του τανυστή Riemann

Συμμετρίες Riemann

1. $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$ Ισοδύναμα $R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2}(R_{\rho\sigma\mu\nu} - R_{\rho\sigma\nu\mu}) = R_{\rho\sigma[\mu\nu]}$
2. $R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0$
3. $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \Leftrightarrow R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{[\rho\sigma]\mu\nu}$
4. $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} R_{\rho[\mu\nu\sigma]} = 0 &\rightarrow \frac{1}{3!}(R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\nu\sigma\mu} - R_{\rho\mu\sigma\nu} - R_{\rho\sigma\nu\mu} - R_{\rho\nu\mu\sigma}) = 0 \\ &\rightarrow 2R_{\rho\mu\nu\sigma} + 2R_{\rho\sigma\mu\nu} + 2R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 \\ &\rightarrow R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

ομοίως

$$R_{\sigma[\rho\mu\nu]} = 0 \rightarrow R_{\sigma\rho\mu\nu} + R_{\sigma\nu\rho\mu} + R_{\sigma\mu\nu\rho} = 0 \quad (2.2.2)$$

Από 2.2.1, 2.2.2 έχουμε

$$R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} + R_{\sigma\nu\rho\mu} + R_{\sigma\mu\nu\rho} = 0 \quad (2.2.3)$$

ομοίως

$$\left. \begin{aligned} R_{\mu[\nu\sigma\rho]} = 0 &\rightarrow R_{\mu\nu\sigma\rho} + R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_{\mu\sigma\rho\nu} = 0 \\ R_{\nu[\sigma\rho\mu]} = 0 &\rightarrow R_{\nu\sigma\rho\mu} + R_{\nu\rho\sigma\mu} + R_{\nu\mu\sigma\rho} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_{\mu\sigma\rho\nu} + R_{\nu\sigma\rho\mu} + R_{\nu\rho\sigma\mu} = 0 \rightarrow R_{\rho\nu\sigma\mu} - R_{\sigma\mu\rho\nu} = 0 \rightarrow R_{\rho\nu\sigma\mu} = R_{\sigma\mu\rho\nu} \quad (2.2.4)$$

$$\text{Από 2.2.3, 2.2.4} \rightarrow 2R_{\rho\nu\sigma\mu} + 2R_{\sigma\mu\rho\nu} = 0 \rightarrow R_{\rho\nu\sigma\mu} - R_{\sigma\mu\rho\nu} = 0 \rightarrow R_{\rho\nu\sigma\mu} = R_{\sigma\mu\rho\nu} \quad \square$$

5. $R_{[\rho\sigma\mu\nu]} = 0$

όπως και η (4), αποδυναμώνεται με τη χρήση των συμμετριών (1), (2), (3).

Αυτό σημαίνει ότι μόνο οι (1), (2), (3) είναι ανεξάρτητες συμμετρίες. Χρησιμοποιώντας αυτές, θα βρούμε το πλήθος των ανεξάρτητων components του τανυστή Riemann.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι έχουμε μια n-διάστατη πολλαπλότητα.

$$(1),(3) \rightarrow R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{[\mu\nu][\rho\sigma]}$$

$\mu : n$ τιμές

$\nu : n - 1$ τιμές διότι αν $\mu = \nu \rightarrow R_{[\mu\nu][\rho\sigma]} = 0$

όμοια

$\rho : n$ τιμές

$\sigma : n - 1$ τιμές

Παρατηρούμε όμως ότι για ένα component $R_{\mu\nu\rho\sigma}$

$$R_{\nu\mu\rho\sigma} = R_{[\nu\mu][\rho\sigma]} = -R_{[\mu\nu][\rho\sigma]} = -R_{\mu\nu\rho\sigma}$$

δηλαδή αν θεωρήσουμε ανεξάρτητο το $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, το $R_{\nu\mu\rho\sigma}$ δεν είναι ανεξάρτητο. Το ίδιο ισχύει και για τα $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}(R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\rho\sigma})$.

Άρα, επειδή σε κάθε καταμέτρηση μ, ν, ρ, σ έχουμε συμπεριλάβει και τα στοιχεία που δεν είναι ανεξάρτητα πρέπει να διαιρέσουμε δια 2. Οπότε μέχρι στιγμής έχουμε βρει

$$\frac{n(n-1)}{2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

ανεξάρτητα στοιχεία.

$$R_{\mu[\nu\rho\sigma]} = 0$$

$\mu : n$ τιμές

Αν δύο δείκτες εκ των ν, ρ, σ πάρουν ίδια τιμή θα είναι $R_{\mu[\nu\rho\sigma]} = 0$ ταυτοτικά. Άρα για κάθε τιμή του ν , ο ρ θα παίρνει $n-1$ τιμές και ο σ $n-2$ τιμές.

Σύνολο $n(n-1)(n-2)$ τιμές

Έστω l μια μετάθεση των ν, ρ, σ

$$l = \begin{pmatrix} \nu & \rho & \sigma \\ l(\nu) & l(\rho) & l(\sigma) \end{pmatrix}$$

$$R_{\mu[\nu\rho\sigma]} = \frac{1}{3!} \sum_s \text{sign}(s) R_{\mu s(\nu)s(\rho)s(\sigma)} = \frac{1}{3!} \sum_{s \cdot l} \text{sign}(sl) R_{\mu s(l(\nu))s(l(\rho))s(l(\sigma))}$$

αθροίζοντας στο s , πάλι περιλαμβάνουμε όλες τις μεταθέσεις των ν, ρ, σ , άρα η παραπάνω έκφραση ισούται με

$$\frac{1}{3!} \text{sign}(l) \sum_s \text{sign}(s) R_{\mu s(l(\nu))s(l(\rho))s(l(\sigma))} = \text{sign}(l) R_{\mu[l(\nu)]s(l(\rho))s(l(\sigma))} \rightarrow R_{\mu[\nu\rho\sigma]} = \text{sign}(l) R_{\mu[l(\nu)l(\rho)l(\sigma)]}$$

οπότε οι εξισώσεις $R_{\mu[\nu\rho\sigma]} = 0$, $R_{\mu[l(\nu)l(\rho)l(\sigma)]} = 0$ είναι ίδιες για κάθε μετάθεση l των ν, ρ, σ

Στην παραπάνω καταμέτρηση έχουμε συμπεριλάβει, για κάθε 3άδα τιμών που παίρνουν τα ν, ρ, σ όλες τις πιθανές μεταθέσεις που όπως είδαμε αντιστοιχούν στην ίδια εξίσωση. Οπότε πρέπει να διαιρέσουμε με $3!$. Άρα εν τέλει θα έχουμε

$$n \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

ανεξάρτητες εξισώσεις.

Οπότε εν τέλει έχουμε

$$\frac{n^2(n-1)^2}{4} - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

ανεξάρτητα components.

- 1ο μέρος εξίσωσης Gauss-Codazzi

$$\gamma_\alpha^\delta \gamma_\beta^\kappa \gamma_\mu^\lambda \gamma_\nu^\sigma R_{\delta\kappa\lambda\sigma}$$

Περιλαμβάνει μόνο τα components του τανυστή Riemann με χωρικούς δείκτες

$\delta, \kappa, \lambda, \sigma = 1-3$ διότι $\gamma_\mu^0 = 0$. Γράφουμε:

$$\gamma_\alpha^\delta \gamma_\beta^\kappa \gamma_\mu^\lambda \gamma_\nu^\sigma R_{\delta\kappa\lambda\sigma} = \gamma_\alpha^i \gamma_\beta^j \gamma_\mu^k \gamma_\nu^l R_{ijkl}$$

Με βάση τις συμμετρίες

$$R_{ijkl} = R_{[ij][kl]} \\ R_{i[jkl]} = 0$$

προσδιορίζονται όλα τα ανεξάρτητα components του τανυστή Riemann με χωρικούς δείκτες.

Με βάση την ανάλυση που κάναμε προηγουμένως σχετικά με τα ανεξάρτητα components του τανυστή Riemann έχουμε

$$\frac{3^2(3^2 - 1)}{12} = 6$$

ανεξάρτητα components με χωρικούς δείκτες (από τα 20 ολόκληρου του τανυστή).

- 1ο μέρος εξίσωσης Codazzi-Mainardi

$$\gamma_\alpha^\delta \gamma_\beta^\kappa \gamma_\mu^\lambda \eta^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu}$$

Έστω ένα σύστημα συντεταγμένων ώστε $\partial_t = \eta^\mu$

$$\text{Τότε } \gamma_\alpha^\delta \gamma_\beta^\kappa \gamma_\mu^\lambda \eta^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu} = \gamma_\alpha^i \gamma_\beta^j \gamma_\mu^\kappa R_{ijk0} = -\gamma_\alpha^i \gamma_\beta^j \gamma_\mu^\kappa R_{0kij}$$

Από αυτές τις εξισώσεις λοιπόν προσδιορίζονται όλα τα ανεξάρτητα components του τανυστή Riemann με έναν χρονικό δείκτη.

Με βάση τις συμμετρίες

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= R_{[\mu\nu][\rho\sigma]} \\ R_{\mu[\nu\rho\sigma]} &= 0 \end{aligned}$$

και με τον περιορισμό ότι 3 από τους δείκτες είναι χωρικοί και ένας χρονικός, έχουμε ότι

- 1η συμμετρία

- 1η περίπτωση : μ ή $\nu = 0$
- 2η περίπτωση : ρ ή $\sigma = 0$

$$\frac{3 \cdot (3-1)}{2} \cdot 3 + \frac{3 \cdot (3-1)}{2} \cdot 3 = 18 \text{ ανεξάρτητα components}$$

- 2η συμμετρία

- 1η περίπτωση : $\mu=0$
- 2η περίπτωση : ν ή ρ ή $\sigma = 0$

$$1 \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} + 3 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 1 + 9 = 10 \text{ ανεξάρτητες εξισώσεις}$$

άρα τελικά έχουμε $18 - 10 = 8$ ανεξάρτητα components με έναν χρονικό δείκτη.

Άρα λοιπόν από τις εξισώσεις Gauss-Codazzi, Codazzi-Mainardi προσδιορίζονται $6 + 8 = 14$ από τα 20 ανεξάρτητα components του τανυστή Riemann. Απομένουν τα ανεξάρτητα components με δύο χρονικούς δείκτες. Οι χρονικοί δείκτες πρέπει να τοποθετηθούν ως εξής, ένας στα πρώτα 2 inputs και ένας στα άλλα 2, αλλιώς τα components θα μηδενίζονται.

(Προφανώς δεν υπάρχει μη μηδενικό component με 3 ή 4 χρονικούς δείκτες)

Αναμένουμε να βρούμε $20 - 6 - 8 = 6$ τέτοια ανεξάρτητα components. Πράγματι, θα αποδείξουμε ότι είναι όντως τόσα.

Θεωρούμε πάλι τις συμμετρίες:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= R_{[\mu\nu][\rho\sigma]} \\ R_{\mu[\nu\rho\sigma]} &= 0 \end{aligned}$$

όπου μ ή $\nu=0$, ρ ή $\sigma=0$ και με τους υπόλοιπους δείκτες να είναι χωρικοί.

1η συμμετρία

$$3 \cdot 3 = 9 \text{ ανεξάρτητα components}$$

2η συμμετρία

- $\nu = 0 \rightarrow R_{\mu[\nu\rho\sigma]} = 0$
- $\mu = 0 \rightarrow 1 \cdot \frac{3-2}{2} = 3$ ανεξάρτητες εξισώσεις

άρα εν τέλει έχουμε $9 - 3 = 6$ ανεξάρτητα components με 2 χρονικούς δείκτες όπως αναμέναμε.

Να υπενθυμίσουμε ότι ο στόχος μας είναι να γράψουμε μια εξίσωση χρονικής εξέλιξης για το $K_{\mu\nu}$. Όπως είπαμε και προηγουμένως, οι 4 από τις 10 εξισώσεις Einstein έχουν οδηγήσει στα Hamiltonian/Momentum constraints οπότε ότι οι εξισώσεις εξέλιξης για το $K_{\mu\nu}$ θα προέλθουν από τις υπόλοιπες. Όπως είδαμε, στις εξισώσεις Gauss-Codazzi, Codazzi-Mainardi από τις οποίες προέρχονται τα constraints, περιέχονται components του τανυστή Riemann είτε μόνο με χωρικούς δείκτες, είτε με έναν μόνο χρονικό δείκτη. Για να εμφανίσουμε λοιπόν και τις υπόλοιπες εξισώσεις Einstein θα πρέπει να γράψουμε μια τανυστική εξίσωση όπου θα περιέχονται τα υπόλοιπα ανεξάρτητα components του τανυστή Riemann, δηλαδή αυτά με 2 χρονικούς δείκτες. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να πάρουμε και δεύτερη φορά τη συστολή του τανυστή Riemann με το η^μ .

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa \eta^\lambda \eta^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma}$$

Όπως είπαμε και προηγουμένως, σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων με $\partial_t = \eta^\mu$

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa \eta^\lambda \eta^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} = P_\mu^i P_\nu^j R_{i0j0}$$

Από την τανυστική εξίσωση Ricci έχουμε ότι

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa \eta^\lambda \eta^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} = \mathcal{L}_{\vec{\eta}} K_{\mu\nu} + K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda + \frac{1}{\alpha} D_\mu D_\nu \alpha \quad (2.2.5)$$

Παρατηρούμε ότι

- Περιλαμβάνεται στις εξισώσεις η συνάρτηση μετάβασης α
- Περιλαμβάνεται η παράγωγος Lie του $K_{\mu\nu}$ ως προς το ορθογώνιο στις υπερεπιφάνειες διανυσματικό πεδίο $\vec{\eta}$ το οποίο αντιστοιχεί σε εξέλιξη ως προς το χρόνο.

Πράγματι, από τον ορισμό της παραγώγου Lie

$$\mathcal{L}_{\vec{\eta}} K_{\mu\nu} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (\phi^* K_{\mu\nu} - K_{\mu\nu})$$

$\phi^* K_{\mu\nu} \rightarrow$ pullback του $K_{\mu\nu}$ επόμενης χρονικής στιγμής

Πιο συγκεκριμένα

$$\mathcal{L}_{\vec{\eta}} = \eta^\alpha \underbrace{\partial_\alpha K_{\mu\nu}}_{\partial_t K_{\mu\nu} + \dots} + K_{\rho\nu} \partial_\mu \eta^\rho + K_{\mu\rho} \partial_\nu \eta^\rho$$

Πρόταση 2.1. Έστω μια πολλαπλότητα M και μια διαμέριση αυτής σε χωροειδείς υπερεπιφάνειες S_t με μοναδιαίο ορθογώνιο σε αυτές διανυσματικό πεδίο $\vec{\eta}$. Σε κάθε υπερεπιφάνεια ικανοποιείται η εξίσωση:

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa (\eta^\lambda \eta^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} + R_{\delta\kappa}) = {}^{(3)}R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda \quad (2.2.6)$$

Απόδειξη. Gauss-Codazzi έχουμε

$$\begin{aligned} P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma R_{\delta\kappa\lambda\sigma} &= {}^{(3)}R_{\alpha\beta\mu\nu} + K_{\alpha\mu} K_{\beta\nu} - K_{\alpha\nu} K_{\beta\mu} \rightarrow \\ P_\beta^\kappa P_\nu^\sigma P_\mu^\lambda P_\alpha^\delta R_{\delta\kappa\lambda\sigma} &= {}^{(3)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha + K_\mu^\alpha K_{\beta\nu} - K_\nu^\alpha K_{\beta\mu} \end{aligned}$$

Θεωρώντας τη συστολή στους δείκτες α, μ και λαμβάνοντας υπ όψιν ότι

$$\begin{aligned} P_\beta^\kappa P_\nu^\sigma (g^{\lambda\delta} + \eta^\lambda \eta^\delta) R_{\delta\kappa\lambda\sigma} &= {}^{(3)}R_{\beta\nu} + K K_{\beta\nu} - K_\nu^\lambda K_{\beta\lambda} \rightarrow \\ P_\beta^\kappa P_\nu^\sigma (R_{\kappa\sigma} + \eta^\lambda \eta^\delta R_{\kappa\delta\sigma\lambda}) &= {}^{(3)}R_{\beta\nu} + K K_{\beta\nu} - K_\nu^\lambda K_{\beta\lambda} \rightarrow \\ P_\mu^\delta P_\nu^\kappa (R_{\delta\kappa} + \eta^\lambda \eta^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma}) &= {}^{(3)}R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - K_\nu^\lambda K_{\mu\lambda} \end{aligned}$$

□

Αν συνδυάσουμε την 2.2.6 με την εξίσωση Ricci και λαμβάνοντας υπ όψιν επίσης ότι

$$\mathcal{L}_{\vec{\eta}} K_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\frac{1}{\alpha}(\vec{t}-\vec{\beta})} K_{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}_{\vec{t}-\vec{\beta}} K_{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha} (\mathcal{L}_{\vec{t}} K_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{\mu\nu}) \quad (2.2.7)$$

έχουμε ότι

$$\mathcal{L}_{\vec{t}} K_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{\mu\nu} = -D_\mu D_\nu \alpha + \alpha (-P_\mu^\delta P_\nu^\kappa R_{\delta\kappa} + {}^{(3)}R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda) \quad (2.2.8)$$

Υπενθυμίζουμε την εξίσωση Einstein

$$R_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)$$

Συνδυάζοντας την με την 2.2.8 καταλήγουμε τελικά στην εξίσωση:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{t}} K_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{\mu\nu} &= -D_\mu D_\nu \alpha + \alpha({}^{(3)}R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda) + 4\pi\alpha(P_\mu^\delta P_{\delta\nu} T - 2P_\mu^\delta P_\nu^\kappa T_{\delta\kappa}) \rightarrow \\ \partial_t K_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{\mu\nu} &= -D_\mu D_\nu \alpha + \alpha({}^{(3)}R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda) + 4\pi\alpha(P_\mu^\delta P_{\delta\nu} T - 2P_\mu^\delta P_\nu^\kappa T_{\delta\kappa}) \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Ορίζουμε τον τανυστή

$$S_{\mu\nu} = P_\mu^\alpha P_\nu^\beta T_{\alpha\beta} \quad (2.2.10)$$

Βρίσκουμε ότι

$$S = S_\mu^\mu = P^{\mu\alpha} P_\mu^\beta T_{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = (g^{\alpha\beta} + \eta^\alpha \eta^\beta) T_{\alpha\beta} = T_\beta^\beta + \eta^\alpha \eta^\beta T_{\alpha\beta} \rightarrow T = S - \rho \quad (2.2.11)$$

Από τις 2.2.9, 2.2.10, 2.2.11 καταλήγουμε τελικά στην εξίσωση(περιοριζόμενοι πάλι στα χωρικά components)

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{ij} &= -D_i D_j \alpha + \alpha[{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k] + 4\pi\alpha[\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}] \rightarrow \\ \partial_t K_{ij} &= \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha + \alpha[{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k] + \\ &4\pi\alpha[\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}] \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Περιοριστήκαμε μόνο στα χωρικά components διότι τα χρονικά δεν είναι ανεξάρτητα. Συγκεκριμένα, επειδή πρόκειται για χωρικό τανυστή, ισχύει προφανώς

$$K_{\mu\nu} \eta^\mu = K_{\mu\nu} \eta^\nu = 0$$

οπότε τα χρονικά components, είναι συνάρτηση των χωρικών(το $\eta^\mu = (\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^i}{\alpha})$ εξαρτάται από τις συναρτήσεις βαθμίδας α, β^i οι οποίες επιλέγονται ελεύθερα αντιπροσωπεύοντας την ελευθερία που έχουμε ως προς την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων).

Αυτές οι εξισώσεις ονομάζονται **ADM-εξισώσεις εξέλιξης(ADM-evolution equations)**[22] και δίνουν τη χρονική εξέλιξη των 6 ανεξάρτητων components του τανυστή εξωγενούς καμπυλότητας. Οπότε, σε συνδυασμό με τις εξισώσεις που αφορούν τη χρονική εξέλιξη της χωρικής μετρικής, έχουμε γράψει εν τέλει τις εξισώσεις Einstein ως πρόβλημα Cauchy. Επιλέγοντας ένα σύνολο αρχικών δεδομένων, οι εξισώσεις εξέλιξης δίνουν τις λύσεις για κάθε χρονική στιγμή. Τα αρχικά δεδομένα γ_{ij}, K_{ij} πρέπει να ικανοποιούν φυσικά τις εξισώσεις περιορισμού.

Να παρατηρήσουμε ότι δεν υπάρχουν εξισώσεις εξέλιξης για τα α, β^i το οποίο είναι λογικό και αναμενόμενο, αφού οι ποσότητες αυτές μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα αντιπροσωπεύοντας την ελευθερία που έχουμε στην επιλογή συστήματος συντεταγμένων.

Απομένει ωστόσο μια εκρεμότητα. Είπαμε ότι ολοκληρώθηκε η μοντελοποίηση του προβλήματος ως πρόβλημα Cauchy. Επιλέγουμε λοιπόν ένα σύνολο από αρχικά δεδομένα γ_{ij}, K_{ij} σε κάποια αρχική υπερεπιφάνεια, για κάποια χρονική στιγμή τα οποία ικανοποιούν τις εξισώσεις περιορισμού και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις εξέλιξης για να βρούμε τις τιμές τους για επόμενες χρονικές στιγμές. Αυτή η μοντελοποίηση του προβλήματος είναι ιδανική για να εφαρμοστεί σε αριθμητικούς υπολογισμούς. Ωστόσο παραμένει αναπάντητο το ερώτημα κατά πόσο οι λύσεις που προκύπτουν από τις εξισώσεις εξέλιξης συνεχίζουν να ικανοποιούν τις εξισώσεις περιορισμού και στις επόμενες υπερεπιφάνειες, πράγμα που θα έπρεπε για να είναι φυσικά αποδεκτές. Το μόνο που γνωρίζουμε μέχρι στιγμής είναι ότι οι εξισώσεις περιορισμού ικανοποιούνται μόνο στην αρχική υπερεπιφάνεια $t = 0$. Η απάντηση στο ερώτημα, όπως θα αποδείξουμε αμέσως, είναι πως συνεχίζουν να ικανοποιούνται οι εξισώσεις περιορισμού[12]. Έχουμε λοιπόν το θεώρημα

Θεώρημα 2.1. Έστω μια διαμέριση του χωροχρόνου, μια υπερεπιφάνεια S_0 και ένα σύνολο από αρχικά δεδομένα γ_{ij} , K_{ij} ορισμένα σε αυτή. Αν τα αρχικά δεδομένα ικανοποιούν τις εξισώσεις περιορισμού, τότε οι λύσεις που προκύπτουν από τις εξισώσεις εξέλιξης, με αυτά ως αρχικά δεδομένα, συνεχίζουν να ικανοποιούν τις εξισώσεις περιορισμού σε κάθε υπερεπιφάνεια.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις ακόλουθες προβολές στις εξισώσεις Einstein

$$\begin{aligned} H &= \eta^\alpha \eta^\beta G_{\alpha\beta} - 8\pi\rho & \rho &= \eta^\mu \eta^\nu T_{\mu\nu} \\ M_\mu &= -\eta^\alpha P_\mu^\beta G_{\alpha\beta} & j^i &= -P^{i\mu} \eta^\nu T_{\mu\nu} \\ E &= P_\mu^\alpha P_\nu^\beta G_{\alpha\beta} - 8\pi S_{\mu\nu} & S_{\mu\nu} &= P_\mu^\alpha P_\nu^\beta T_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $H = 0$ αντιστοιχεί στο Hamiltonian constraint και οι εξισώσεις $M_\mu = 0$ στα momentum constraints. Αυτό είναι προφανές αν λάβουμε υπ όψιν τις εξισώσεις 2.1.5, 2.1.13.

Τέλος, η εξίσωση $E_{\mu\nu} = 0$ αντιστοιχεί στις ADM evolution equations. Πράγματι, από την Gauss-Codazzi 1.5.1 αν πάρουμε τη συστολή στους δείκτες α, μ έχουμε

$$\begin{aligned} P_\delta^\lambda P_\beta^\kappa P_\nu^\sigma R_{\kappa\lambda\sigma} &= {}^{(3)}R_{\beta\nu} + KK_{\nu\beta} - K_{\mu\beta} K_\nu^\mu \rightarrow P^{\lambda\delta} P_\beta^\kappa P_\nu^\sigma R_{\delta\kappa\lambda\sigma} = {}^{(3)}R_{\beta\nu} + KK_{\nu\beta} - K_{\mu\beta} K_\nu^\mu \rightarrow \\ P_\beta^\kappa P_\nu^\sigma R_{\kappa\sigma} + \eta^\lambda \eta^\delta P_\beta^\kappa P_\nu^\sigma R_{\delta\kappa\lambda\sigma} &= {}^{(3)}R_{\beta\nu} + KK_{\nu\beta} - K_{\mu\beta} K_\nu^\mu \rightarrow \\ P_\beta^\kappa P_\nu^\sigma R_{\kappa\sigma} &= {}^{(3)}R_{\beta\nu} + KK_{\nu\beta} - K_{\mu\beta} K_\nu^\mu - \eta^\lambda \eta^\delta P_\beta^\kappa P_\nu^\sigma R_{\delta\kappa\lambda\sigma} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Άρα λοιπόν:

$$\begin{aligned} P_\mu^\alpha P_\nu^\beta G_{\alpha\beta} &= P_\mu^\alpha P_\nu^\beta (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R) = -\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R + {}^{(3)}R_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} - K_{\mu\lambda}K_\nu^\lambda - P_\mu^\delta P_\nu^\kappa \eta^\lambda \eta^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} = \\ &= -\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R + {}^{(3)}R_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} - K_{\mu\lambda}K_\nu^\lambda - \mathcal{L}_{\vec{\eta}}K_{\mu\nu} - K_{\mu\lambda}K_\nu^\lambda - \frac{1}{\alpha}D_\mu D_\nu \alpha = \\ &= -\mathcal{L}_{\vec{\eta}}K_{\mu\nu} - \frac{1}{\alpha}D_\mu D_\nu \alpha + {}^{(3)}R_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda}K_\nu^\lambda + 4\pi T\gamma_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Οπότε τελικά

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} = 0 \rightarrow P_\mu^\alpha P_\nu^\beta G_{\alpha\beta} - 8\pi S_{\mu\nu} = 0 &\rightarrow \alpha \mathcal{L}_{\vec{\eta}}K_{\mu\nu} = -D_\mu D_\nu \alpha + \alpha[{}^{(3)}R_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda}K_\nu^\lambda] + \\ &4\pi\alpha[T\gamma_{\mu\nu} - 2S_{\mu\nu}] \rightarrow \\ \mathcal{L}_{\vec{\tau}}K_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}K_{\mu\nu} &= -D_\mu D_\nu \alpha + \alpha[{}^{(3)}R_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda}K_\nu^\lambda] + 4\pi\alpha[T\gamma_{\mu\nu} - 2S_{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Τώρα θα γράψουμε την εξίσωση Einstein σε όρους των $H, M_\mu, E_{\mu\nu}$. Χρησιμοποιώντας την σχέση 1.4.7 έχουμε :

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu} &= P_\mu^\alpha P_\nu^\beta (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) - \eta_\mu \eta^\beta P_\mu^\alpha (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) - \eta_\mu \eta^\alpha P_\nu^\beta S_{\alpha\beta} (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) + \\ &\eta_\mu \eta_\nu \eta^\alpha \eta^\beta (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = \\ E_{\mu\nu} + 8\pi S_{\mu\nu} - 8\pi S_{\mu\nu} + \eta_\nu (M_\mu + 8\pi j_\mu - 8\pi j_\mu) &+ \eta_\mu (M_\nu + 8\pi j_\nu - 8\pi j_\nu) + \\ \eta_\mu \eta_\nu (H + 8\pi\rho - 8\pi\rho) &= \\ E_{\mu\nu} + \eta_\nu M_\mu + \eta_\mu M_\nu + \eta_\mu \eta_\nu H & \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Άρα η εξίσωση Einstein θα γράφεται

$$E_{\mu\nu} + \eta_\nu M_\mu + \eta_\mu M_\nu + \eta_\mu \eta_\nu H = 0 \quad (2.2.17)$$

Οπότε από τις ταυτότητες Bianchi

$$\begin{aligned}
& \nabla^\mu (E_{\mu\nu} + \eta_\mu M_\nu + \eta_\nu M_\mu + \eta_\mu \eta_\nu H) = 0 \rightarrow \\
& \eta^\nu (\nabla^\mu E_{\mu\nu} + \nabla^\mu (\eta_\mu M_\nu) + \nabla^\mu (\eta_\mu \eta_\nu H)) = 0 \rightarrow \\
& \eta^\nu \nabla^\mu E_{\mu\nu} + \eta^\nu \nabla^\mu (\eta_\mu M_\nu) + \eta^\nu \nabla^\mu (\eta_\mu \eta_\nu H) = 0 \rightarrow \\
& \underbrace{\nabla^\mu (\eta^\nu E_{\mu\nu})}_0 - E_{\mu\nu} \nabla^\mu \eta^\nu + \eta^\nu \eta_\mu \nabla^\mu M_\nu + \underbrace{\eta^\nu M_\nu \nabla^\mu \eta_\mu}_0 - \nabla^\mu M_\mu + \underbrace{\eta^\nu M_\mu \nabla^\mu \eta_\nu}_0 - \eta_\mu \nabla^\mu H + \\
& \eta^\nu H \nabla^\mu (\eta_\mu \eta_\nu) = 0 \rightarrow \\
& - E_{\mu\nu} \nabla^\mu \eta^\nu + \eta_\mu \nabla^\mu (\underbrace{M_\nu \eta^\nu}_0) - \eta_\mu M_\nu \nabla^\mu \eta^\nu - \nabla^\mu M_\mu + \eta^\nu H \nabla^\mu (\eta_\mu \eta_\nu) = \eta_\mu \nabla^\mu H \rightarrow \\
& - E_{\mu\nu} \nabla^\mu \eta^\nu - \eta_\mu M_\nu \nabla^\mu \eta^\nu - \nabla^\mu M_\mu - H \nabla^\mu \eta_\mu + \underbrace{\eta^\nu \eta_\mu H \nabla^\mu \eta_\nu}_0 = \eta^\mu \nabla_\mu H
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Τώρα θα εκφράσουμε κάποιες από τις ποσότητες της παραπάνω εξίσωσης που περιέχουν τη συναλλοίωτη παράγωγο ∇ , συναρτήσει της D .

- $\nabla^\mu M_\mu$

$$\begin{aligned}
D_\mu M_\nu &= P_\mu^\alpha P_\nu^\beta \nabla_\alpha M_\beta \rightarrow D^\mu M_\nu = g^{\mu\gamma} D_\gamma M_\nu = P^{\mu\alpha} P_\nu^\beta \nabla_\alpha M_\beta \rightarrow \\
D^\mu M_\mu &= P^{\mu\alpha} P_\mu^\beta \nabla_\alpha M_\beta = P^{\alpha\beta} \nabla_\alpha M_\beta = (g^{\alpha\beta} + \eta^\alpha \eta^\beta) \nabla_\alpha M_\beta = \nabla^\beta M_\beta + \eta^\alpha \eta^\beta \nabla_\alpha M_\beta = \\
& \nabla^\beta M_\beta + g^{\alpha\kappa} \eta_\kappa \eta^\beta \nabla_\alpha M_\beta = \nabla^\beta M_\beta + \eta_\kappa \eta^\beta \nabla^\kappa M_\beta = \nabla^\beta M_\beta + \eta_\kappa \nabla^\kappa (\underbrace{M_\beta \eta^\beta}_0) - \eta_\kappa M_\beta \nabla^\kappa \eta^\beta \rightarrow \\
& \nabla^\beta M_\beta = D^\mu M_\mu + \eta_\kappa M_\beta \nabla^\kappa \eta^\beta
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Αν $M_\beta = \eta_\beta$ τότε

$$\nabla^\beta \eta_\beta = D^\beta \eta_\beta \tag{2.2.20}$$

- $E_{\mu\nu} \nabla^\mu \eta^\nu$ $E_{\mu\nu}$ χωρικός οπότε $P_\mu^\alpha P_\nu^\beta E_{\alpha\beta} = E_{\mu\nu}$. Άρα

$$E_{\mu\nu} \nabla^\mu \eta^\nu = P_\mu^\alpha P_\nu^\beta E_{\alpha\beta} \nabla^\mu \eta^\nu = E_{\alpha\beta} D^\alpha \eta^\beta \tag{2.2.21}$$

Με την ίδια λογική ισχύει

$$\eta_\mu M_\nu \nabla^\mu \eta^\nu = \eta_\mu M_\nu D^\mu \eta^\nu \tag{2.2.22}$$

Άρα τελικά, η 2.2.18 γίνεται

$$\begin{aligned}
\eta^\mu \nabla_\mu H &= -E_{\mu\nu} D^\mu \eta^\nu - D^\mu M_\mu - 2\eta_\mu M_\nu \nabla^\mu \eta^\nu - H \nabla^\mu \eta_\mu \\
\eta^\mu \nabla_\mu H &= -D^\mu M_\mu - E_{\mu\nu} D^\mu \eta^\nu + L(H, M_\sigma)
\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

όπου $L(H, M_\sigma)$ ενοούμε όρους ανάλογους των H, M_σ , δηλαδή όρους που δεν περιέχουν παραγώγους αυτών.

Τώρα θα πάρουμε την προβολή στην ταυτότητα Bianchi

$$\nabla^\nu (E_{\mu\nu} + \eta_\mu M_\nu + \eta_\nu M_\mu + \eta_\mu \eta_\nu H) = 0$$

δηλαδή

$$P_\mu^\alpha (\nabla^\nu E_{\alpha\nu} + \nabla^\nu (\eta_\alpha M_\nu) + \nabla^\nu (\eta_\nu M_\alpha) + \nabla^\nu (\eta_\alpha \eta_\nu H)) = 0 \tag{2.2.24}$$

Επικεντρωνόμαστε σε κάθε όρο ξεχωριστά

- $P_\mu^\alpha (\nabla^\nu E_{\alpha\nu})$

$$P_\mu^\alpha (\nabla^\nu E_{\alpha\nu}) = \nabla^\nu E_{\mu\nu} + \eta^\alpha \eta_\mu \nabla^\nu E_{\alpha\nu} = \nabla^\nu E_{\mu\nu} + \eta_\mu \nabla^\nu (\underbrace{E_{\alpha\nu} \eta^\alpha}_0) - \eta_\mu E_{\alpha\nu} \nabla^\nu \eta^\alpha \tag{2.2.25}$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 D^\kappa E_{\mu\nu} &= P^{\kappa\alpha} P_\mu^\beta P_\nu^\gamma D_\alpha E_{\beta\gamma} \rightarrow \\
 D^\nu E_{\mu\nu} &= P^{\nu\alpha} P_\mu^\beta P_\nu^\gamma \nabla_\alpha E_{\beta\gamma} = P^{\alpha\gamma} P_\mu^\beta \nabla_\alpha E_{\beta\gamma} = P^{\alpha\gamma} (\nabla_\alpha E_{\mu\gamma} + \eta_\mu \eta^\beta \nabla_\alpha E_{\beta\gamma}) = \\
 P^{\alpha\gamma} (\nabla_\alpha E_{\mu\gamma} + \underbrace{\eta_\mu \nabla_\alpha (E_{\beta\gamma} \eta^\beta)}_0) - \eta_\mu E_{\beta\gamma} \nabla_\alpha \eta^\beta &= \nabla^\gamma E_{\mu\gamma} + \eta^\alpha \eta^\gamma \nabla_\alpha E_{\mu\gamma} - \eta_\mu E_{\beta\gamma} \nabla^\gamma \eta^\beta = \\
 \nabla^\gamma E_{\mu\gamma} + \underbrace{\eta^\alpha \nabla_\alpha (E_{\mu\gamma} \eta^\gamma)}_0 - \eta_\mu E_{\beta\gamma} \nabla^\gamma \eta^\beta &= \nabla^\gamma E_{\mu\gamma} + \underbrace{\eta^\alpha \nabla_\alpha (E_{\mu\gamma} \eta^\gamma)}_0 - \eta^\alpha E_{\mu\gamma} \nabla_\alpha \eta^\gamma - \eta_\mu E_{\beta\gamma} \nabla^\gamma \eta^\beta = \\
 \nabla^\gamma E_{\mu\gamma} - \eta^\alpha E_{\mu\gamma} \nabla_\alpha \eta^\gamma - \eta_\mu E_{\beta\gamma} \nabla^\gamma \eta^\beta &
 \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

Από τις 2.2.25, 2.2.26 έχουμε τη σχέση

$$D^\nu E_{\mu\nu} = P_\mu^\alpha (\nabla^\nu E_{\alpha\nu}) - E_{\mu\gamma} \eta^\alpha \nabla_\alpha \eta^\gamma \tag{2.2.27}$$

- $P_\mu^\alpha (\nabla^\nu (\eta_\alpha M_\nu) + \nabla^\nu (\eta_\nu M_\alpha))$

$$\begin{aligned}
 P_\mu^\alpha (\nabla^\nu (\eta_\alpha M_\nu) + \nabla^\nu (\eta_\nu M_\alpha)) &= P_\mu^\alpha (M_\nu \nabla^\nu \eta_\alpha + \eta_\alpha \nabla^\nu M_\nu + \eta_\nu \nabla^\nu M_\alpha + M_\alpha \nabla^\nu \eta_\nu) = \\
 M_\nu \nabla^\nu \eta_\mu + \eta_\mu \nabla^\nu M_\nu + \eta_\nu \nabla^\nu M_\mu + M_\mu \nabla^\nu \eta_\nu + \underbrace{\eta_\mu \eta^\alpha M_\nu \nabla^\nu \eta_\alpha}_0 - \eta_\mu \nabla^\nu M_\nu + \\
 \eta_\mu \eta_\nu \eta^\alpha \nabla^\nu M_\alpha + \underbrace{\eta_\mu \eta^\alpha M_\alpha \nabla^\nu \eta_\nu}_0 &= \\
 M_\nu \nabla^\nu \eta_\mu + \eta_\nu \nabla^\nu M_\mu + M_\mu \nabla^\nu \eta_\nu - \eta_\mu \eta_\nu M_\alpha \nabla^\nu \eta^\alpha &
 \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

- $P_\mu^\alpha (\nabla^\nu (\eta_\alpha \eta_\nu H))$

$$\begin{aligned}
 P_\mu^\alpha (\nabla^\nu (\eta_\alpha \eta_\nu H)) &= P_\mu^\alpha (\eta_\alpha \eta_\nu \nabla^\nu H + H \nabla^\nu (\eta_\alpha \eta_\nu)) = P_\mu^\alpha (\eta_\alpha \eta_\nu \nabla^\nu H + H \eta_\alpha \nabla^\nu \eta_\nu + H \eta_\nu \nabla^\nu \eta_\alpha) = \\
 \eta_\mu \eta_\nu \nabla^\nu H - \eta_\mu \eta_\nu \nabla^\nu H + H \eta_\mu \nabla^\nu \eta_\nu + H \eta_\nu \nabla^\nu \eta_\mu - H \eta_\mu \nabla^\nu \eta_\nu + \\
 \underbrace{H \eta_\mu \eta^\alpha \eta_\nu \nabla^\nu \eta_\alpha}_0 &= \\
 H \eta_\nu \nabla^\nu \eta_\mu &
 \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Λαμβάνοντας υπ όψιν τις 2.2.27, 2.2.28, 2.2.29 καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\begin{aligned}
 D^\nu E_{\mu\nu} + E_{\mu\gamma} \eta^\alpha \nabla_\alpha \eta^\gamma + \eta_\nu \nabla^\nu M_\mu + M_\nu \nabla^\nu \eta_\mu + M_\mu \nabla^\nu \eta_\nu - \eta_\mu \eta_\nu M_\alpha \nabla^\nu \eta^\alpha + H \eta_\nu \nabla^\nu \eta_\mu &= 0 \rightarrow \\
 \eta^\nu \nabla_\nu M_\mu = -D^\nu E_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} \eta^\lambda \nabla_\lambda \eta^\nu + L(H, M_\sigma) &
 \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

Έχουμε λοιπόν καταλήξει στις εξισώσεις

$$\eta^\mu \nabla_\mu H = -D^\mu M_\mu - E_{\mu\nu} D^\mu \eta^\nu + L(H, M_\sigma) \tag{2.2.31}$$

$$\eta^\nu \nabla_\nu M_\mu = -D^\nu E_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} \eta^\lambda \nabla_\lambda \eta^\nu + L(H, M_\sigma) \tag{2.2.32}$$

οι οποίες είναι κατά μια έννοια εξισώσεις εξέλιξης για τα constraints.

Στα αριστερά μέλη των εξισώσεων εμφανίζεται η κατά κατεύθυνση συναλοιώτη παράγωγος των ποσοτήτων H, M_μ στην κατεύθυνση κάθετη στις υπερεπιφάνειες.

Δηλαδή, αν θεωρήσουμε το σύνολο των ολοκληρωτικών καμπύλων $x^\mu(\lambda)$ με εφαπτόμενο πεδίο το η^μ θα ισχύει:

$$\eta^\nu \nabla_\nu H = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial H}{\partial x^\mu} = \frac{dH}{d\lambda} \tag{2.2.33}$$

$$\eta^\nu \nabla_\nu M_\mu = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{\partial M_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{dx^\nu}{d\lambda} \Gamma_{\nu\kappa}^\rho M_\rho = \frac{dM_\mu}{d\lambda} - \frac{dM_\mu}{d\lambda} \Gamma_{\nu\kappa}^\rho M_\rho \tag{2.2.34}$$

όπου $\frac{dH}{d\lambda}, \frac{dM_\mu}{d\lambda}$ οι ρυθμοί μεταβολής των ποσοτήτων πάνω στις καμπύλες.

Για αρχικά δεδομένα $H = 0$, $M_\mu = 0$ (τιμές των ποσοτήτων πάνω στην αρχική υπερεπιφάνεια $t = 0$) η δεύτερη εξίσωση καταλήγει στην

$$\eta^\nu \nabla_\nu M_\mu = \frac{dM_\mu}{d\lambda} \quad (2.2.35)$$

Από τις ADM evolution equations $E_{\mu\nu} = 0$ βλέπουμε ότι τα δεξιά μέλη των εξισώσεων 2.2.31, 2.2.32 μηδενίζονται στα σημεία της αρχικής υπερεπιφάνειας, οπότε:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\lambda} &= 0 & \frac{dM_\mu}{d\lambda} &= 0 \\ &\rightarrow dH, dM_\mu = 0 \end{aligned}$$

σε όλα τα σημεία τις αρχικής υπερεπιφάνειας. Άρα και στην απειροστά κοντινή υπερεπιφάνεια (από την αρχική) θα συνεχίσουν να ισχύουν τα constraints $H = 0$, $M_\mu = 0$. Πάνω σε αυτή την υπερεπιφάνεια, πάλι η εξίσωση 2.2.34 καταλήγει στην

$$\eta^\nu \nabla_\nu M_\mu = \frac{dM_\mu}{d\lambda}$$

Επίσης, πάλι συμπαρένουμε ότι από τις ADM evolution equations μηδενίζονται τα δεξιά μέλη των εξισώσεων 2.2.31, 2.2.32 (τώρα στα σημεία της συγκεκριμένης υπερεπιφάνειας) οπότε

$$\frac{dH}{d\lambda} = 0, \frac{dM_\mu}{d\lambda} = 0 \rightarrow dH, dM_\mu = 0$$

δηλαδή συνεχίζουν να ικανοποιούνται τα constraints $H = 0$, $M_\mu = 0$ και στην επόμενη απειροστά κοντινή υπερεπιφάνεια. Άρα κάνοντας απειροστά μικρά βήματα, από τη μια υπερεπιφάνεια στην επόμενη, διαπιστώνουμε ότι τα constraints συνεχίζουν να ικανοποιούνται σε κάθε υπερεπιφάνεια, δηλαδή καθ' όλη τη διάρκεια της χρονικής εξέλιξης που προκύπτει από τις ADM εξισώσεις εξέλιξης. $\square$

Original-Standard ADM

Οι ADM εξισώσεις εξέλιξης 2.2.12 δεν αποτελούν την αρχική μορφή που παρήγαγαν οι Arnott-Deser-Misner[5] (από αυτούς προκύπτει η συντομογραφία ADM) αλλά εξισώσεις που προέκυψαν από δουλειά του York[22]. Οι εξισώσεις στην αρχική μορφή ονομάζονται original ADM equations ενώ αυτές που προέκυψαν από τη δουλειά του York, standard ADM.

Original ADM

Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται είναι η χωρική μετρική γ_{ij} και η συζυγής ορμή της π_{ij} (στο πλαίσιο του Χαμιλτονιανού φορμαλισμού της γενικής σχετικότητας που θα αναπτύξουμε στην επόμενη ενότητα). Η συζυγής ορμή σχετίζεται με την εξωτερική καμπυλότητα ως εξής:

$$K_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\pi_{ij} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}\pi) \quad (2.2.36)$$

$$\pi = \pi^i_i, \gamma = \det(\gamma_{ij})$$

Αν γράψουμε τις original ADM evolution equations σε όρους των K_{ij} παίρνουν την εξής μορφή

$$\partial_t K_{ij} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{ij} = -D_i D_j \alpha + [R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k] + 4\pi\alpha[\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}] - \frac{\alpha\gamma_{ij}}{2} H \quad (2.2.37)$$

όπου H το Hamiltonian constraint γραμμένο στη μορφή

$$H \equiv \frac{1}{2}({}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij}) - 8\pi\rho = 0 \quad (2.2.38)$$

Οι original ADM evolution equations εξάχθηκαν από τις εξισώσεις Einstein στη μορφή 2.1.1 ενώ οι standard ADM evolution equations από τις εξισώσεις Einstein στη μορφή 2.1.2.

Είναι φανερό ότι στα πλαίσια της γενικής σχετικότητας, οι παραπάνω εξισώσεις είναι ισοδύναμες διότι διαφέρουν μόνο κατά όρο που είναι ανάλογος με το H το οποίο θα μηδενίζεται για οποιαδήποτε φυσική λύση. Ωστόσο δεν είναι μαθηματικά ισοδύναμες για δύο λόγους

- Πρόκειται για δύο διαφορετικές εξισώσεις, οπότε ο χώρος των λύσεων τους θα είναι διαφορετικός για την κάθε περίπτωση. Υπάρχει ταύτιση μόνο στο υποσύνολο των λύσεων για τις οποίες ισχύει $H = 0$. Το υποσύνολο αυτό ονομάζεται constraint υπερ επιφάνεια (υπερ επιφάνεια = υποσύνολο του χώρου των λύσεων) και αποτελείται από όλες τις φυσικά αποδεκτές λύσεις. Σε αυτόν τον υπόχωρο, οι εξισώσεις είναι ισοδύναμες. Παρόλο που ενδιαφερόμαστε προφανώς μόνο για φυσικά αποδεκτές λύσεις, κατά την αριθμητική προσομοίωση τα αριθμητικά σφάλματα αναπόφευκτα μας οδηγούν εκτός της constraint υπερ επιφάνειας οπότε η χρήση της μίας ή της άλλης ταυστικής εξίσωσης πλέον κάνει τεράστια διαφορά. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η ευστάθεια, δηλαδή δεδομένου ότι μετακινούμαστε λίγο εκτός της constraint υπερ επιφάνειας πόσο πολύ θα αποκλίνει από αυτή, η λύση που θα προκύψει από το επόμενο βήμα στη χρονική εξέλιξη.
- Το Hamiltonian Constraint περιεχει δεύτερες παραγώγους της χωρικής μετρικής το οποίο σημαίνει ότι αλλάζει τελείως η δομή των διαφορικών εξισώσεων.

Με βάση τα παραπάνω, κάνουμε μια πολύ σημαντική παρατήρηση, ότι προσθέτοντας στις standard ADM evolution equations έναν αυθαίρετο αριθμό από όρους ανάλογους των constraints, παίρνουμε ισοδύναμες εξισώσεις στον υπόχωρο που μας ενδιαφέρει, των φυσικά αποδεκτών λύσεων όμως με τελείως διαφορετικές μαθηματικές ιδιότητες. Είναι πιθανό, για δύο διαφορετικά τέτοια σετ από εξισώσεις να έχουν τεράστια διαφορά στον τρόπο με τον οποίο ανταποκρίνονται σε μικρές αποκλίσεις των λύσεων από αυτές που ικανοποιούν τα constraints. Ο στόχος φυσικά είναι η επίτευξη όλο και καλύτερης ευστάθειας κατά τη χρονική εξέλιξη.

Στο πλαίσιο της απόδειξης που δώσαμε για τη διατήρηση των constraints κατά τη χρονική εξέλιξη που προκύπτει από τις Standard ADM evolution equations, οι original ADM evolution equations θα γράφονταν

$$E_{\mu\nu} - \frac{\gamma_{\mu\nu}}{2} H \rightarrow E_{\mu\nu} = \frac{\gamma_{\mu\nu}}{2} H \quad (2.2.39)$$

οπότε χρησιμοποιώντας αυτές για τη χρονική εξέλιξη θα καταλήγαμε στις εξισώσεις

$$\eta^\nu \nabla_\nu H = -D^\nu M_\nu - \frac{\gamma_{\mu\nu}}{2} H D^\mu \eta^\nu + L(H, M_\sigma) \quad (2.2.40)$$

$$\eta^\nu \nabla_\nu M_\mu = -D^\nu H - \frac{\gamma_{\mu\nu}}{2} \eta^\lambda \nabla_\lambda \eta^\nu + L(H, M_\sigma) \quad (2.2.41)$$

Με παρόμοιους συλλογισμούς με αυτούς που χρησιμοποιήσαμε στην αρχική απόδειξη, διαπιστώνουμε ότι και σε αυτή την περίπτωση έχουμε διατήρηση των constraints. Εύκολα διαπιστώνουμε, ότι το ίδιο ισχύει και για οποιοδήποτε σύνολο εξισώσεων της μορφής που περιγράψαμε παραπάνω, δηλαδή ενός συνόλου εξισώσεων που προκύπτει από τις standard ADM evolution equations προσθέτοντας όρους ανάλογους των constraints.

2.3 Χαμιλτονιανός Φορμαλισμός

Υπενθυμίζουμε ότι στον Λαγκρανζιανό φορμαλισμό της γενικής σχετικότητας έχουμε ορίσει την Einstein-Hilbert λαγκρανζιανή πυκνότητα

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} R \sqrt{-g} \quad (2.3.1)$$

όπου $g = \det(g_{\mu\nu})$.

Θα θέσουμε $\mathcal{L} = R \sqrt{-g}$ για απλότητα στους θεωρητικούς υπολογισμούς. Πάντα μπορούμε στο τέλος να επαναφέρουμε τον συντελεστή για να έχουμε σωστό αποτέλεσμα. Με αυτή την λαγκρανζιανή, ορίζεται λοιπόν και η δράση Einstein-Hilbert

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = \int R \sqrt{-g} d^4x \quad (2.3.2)$$

Όπως γνωρίζουμε, από την αρχή της ελάχιστης δράσης $dS = 0$ θα καταλήξουμε στην εξίσωση Einstein στο κενό. Οι εξισώσεις είναι σε συναλλοίωτη μορφή. Βέβαια να θυμίσουμε ότι για να καταλήξουμε σε αυτό το αποτέλεσμα χρειάζεται να εισάγουμε έναν ακόμα επιφανειακό όρο ο οποίος δεν μας ενδιαφέρει αυτή τη στιγμή.

Ξεκινώντας από τον λαγκρανζιανό φορμαλισμό, θα κάνουμε τη μετάβαση στον χαμιλτονιανό. Ένας χαμιλτονιανός φορμαλισμός της γενικής σχετικότητας μπορεί να είναι χρήσιμος στο να γράψουμε μια κβαντική θεωρία της βαρύτητας. Γενικά ο χαμιλτονιανός φορμαλισμός περιγράφει ένα σύστημα με τη χρήση ενός συνόλου κανονικών μεταβλητών για κάθε 'χρονική στιγμή'. Η χρονική εξέλιξη προκύπτει από τη γνώση των μεταβλητών αυτών για το παρόν. Δηλαδή γνωρίζοντας τις τιμές που έχουν οι μεταβλητές για κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, μπορούμε να προβλέψουμε τις τιμές τους για την απειροστά κοντινή επόμενη χρονική στιγμή. Ο χαμιλτονιανός φορμαλισμός επομένως, χρειάζεται διαχωρισμό χώρου και χρόνου οπότε δε μπορεί να είναι συναλλοίωτος (αναλλοίωτες εξισώσεις κάτω από μετασχηματισμούς συνεταγμένων) διότι ο χώρος και ο χρόνος δεν είναι ισοδύναμοι εφόσον έχει επιλεγεί μια προτιμητέα κατεύθυνση χρόνου.

Είναι προφανές ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον 3+1 διαχωρισμό του χωροχρόνου για να μπορέσουμε να γράψουμε έναν χαμιλτονιανό φορμαλισμό. Φυσικά, όπως έχουμε ξαναπεί, ο χρόνος αυτός δεν θα αντιπροσωπεύει απαραίτητα τον ιδιόχρονο κάποιου παρατηρητή. Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε μια χρονική γραμμή, χρειαζόμαστε τη μετρική για να προσδιορίσουμε τον ιδιόχρονο που αντιστοιχεί σε αυτή η οποία είναι η δυναμική ποσότητα που αναζητούμε.

Κανονικές μεταβλητές	γ_{ij}	α	β_i
Συζυγείς ορμές	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}$	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}}$	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}_i}$

Αρχικά θα γράψουμε την λαγκρανζιανή πυκνότητα Einstein-Hilbert σε όρους αυτών των μεταβλητών. Ξεκινάμε από τη σχέση

$$\eta^\mu \eta^\nu G_{\mu\nu} = \eta^\mu \eta^\nu R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R \rightarrow R = 2(\eta^\mu \eta^\nu G_{\mu\nu} - \eta^\mu \eta^\nu R_{\mu\nu}) \quad (2.3.3)$$

Υπενθυμίζουμε τη σχέση 2.1.5

$$2\eta^\mu \eta^\nu G_{\mu\nu} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}$$

Επίσης, εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} = K_{\mu\nu} K^{\nu\mu} = P_\mu^\alpha P_\nu^\beta P_\gamma^\nu P_\delta^\mu \nabla_\alpha \eta_\beta \nabla^\gamma \eta^\delta = P_\delta^\alpha P_\gamma^\beta \nabla_\alpha \eta_\beta \nabla^\gamma \eta^\delta = \nabla_\alpha \eta_\beta \nabla^\beta \eta^\alpha \quad (2.3.4)$$

Για τον 2ο όρο της 2.3.3 έχουμε

$$\begin{aligned} \eta^\mu \eta^\nu R_{\mu\nu} &= \eta^\mu \eta^\nu R_{\mu\lambda\nu}^\lambda = \eta^\nu (\nabla_\lambda \nabla_\nu \eta^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\lambda \eta^\lambda) = \\ &= \nabla_\lambda (\eta^\nu \nabla_\nu \eta^\lambda) - \nabla_\nu (\eta^\nu \nabla_\lambda \eta^\lambda) - (\nabla_\lambda \eta^\nu) (\nabla_\nu \eta^\lambda) + (\nabla_\nu \eta^\nu) (\nabla_\lambda \eta^\lambda) = \\ &= \nabla_\lambda (\eta^\nu \nabla_\nu \eta^\lambda) - \nabla_\nu (\eta^\nu \nabla_\lambda \eta^\lambda) - K_{\lambda\nu} K^{\lambda\nu} + K^2 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Άρα λοιπόν, η 2.3.3 γίνεται

$$R = {}^{(3)}R + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - K^2 - 2\nabla_\lambda (\eta^\nu \nabla_\nu \eta^\lambda - \eta^\lambda \nabla_\nu \eta^\nu) \quad (2.3.6)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η 2.3.6 παίρνει την ισοδύναμη μορφή

$$R = {}^{(3)}R + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - K^2 - 2\nabla_\lambda (\eta^\lambda K) - \frac{2}{\alpha} D_\lambda D^\lambda \alpha \quad (2.3.7)$$

Υπενθυμίζουμε αρχικά τη σχέση 1.3.6 $\alpha^\mu = \frac{1}{\alpha} D^\mu \alpha$. Ισχύει ότι

$$\nabla_\lambda (\eta^\nu \nabla_\nu \eta^\lambda) = \nabla_\lambda \alpha^\lambda = \nabla_\lambda \left(\frac{1}{\alpha} D^\lambda \alpha \right) = -\frac{1}{\alpha^2} D^\lambda \alpha D_\lambda \alpha + \frac{1}{\alpha} \nabla_\lambda D^\lambda \alpha \quad (2.3.8)$$

Γενικά για ένα διάνυσμα v^μ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} D_\mu v^\nu &= P_\mu^\alpha P_\beta^\nu \nabla_\alpha v^\beta \rightarrow D_\mu v^\mu = P_\beta^\alpha \nabla_\alpha v^\beta \rightarrow D_\mu v^\mu = \nabla_\mu v^\mu + \eta^\mu \eta_\nu \nabla_\mu v^\nu \rightarrow \\ \nabla_\mu v^\mu &= D_\mu v^\mu - \eta^\mu \eta_\nu \nabla_\mu v^\nu \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Άρα

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda D^\lambda \alpha &= D_\lambda D^\lambda \alpha - \eta^\mu \eta_\nu \nabla_\mu D^\nu \alpha = D_\lambda D^\lambda \alpha + \eta^\mu D^\nu \alpha \nabla_\mu \eta_\nu = D_\lambda D^\lambda \alpha + (D^\nu \alpha) \alpha_{,\nu} = \\ &= D_\lambda D^\lambda \alpha + \frac{1}{\alpha} D^\lambda \alpha D_\lambda \alpha \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Άρα η 2.3.8 γίνεται

$$\nabla_\lambda(\eta^\nu \nabla_\nu \eta^\lambda) = \frac{1}{\alpha} D_\lambda D^\lambda \alpha \quad (2.3.11)$$

Άρα όντως η 2.3.6 παίρνει την ισοδύναμη μορφή 2.3.7.

Στα πλαίσια του φορμαλισμού 3+1, ισχύει προφανώς $\sqrt{-g} = \alpha \cdot \det(\gamma_{ij}) = \alpha \gamma$, οπότε το ολοκλήρωμα της δράσης θα γράφεται

$$S = \int_V \mathcal{L} d^4x = \int_V R \sqrt{-g} d^4x = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma_t} R \alpha \sqrt{\gamma} d^3x dt \quad (2.3.12)$$

Οι όροι $\frac{1}{\alpha} D_\lambda D^\lambda \alpha$ και $\nabla_\lambda(\eta^\lambda K)$ αγνοούνται διότι τα ολοκληρώματα αυτών των όρων ανάγονται σε επιφανειακά. Οι επιφανειακοί αυτοί όροι δεν συνεισφέρουν στη μεταβολή της δράσης διότι όταν θεωρούμε μεταβολές των μεταβλητών αυτής, οι μεταβολές αυτές είναι μηδενικές στη συνοριακή επιφάνεια. Ας το δούμε λεπτομερώς για κάθε όρο

Υπενθυμίζουμε τις γνωστές σχέσεις

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (2.3.13)$$

$$\nabla_\mu v^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} v^\mu) \quad (2.3.14)$$

Έχουμε λοιπόν

- 1ος όρος

$$\int_V \nabla_\lambda(K \eta^\lambda) \sqrt{-g} d^4x = \int_V \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} K \eta^\mu) d^4x = \oint_{\partial V} \sqrt{-g} K \eta^\mu d^3x \quad (2.3.15)$$

- 2ος όρος

$$\begin{aligned} \int_V \frac{1}{\alpha} D_\lambda D^\lambda \alpha \sqrt{-g} d^4x &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Sigma_t} D_i D^i \alpha \sqrt{\gamma} \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\gamma} D^i \alpha) d^3x \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\oint_{\partial \Sigma_t} \sqrt{\gamma} D^i \alpha d^3x \right] dt \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Τα επιφανειακά ολοκληρώματα μηδενίζονται διότι

- $\gamma_{ij} = g_{ij} + \eta_i \eta_j \rightarrow \delta \gamma_{ij} = \delta g_{ij}$

$$\delta \gamma = \gamma \gamma^{ij} \delta g_{ij} \rightarrow \delta \sqrt{\gamma} = \frac{\gamma}{2\sqrt{\gamma}} \gamma^{ij} \delta g_{ij} = 0 \text{ στο σύνορο}$$

- όμοια $\delta \sqrt{g} = \frac{g}{2\sqrt{g}} g^{ij} \delta g_{ij} = 0 \text{ στο σύνορο}$

Άρα λοιπόν τελικά η λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι η

$$\mathcal{L} = \alpha \sqrt{\gamma} ({}^{(3)}R + K_{ij} K^{ij} - K^2) \quad (2.3.17)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τις συζυγείς ορμές

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \quad (2.3.18)$$

Υπενθυμίζουμε τη σχέση 1.4.14

$$\dot{\gamma}_{ij} = -2\alpha K_{ij} + \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \gamma_{ij} \quad (2.3.19)$$

η οποία θα μας φανεί χρήσιμη. Έχουμε λοιπόν

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{\kappa\lambda}} \frac{\partial K_{\kappa\lambda}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = -\frac{\sqrt{\gamma}}{2} (2K^{ij} - 2\gamma^{ij} K) = -\sqrt{\gamma} (K^{ij} - \gamma^{ij} K) \quad (2.3.20)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \gamma_{ij} \pi^{ij} &= -\gamma_{ij} \pi^{ij} = -\sqrt{\gamma} (\gamma_{ij} K^{ij} - \gamma_{ij} \gamma^{ij} K) \\ \rightarrow \pi &= -\sqrt{\gamma} (K - 3K) \rightarrow K = \frac{\pi}{2\sqrt{\gamma}} \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Οπότε

$$K_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\pi_{ij} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}\pi) \quad (2.3.22)$$

Επίσης προφανώς ισχύει

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}_i} = 0 \quad (2.3.23)$$

Άρα λοιπόν, για τη χαμιλτονιανή πυκνότητα έχουμε

$$\mathcal{H} = \pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L} = -\alpha\sqrt{\gamma}({}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij}) + 2\pi^{ij}D_i\beta_j$$

Από τη σχέση 1.4.19 έχουμε $\pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} = -2\alpha K_{ij}\pi^{ij} + \pi^{ij}\mathcal{L}_{\vec{\beta}}\gamma_{ij} = 2\alpha\sqrt{\gamma}(K^{ij}K_{ij} - K^2) + 2\pi^{ij}D_i\beta_j$, οπότε

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\alpha\sqrt{\gamma}({}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij}) + 2D_i(\pi^{ij}\beta_j) - 2\beta_j D_i\pi^{ij} = \\ &= -\sqrt{\gamma}[\alpha({}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij}) + 2\beta_j D_i(K^{ij} - \gamma^{ij}K)] \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

Αγνοήσαμε την ολική παράγωγο γιατί θα εξαφανιστεί στο ολοκλήρωμα που θα υπολογίσουμε παρακάτω. Παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{H} = -2\sqrt{\gamma}[\alpha H + \beta_j M^j] \quad (2.3.25)$$

όπου $H = 0$, $M^i = 0$ τα Hamiltonian, Momentum constraints (εξισώσεις περιορισμού ενέργειας/ορμής), χωρίς του όρους της μάζας (λογικό αφού θεωρήσαμε μόνο τη λαγκρανζιανή του βαρυτικού πεδίου. Αν λαμβάναμε υπ όψιν και τη μάζα θα εμφανίζονταν και οι σχετικοί όροι).

Για να βρούμε τη χαμιλτονιανή θα πρέπει να ολοκληρώσουμε τη χαμιλτονιανή πυκνότητα

$$H = \int \mathcal{H} d^3x \quad (2.3.26)$$

Από τον ορισμό της χαμιλτονιανής πυκνότητας

$$\mathcal{L} = \pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{H} \quad (2.3.27)$$

Τώρα, από την αρχή της ελάχιστης δράσης $dS = 0$ θα υπολογίσουμε τις εξισώσεις Χάμιλτον.

Αν θεωρήσουμε μεταβολές στα α, β_i τότε έχουμε αντίστοιχα

- $dS = 0 \rightarrow H = 0$, Hamiltonian Constraints
- $dS = 0 \rightarrow M^j = 0$, Momentum Constraints

Αν θεωρήσουμε μεταβολές στα π^{ij} τότε

$$dS = \int \delta\pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \delta\pi^{ij}\frac{\delta H}{\delta\pi^{ij}}d^4x \rightarrow \dot{\gamma}_{ij} = \frac{\delta H}{\delta\pi^{ij}} \quad (2.3.28)$$

Τώρα θα θεωρήσουμε μεταβολές στα γ_{ij}

$$\gamma_{ij} \rightarrow \gamma_{ij} + \delta\gamma_{ij} \quad (2.3.29)$$

Τότε θα έχουμε

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \delta\gamma_{ij}}{\partial t} \Rightarrow \dot{\gamma}_{ij} \rightarrow \dot{\gamma}_{ij} + \frac{\partial \delta\gamma_{ij}}{\partial t} \Rightarrow \delta\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial \delta\gamma_{ij}}{\partial t} \quad (2.3.30)$$

Οπότε λαμβάνοντας υπ όψιν τις 2.3.29, 2.3.30 έχουμε

$$\begin{aligned} dS &= \int \pi^{ij}\delta\dot{\gamma}_{ij} - \delta\gamma_{ij}\frac{\delta H}{\delta\gamma_{ij}}dtd^3x = \int [\pi^{ij}\delta\gamma_{ij}]_{boundary}^{boundary}d^3x - \int \dot{\pi}^{ij}\delta\gamma_{ij} + \delta\gamma_{ij}\frac{\delta H}{\delta\gamma_{ij}}dtd^3x \rightarrow \\ &\rightarrow \dot{\pi}^{ij} = -\frac{\delta H}{\delta\gamma_{ij}} \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Άρα λοιπόν έχουμε τελικά τις Χαμιλτονιανές εξισώσεις

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\delta H}{\delta\pi^{ij}} \quad \dot{\pi}^{ij} = -\frac{\delta H}{\delta\gamma_{ij}} \quad (2.3.32)$$

και τα Hamiltonian-momentum constraints.

Από την πρώτη βρίσκουμε

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}}(\pi_{ij} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}\pi) + \mathcal{L}_{\vec{\beta}}\gamma_{ij}$$

δηλαδή τις εξισώσεις εξέλιξης για τη χωρική μετρική που είχαμε ήδη υπολογίσει(απλώς γραμμένες σε όρους π_{ij} αντί K_{ij}). Από τη δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε τις original ADM εξισώσεις εξέλιξης.

Κεφάλαιο 3

Αρχικά Δεδομένα

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στα πλαίσια του $3 + 1$ διαχωρισμού, έξι από τις δέκα εξισώσεις Einstein αντιπροσωπεύουν εξισώσεις χρονικής εξέλιξης. Οι υπόλοιπες τέσσερις είναι περιορισμοί, οι γνωστές εξισώσεις περιορισμού ενέργειας και ορμής, που θα πρέπει να ισχύουν σε κάθε υπερεπιφάνεια, δηλαδή όλες τις χρονικές στιγμές. Τις ξαναγράφουμε εδώ

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} = 16\pi\rho \quad (3.0.1)$$

$$D_\mu(K^{\alpha\mu} - \gamma^{\alpha\mu}K) = 8\pi j^\alpha \quad (3.0.2)$$

Όπως είχαμε εξηγήσει στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα ρ, j^i είναι η πυκνότητα ενέργειας και η πυκνότητα ορμής στον άξονα i αντίστοιχα, όπως τις αντιλαμβάνεται ένας κανονικός παρατηρητής.

$$\rho = \eta^\mu \eta^\nu T_{\mu\nu}, \quad j^\alpha = -\gamma^{\alpha\mu} \eta^\nu T_{\mu\nu} \quad (3.0.3)$$

Η ύπαρξη των εξισώσεων περιορισμού, συνεπάγεται ότι δε μπορούμε να επιλέξουμε 12 αυθαίρετες δυναμικές ποσότητες $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$ ως αρχικά δεδομένα. Για να είναι τα αρχικά δεδομένα λύσεις των εξισώσεων Einstein, θα πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις περιορισμού οπότε δε μπορούν να επιλεχθούν όλα αυθαίρετα. Άρα λοιπόν η εύρεση ενός συνόλου κατάλληλων αρχικών δεδομένων για ένα συγκεκριμένο φυσικό σύστημα, αποτελεί ένα σημαντικό πρόβλημα στην αριθμητική γενική σχετικότητα. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα μελετήσουμε 2 βασικές μεθόδους επίλυσης των εξισώσεων περιορισμού, τη σύμμορφη διάσπαση και τη σύμμορφη thin-sandwich προσέγγιση.

3.1 Σύμμορφοι Μετασχηματισμοί

Ορισμός 3.1. Ένας σύμμορφος μετασχηματισμός της χωρικής μετρικής, είναι ένας μετασχηματισμός της μορφής

$$\bar{\gamma}_{ij} = \psi^{-4} \gamma_{ij} \quad (3.1.1)$$

Η μετρική $\bar{\gamma}_{ij}$ ονομάζεται σύμμορφη μετρική και ο παράγοντας ψ ονομάζεται σύμμορφος παράγοντας.

Θα υπάρχει προφανώς μια συναλλοίωτη παράγωγος $\bar{D}$ η οποία να είναι συμβατή με τη σύμμορφη μετρική. Η παρακάτω πρόταση προσδιορίζει τη σχέση που έχει με τη συναλλοίωτη παράγωγο που είναι συμβατή ως προς τη φυσική χωρική μετρική.

Πρόταση 3.1. (Συναλλοίωτη παράγωγος ως προς τη φυσική και τη σύμμορφη μετρική)
Ta Christoffel symbols που χαρακτηρίζουν τις δύο παραγώγους σχετίζονται ως

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - 4\psi^{-1}(\delta_i^k \partial_j \psi + \delta_j^k \partial_i \psi - \gamma_{ij} \gamma^{k\sigma} \partial_\sigma \psi) \quad (3.1.2)$$

Απόδειξη. Δεδομένου ότι $\bar{\gamma}^{ij} = \psi^4 \gamma^{ij}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \bar{\gamma}^{i\sigma} (\partial_i \bar{\gamma}_{j\sigma} + \partial_j \bar{\gamma}_{i\sigma} - \partial_\sigma \bar{\gamma}_{ij}) = \\ &= \frac{1}{2} \gamma^{i\sigma} (\partial_i \gamma_{j\sigma} + \partial_j \gamma_{i\sigma} - \partial_\sigma \gamma_{ij}) - 2\psi^{-1} \gamma^{k\sigma} (\gamma_{j\sigma} \partial_i \psi + \gamma_{i\sigma} \partial_j \psi - \gamma_{ij} \partial_\sigma \psi) = \\ &= \Gamma_{ij}^k - 2\psi^{-1} \delta_j^k \partial_i \psi + \delta_i^k \partial_j \psi - \gamma_{ij} \gamma^{k\sigma} \partial_\sigma \psi \end{aligned}$$

□

Αν θέσουμε $\psi^4 = e^{4\phi}$ τότε με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - 2(\delta_j^k \partial_i \phi + \delta_i^k \partial_j \phi - \gamma_{ij} \gamma^{k\sigma} \partial_\sigma \phi) \quad (3.1.3)$$

Η παρακάτω πρόταση δίνει τη σχέση που έχουν οι τανυστές Ricci ως προς τη φυσική μετρική γ_{ij} και ως προς τη σύμμορφη μετρική $\bar{\gamma}_{ij}$.

Πρόταση 3.2. (Σχέση μεταξύ R_{ij} , $\bar{R}_{ij}$)

$$R_{ij} = \bar{R}_{ij} - 2\bar{D}_i \bar{D}_j \phi - 2\bar{\gamma}_{ij} \bar{D}_\mu \bar{D}^\mu \phi + 4(\bar{D}_i \phi)(\bar{D}_j \phi) - 4\bar{\gamma}_{ij}(\bar{D}^\mu \phi)(\bar{D}_\mu \phi) \quad (3.1.4)$$

Απόδειξη.

$$R_{i\mu j}^\nu = \partial_\mu \Gamma_{ji}^\nu - \partial_j \Gamma_{\mu i}^\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \Gamma_{ji}^\sigma - \Gamma_{j\sigma}^\nu \Gamma_{\mu i}^\sigma \rightarrow \quad (3.1.5)$$

$$R_{ij} = R_{i\mu j}^\mu = \partial_\mu \Gamma_{ji}^\mu - \partial_j \Gamma_{\mu i}^\mu + \Gamma_{\mu\sigma}^\mu \Gamma_{ji}^\sigma - \Gamma_{j\sigma}^\mu \Gamma_{\mu i}^\sigma \quad (3.1.6)$$

Ισχύει επίσης ότι

$$R_{ij} = R_{i\mu j}^\mu = D_\mu \Gamma_{ji}^\mu - D_j \Gamma_{\mu i}^\mu + \Gamma_{\mu\sigma}^\mu \Gamma_{ji}^\sigma - \Gamma_{j\sigma}^\mu \Gamma_{\mu i}^\sigma \quad (3.1.7)$$

- $\partial_\mu \Gamma_{ji}^\mu$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \bar{\Gamma}_{ji}^\mu &= \partial_\mu (\bar{\Gamma}_{ji}^\mu + 2(\delta_j^\mu \partial_i \phi + \delta_i^\mu \partial_j \phi - \gamma_{ij} \gamma^{\mu l} \partial_l \phi)) = \\ &= \partial_\mu \bar{\Gamma}_{ji}^\mu + 4\partial_j \partial_i \phi - 2\partial_\mu (\gamma_{ij} \gamma^{\mu l} \partial_l \phi) \end{aligned}$$

- $\partial_j \bar{\Gamma}_{\mu i}^\mu$

$$\begin{aligned} \partial_j \bar{\Gamma}_{\mu i}^\mu &= \partial_j (\bar{\Gamma}_{\mu i}^\mu + 2(\delta_\mu^\mu \partial_j \partial_i \phi + \delta_i^\mu \partial_j \partial_\mu \phi - \partial_j (\gamma_{\mu i} \gamma^{\mu l} \partial_l \phi))) = \partial_j \bar{\Gamma}_{\mu i}^\mu + 8\partial_j \partial_i \phi - 2\partial_j (\delta_i^l \partial_l \phi) = \\ &= \partial_j \bar{\Gamma}_{\mu i}^\mu + 6\partial_j \partial_i \phi \end{aligned}$$

- $\Gamma_{\mu\sigma}^\mu \Gamma_{ji}^\sigma$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\sigma}^\mu \Gamma_{ji}^\sigma &= (\bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^\mu + 6\partial_\sigma \phi)(\bar{\Gamma}_{ji}^\sigma + 2(\delta_j^\sigma \partial_i \phi + \delta_i^\sigma \partial_j \phi - \gamma_{ji} \gamma^{\sigma l} \partial_l \phi)) = \\ &= \bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^\mu \bar{\Gamma}_{ji}^\sigma + \cancel{2\bar{\Gamma}_{\mu j}^\mu \partial_i \phi} + \cancel{2\bar{\Gamma}_{\mu i}^\mu \partial_j \phi} - 2\bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^\mu \gamma_{ij} \gamma^{\sigma l} \partial_l \phi + \color{red}{6\bar{\Gamma}_{ji}^\sigma \partial_\sigma \phi} + \cancel{12(\partial_j \phi)(\partial_i \phi)} + \cancel{12(\partial_i \phi)(\partial_j \phi)} - \\ &= \underline{12\gamma_{ij} \gamma^{\sigma l} (\partial_l \phi)(\partial_\sigma \phi)} \end{aligned}$$

- $\Gamma_{j\sigma}^\mu \Gamma_{\mu i}^\sigma$

$$\begin{aligned} \Gamma_{j\sigma}^\mu \Gamma_{\mu i}^\sigma &= (\bar{\Gamma}_{j\sigma}^\mu + 2(\delta_j^\mu \partial_\sigma \phi + \delta_\sigma^\mu \partial_j \phi - \gamma_{j\sigma} \gamma^{\mu l} \partial_l \phi))(\bar{\Gamma}_{\mu i}^\sigma + 2(\delta_\mu^\sigma \partial_i \phi + \delta_i^\sigma \partial_\mu \phi - \gamma_{\mu i} \gamma^{\sigma l} \partial_l \phi)) = \\ &= \bar{\Gamma}_{j\sigma}^\mu \bar{\Gamma}_{\mu i}^\sigma + \cancel{2\bar{\Gamma}_{j\mu}^\mu \partial_i \phi} + \color{red}{2\bar{\Gamma}_{ji}^\mu \partial_\mu \phi} - 2\bar{\Gamma}_{j\sigma}^\mu \gamma_{\mu i} \gamma^{\sigma l} \partial_l \phi + \color{red}{2\bar{\Gamma}_{ji}^\sigma \partial_\sigma \phi} + \cancel{4(\partial_j \phi)(\partial_i \phi)} + \cancel{4(\partial_i \phi)(\partial_j \phi)} - \\ &= \underline{4\gamma_{ij} \gamma^{\sigma l} (\partial_l \phi)(\partial_\sigma \phi)} + \cancel{2\bar{\Gamma}_{\mu i}^\mu \partial_j \phi} + \cancel{12(\partial_i \phi)(\partial_j \phi)} + \cancel{4(\partial_i \phi)(\partial_j \phi)} - \cancel{4(\partial_i \phi)(\partial_j \phi)} - \\ &= 2\gamma_{j\sigma} \gamma^{\mu l} (\partial_l \phi) \bar{\Gamma}_{\mu i}^\sigma - 4(\partial_j \phi)(\partial_i \phi) - \underline{4\gamma_{ji} \gamma^{\mu l} (\partial_l \phi)(\partial_\mu \phi)} + \underbrace{4\gamma_i^l \gamma_j^\mu (\partial_l \phi)(\partial_\mu \phi)}_{4(\partial_i \phi)(\partial_j \phi)} \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \bar{R}_{ij} - 2\partial_i \partial_j \phi - 2\partial_\mu (\gamma_{ij} \gamma^{\mu l} \partial_l \phi) + 4(\partial_i \phi)(\partial_j \phi) - 4\gamma_{ij} \gamma^{\sigma l} (\partial_l \phi)(\partial_\sigma \phi) - \\ &= 2\bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^\mu \gamma_{ij} \gamma^{\sigma l} \partial_l \phi + 2\bar{\Gamma}_{ji}^\mu \partial_\mu \phi + 2\gamma^{\sigma l} \partial_l \phi (\bar{\Gamma}_{j\sigma}^\mu \gamma_{\mu i} + \bar{\Gamma}_{\sigma i}^\mu \gamma_{\mu j}) \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\gamma_{ij}\gamma^{kl} = \bar{\gamma}_{ij}\bar{\gamma}^{kl}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \bar{R}_{ij} - 2\partial_i\partial_j\phi - 2\bar{\gamma}_{ij}\partial_\mu\partial^\mu\phi + 4(\partial_i\phi)(\partial_j\phi) - 4\bar{\gamma}_{ij}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - \\
&\quad 2\underbrace{(\partial_\mu\bar{\gamma}_{ij})(\bar{\gamma}^{\mu l}\partial_l\phi)}_{(\partial_\sigma\bar{\gamma}_{ij})(\bar{\gamma}^{\sigma l}\partial_l\phi)} + \underbrace{\bar{\gamma}^{\mu\kappa}(\partial_j\bar{\gamma}_{i\kappa} + \partial_i\bar{\gamma}_{j\kappa} - \partial_\kappa\bar{\gamma}_{ji})\partial_\mu\phi}_{\bar{\gamma}^{\mu\sigma}(\partial_j\bar{\gamma}_{i\sigma} + \partial_i\bar{\gamma}_{j\sigma} - \partial_\sigma\bar{\gamma}_{ji})\partial_\mu\phi} + \\
&\quad \bar{\gamma}^{\sigma l}\partial_l\phi[\bar{\gamma}^{\mu\kappa}(\partial_j\bar{\gamma}_{\sigma\kappa} + \partial_\sigma\bar{\gamma}_{j\kappa} - \partial_\kappa\bar{\gamma}_{j\sigma})\bar{\gamma}_{\mu i} + \bar{\gamma}^{\mu\kappa}(\partial_\sigma\bar{\gamma}_{i\kappa} + \partial_i\bar{\gamma}_{\sigma\kappa} - \partial_\kappa\bar{\gamma}_{\sigma i})\bar{\gamma}_{\mu j}] - 2\bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^\mu\bar{\gamma}_{ij}\bar{\gamma}^{\sigma l}\partial_l\phi = \\
&\quad \bar{R}_{ij} - 2\partial_i\partial_j\phi - 2\bar{\gamma}_{ij}\partial_\mu\partial^\mu\phi + 4(\partial_i\phi)(\partial_j\phi) - 4\bar{\gamma}_{ij}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) + \\
&\quad \bar{\gamma}^{\sigma l}\partial_l\phi[-2\partial_\sigma\bar{\gamma}_{ij} + \partial_j\bar{\gamma}_{i\sigma} + \cancel{\partial_i\bar{\gamma}_{j\sigma}} - \cancel{\partial_\sigma\bar{\gamma}_{ji}} + \delta_i^\kappa(\cancel{\partial_j\bar{\gamma}_{\sigma\kappa}} + \cancel{\partial_\sigma\bar{\gamma}_{j\kappa}} - \cancel{\partial_\kappa\bar{\gamma}_{j\sigma}}) + \delta_j^\kappa(\cancel{\partial_\sigma\bar{\gamma}_{i\kappa}} + \\
&\quad \partial_i\bar{\gamma}_{\sigma\kappa} - \cancel{\partial_\kappa\bar{\gamma}_{\sigma i}})] - 2\bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^\mu\bar{\gamma}_{ij}\bar{\gamma}^{\sigma l}\partial_l\phi = \\
&\quad \bar{R}_{ij} - 2\partial_i\partial_j\phi - 2\bar{\gamma}_{ij}\partial_\mu\partial^\mu\phi + 4(\bar{D}_i\phi)(\bar{D}_j\phi) - 4\bar{\gamma}_{ij}(\bar{D}^\mu\phi)(\bar{D}_\mu\phi) + \\
&\quad \bar{\gamma}^{\sigma l}\partial_l\phi[\partial_i\bar{\gamma}_{j\sigma} + \partial_j\bar{\gamma}_{i\sigma} - \partial_\sigma\bar{\gamma}_{ij}] - 2\bar{\Gamma}_{\sigma\mu}^\sigma\bar{\gamma}_{ij}\bar{\gamma}^{\mu l}\partial_l\phi = \\
&\quad \bar{R}_{ij} - 2\partial_i\partial_j\phi - 2\bar{\gamma}_{ij}(\partial_\mu\partial^\mu\phi + \bar{\Gamma}_{\sigma\mu}^\sigma\partial^\mu\phi) + 4(\bar{D}_i\phi)(\bar{D}_j\phi) - 4\bar{\gamma}_{ij}(\bar{D}^\mu\phi)(\bar{D}_\mu\phi) + \\
&\quad 2\bar{\Gamma}_{ij}^l\partial_l\phi = \\
&\quad \bar{R}_{ij} - 2\partial_i\bar{D}_j\phi - 2\bar{\gamma}_{ij}(\partial_\mu\bar{D}^\mu\phi + \bar{\Gamma}_{\sigma\mu}^\sigma\bar{D}^\mu\phi) + 4(\bar{D}_i\phi)(\bar{D}_j\phi) - 4\bar{\gamma}_{ij}(\bar{D}^\mu\phi)(\bar{D}_\mu\phi) + \\
&\quad 2\bar{\Gamma}_{ij}^l\bar{D}_l\phi = \\
&\quad \bar{R}_{ij} - 2(\partial_i\bar{D}_j\phi - \bar{\Gamma}_{ij}^l\bar{D}_l\phi) - 2\bar{\gamma}_{ij}(\partial_\mu\bar{D}^\mu\phi + \bar{\Gamma}_{\sigma\mu}^\sigma\bar{D}^\mu\phi) + 4(\bar{D}_i\phi)(\bar{D}_j\phi) - 4\bar{\gamma}_{ij}(\bar{D}^\mu\phi)(\bar{D}_\mu\phi) = \\
&\quad \bar{R}_{ij} - 2\bar{D}_i\bar{D}_j\phi - 2\bar{\gamma}_{ij}\bar{D}_\mu\bar{D}^\mu\phi + 4(\bar{D}_i\phi)(\bar{D}_j\phi) - 4\bar{\gamma}_{ij}(\bar{D}^\mu\phi)(\bar{D}_\mu\phi)
\end{aligned}$$

□

Η παρακάτω πρόταση δίνει τη σχέση που έχουν τα Ricci Scalar ως προς τη φυσική μετρική γ_{ij} και ως προς τη σύμμορφη μετρική $\bar{\gamma}_{ij}$.

Πρόταση 3.3. (Σχέση μεταξύ R , $\bar{R}$)

$$R = \psi^{-4}\bar{R} + \psi^{-5}\underbrace{\bar{D}_\mu\bar{D}^\mu}_{\bar{D}^2}\psi \quad (3.1.8)$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
R &= \gamma^{ij}R_{ij} = \psi^{-4}\bar{\gamma}^{ij}R_{ij} = \psi^{-4}(\bar{R} - 8\bar{D}^\mu\bar{D}_\mu\phi + 4(\bar{D}^i\phi)(\bar{D}_i\phi)) - 12(\bar{D}^\mu\phi)(\bar{D}_\mu\phi) = \\
&\quad \psi^{-4}(\bar{R} - 8[\bar{D}_\mu\bar{D}^\mu\ln\psi + (\bar{D}^\mu\ln\psi)(\bar{D}_\mu\ln\psi)]) = \\
&\quad \psi^{-4}(\bar{R} - 8(\bar{D}_\mu(\psi^{-1}\bar{D}^\mu\psi) + (\bar{D}^\mu\ln\psi)(\bar{D}_\mu\ln\psi))) = \\
&\quad \psi^{-4}(\bar{R} - 8(-\psi^{-2}(\bar{D}_\mu\psi)(\bar{D}^\mu\psi) + \psi^{-1}\bar{D}_\mu\bar{D}^\mu\psi) + \psi^{-2}(\bar{D}^\mu\psi)(\bar{D}_\mu\psi)) = \\
&\quad \psi^{-4}\bar{R} + \psi^{-5}\bar{D}_\mu\bar{D}^\mu\psi
\end{aligned}$$

□

3.2 Σύμμορφη διάσπαση York-Lichnerowicz

Οι εξισώσεις περιορισμού είναι ένα σύνολο από 4 διαφορικές εξισώσεις 12 μεταβλητών $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$. Τίθεται λοιπόν το εζής ερώτημα. Ποιές θα είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές, για τις οποίες θα επιλέξουμε αυθαίρετες τιμές (ελεύθερα δεδομένα), και ποιες θα είναι οι εξαρτημένες μεταβλητές, οι οποίες θα βρεθούν λύνοντας τις εξισώσεις, δεδομένων των ανεξάρτητων μεταβλητών. Εκτός από πολύ απλές περιπτώσεις, δεν υπάρχει φυσικός τρόπος να προσδιορίσουμε ποιές είναι οι “πραγματικές” δυναμικές ποσότητες και ποιές οι εξαρτημένες (αυτές που προκύπτουν από τις εξισώσεις περιορισμού). Μία συνηθισμένη διαδικασία από την οποία προκύπτει η επιλογή 8 ποσοτήτων ως ελεύθερα δεδομένα είναι η σύμμορφη διάσπαση York-Lichnerowicz. Οι υπόλοιπες 4 ποσότητες θα βρεθούν φυσικά από τις εξισώσεις περιορισμού.

Στα πλαίσια της συγκεκριμένης μεθόδου, θεωρούμε αρχικά έναν σύμμορφο μετασχηματισμό της χωρικής μετρικής

$$\bar{\gamma}_{ij} = \psi^{-4} \gamma_{ij} \quad (3.2.1)$$

Βλέποντας τη σχέση 3.1.8, εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο χαμιλτονιανός περιορισμός παίρνει τη μορφή

$$8\bar{D}^2\psi - \bar{R}\psi + \psi^5(K_{ij}K^{ij} - K^2) + 16\pi\psi^5\rho = 0 \quad (3.2.2)$$

Επίσης, στα πλαίσια της διαδικασίας York-Lichnerowicz εισάγουμε τις μεταβλητές

$$A^{ij} = K^{ij} - \frac{1}{3}\gamma^{ij}K \quad (3.2.3)$$

οι οποίες αποτελούν το άχνο τμήμα της εξωγενούς καμπυλότητας. Στα πλαίσια της διαδικασίας York-Lichnerowicz χρησιμοποιούμε τις μεταβλητές $\{A_{ij}, K\}$ αντί των K_{ij} . Ως προς αυτές τις μεταβλητές, ο Χαμιλτονιανός περιορισμός γράφεται ως

$$8\bar{D}\psi - \psi\bar{R} + \psi^5(A_{ij}A^{ij} - \frac{2}{3}K^2) + 16\pi\psi^5\rho = 0 \quad (3.2.4)$$

και οι περιορισμοί της ορμής ως

$$D_j A^{ij} - \frac{2}{3}D^i K - 8\pi j^i = 0 \quad (3.2.5)$$

Αναφέρουμε τώρα την εξής πρόταση η οποία θα μας βοηθήσει στο να μετατρέψουμε τους περιορισμούς της ορμής σε ένα σύνολο από 3 εξισώσεις με 3 αγνώστους.

Πρόταση 3.4. (Εγκάρσια Διάσπαση) Κάθε συμμετρικός, με μηδενικό ίχνος, τανυστής S^{ij} μπορεί να διαχωριστεί ως

$$S^{ij} = S_*^{ij} + (\mathbf{L}W)^{ij} \quad (3.2.6)$$

- S_*^{ij} είναι ένας συμμετρικός, άχνος και εγκάρσιος τανυστής (εγκάρσιος ονομάζεται ένας τανυστής για τον οποίο ισχύει $D_j S_*^{ij} = 0$).
- W^i είναι ένα διάνυσμα.
- $\mathbf{L}$ είναι ένας τελεστής που ορίζεται ως

$$(\mathbf{L}W)^{ij} \equiv D^i W^j + D^j W^i - \frac{2}{3}\gamma^{ij}D_k W^k \quad (3.2.7)$$

- Η ποσότητα $(\mathbf{L}W)^{ij}$ ονομάζεται σύμμορφη Killing form του διανύσματος W^i .
- Η συνεισφορά του ονομάζεται διαμήκης τμήμα(ή διαμήκης συνιστώσα) του S^{ij} .
- Αν η σύμμορφη Killing form μηδενίζεται τότε το διάνυσμα W^i λέγεται σύμμορφο Killing vector εφόσον, στην περίπτωση που $\bar{\gamma}_{ij} = \gamma^{-1/3}\gamma_{ij}$, ισχύει ότι

$$\mathcal{L}_{\bar{W}}(\gamma^{-1/3}\gamma_{ij}) = \gamma^{-1/3}(D_i W_j + D_j W_i - \frac{2}{3}\gamma_{ij}D_k W^k) = \gamma^{-1/3}(\mathbf{L}W)_{ij} = 0$$

Πράγματι,

$$\mathcal{L}_{\bar{W}}(\gamma^{-1/3}\gamma_{ij}) = \gamma_{ij}\mathcal{L}_{\bar{W}}\gamma^{-1/3} + \gamma^{-1/3}\mathcal{L}_{\bar{W}}\gamma_{ij} = \gamma_{ij}\mathcal{L}_{\bar{W}}\gamma^{-1/3} + \gamma^{-1/3}(D_i W_j + D_j W_i)$$

Είναι

$$\mathcal{L}_{\bar{W}}\gamma^{-1/3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\det(\phi^*\gamma_{ij}))^{-1/3} - (\det\gamma_{ij})^{-1/3}$$

Από τη σχέση 2.3.13 έχουμε ότι $\delta\gamma^{-1/3} = -\frac{1}{3}\gamma^{-2/3}\delta\gamma = -\frac{1}{3}\gamma^{-1/3}\gamma^{ij}\underbrace{\delta\gamma_{ij}}_{\phi^*\gamma_{ij}-\gamma_{ij}}$, άρα

$$\mathcal{L}_{\bar{W}}\gamma^{-1/3} = -\frac{1}{3}\gamma^{-1/3}\gamma^{ij}\mathcal{L}_{\bar{W}}\gamma_{ij} = -\frac{2}{3}\gamma^{-1/3}D_k W^k$$

Άρα, πράγματι

$$\mathcal{L}_{\bar{W}}(\gamma^{-1/3}\gamma_{ij}) = \gamma^{-1/3}(D_i W_j + D_j W_i - \frac{2}{3}\gamma_{ij}D_k W^k)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω πρόταση για να κάνουμε διάσπαση του A_{ij} . Ο τελεστής $\mathbf{L}$ μπορεί να οριστεί ως προς οποιονδήποτε μετρικό τανυστή. Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή $\bar{\mathbf{L}}$ ο οποίος ορίζεται ως προς τη σύμμορφη μετρική(σύμμορφη εγκάρσια διάσπαση) και τον τελεστή $\mathbf{L}$ ο οποίος ορίζεται ως προς τη φυσική μετρική(φυσική εγκάρσια διάσπαση). Θα αναλύσουμε ξεχωριστά την κάθε περίπτωση στις 2 επόμενες υποενότητες.

3.2.1 Σύμμορφη εγκάρσια διάσπαση

Θεωρούμε αρχικά ένα σύμμορφο μετασχηματισμό του A^{ij}

$$\bar{A}^{ij} = \psi^{10} A^{ij} \quad (3.2.8)$$

Ο λόγος που επιλέξαμε τον παράγοντα ψ^{10} θα γίνει εμφανής από την επόμενη πρόταση

Πρόταση 3.5. Για κάθε συμμετρικό τανυστή S^{ij} με μηδενικό ίχνος, ισχύει ότι

$$D_j S^{ij} = \psi^{-n} \bar{D}_j (\psi^n S^{ij}) + (10 - n) S^{ik} \partial_k \ln \psi \quad (3.2.9)$$

Απόδειξη. Η σύμμορφη μετρική ορίζεται ως $\bar{\gamma}^{ij} = \psi^4 \gamma^{ij}$. Η συναλλοίωτη παράγωγος ως προς τη φυσική δράει ως

$$D_\mu S^{ij} = \partial_\mu S^{ij} + \Gamma_{\mu\rho}^i S^{\rho j} + \Gamma_{\mu\rho}^j S^{i\rho} \quad (3.2.10)$$

Για τα Christoffel symbols της σύμμορφης μετρικής έχουμε

$$\bar{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} \bar{\gamma}^{\mu\sigma} (\partial_\nu \bar{\gamma}_{\rho\sigma} + \partial_\rho \bar{\gamma}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \bar{\gamma}_{\nu\rho}) = -\frac{1}{2} \psi^4 \gamma^{\mu\sigma} \cdot 4\psi^{-5} (\gamma_{\rho\sigma} \partial_\nu \psi + \gamma_{\nu\sigma} \partial_\rho \psi - \gamma_{\nu\rho} \partial_\sigma \psi) + \quad (3.2.11)$$

$$\frac{1}{2} \gamma^{\mu\sigma} (\partial_\nu \gamma_{\rho\sigma} + \partial_\rho \gamma_{\nu\sigma} - \gamma_{\nu\rho} \partial_\sigma \gamma_{\nu\rho}) = \quad (3.2.12)$$

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu - 4\psi^{-1} (\gamma_{\rho\sigma} + \gamma_{\nu\sigma} \partial_\rho \psi - \gamma_{\nu\rho} \partial_\sigma \psi) \quad (3.2.13)$$

Άρα λοιπόν, με βάση τα παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{D}_\mu (\psi^n S^{ij}) &= \psi^n \partial_\mu S^{ij} + \psi^n \bar{\Gamma}_{\mu\rho}^i S^{\rho j} + \psi^n \bar{\Gamma}_{\mu\rho}^j S^{i\rho} + n\psi^{n-1} S^{ij} \partial_\mu \psi \\ &= \psi^n D_\mu S^{ij} + n\psi^{n-1} S^{ij} \partial_\mu \psi - 2\psi^{n-1} S^{ij} \gamma^{i\sigma} (\gamma_{\rho\sigma} \partial_\mu \psi + \gamma_{\mu\sigma} \partial_\rho \psi - \gamma_{\mu\rho} \partial_\sigma \psi) - \\ &= 2\psi^{n-1} S^{i\rho} \gamma^{j\sigma} (\gamma_{\rho\sigma} \partial_\mu \psi + \gamma_{\mu\sigma} \partial_\rho \psi - \gamma_{\mu\rho} \partial_\sigma \psi) = \\ &= \psi^n D_\mu S^{ij} + n\psi^{n-1} S^{ij} \partial_\mu \psi - 2\psi^{n-1} (S^{ij} \partial_\mu \psi + S^{\rho j} \delta_\mu^\rho \partial_\rho \psi - S_\mu^j \gamma^{i\sigma} \partial_\sigma \psi) - \\ &= 2\psi^{n-1} (S^{ij} \partial_\mu \psi + S^{i\rho} \delta_\mu^\rho \partial_\rho \psi - S^{i\rho} \gamma^{j\sigma} \gamma_{\mu\rho} \partial_\sigma \psi) \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \bar{D}_j (\psi^n S^{ij}) &= \psi^n D_j S^{ij} + n\psi^{n-1} S^{ij} \partial_j \psi - 10\psi^{n-1} S^{ik} \partial_k \psi \rightarrow \\ D_j S^{ij} &= \psi^{-n} \bar{D}_j (\psi^n S^{ij}) + (10 - n) S^{ik} \partial_k \ln \psi \end{aligned}$$

□

Με βάση την παραπάνω πρόταση, διαπιστώνουμε ότι, σε όρους του $\bar{A}_{ij}$ οι περιορισμοί της ορμής γράφονται ως

$$\bar{D}_j \bar{A}^{ij} - \frac{2}{3} \psi^6 \bar{D}^i K - 8\pi \psi^{10} j^i = 0 \quad (3.2.14)$$

Να σημειώσουμε ότι σε κάθε σύμμορφο τανυστή ανεβοκατεβάζουμε δείκτες χρησιμοποιώντας την σύμμορφη μετρική (οπότε $D^i K = \gamma^{ij} D_j K = \psi^{-4} \bar{\gamma}^{ij} \bar{D}_j K = \psi^{-4} \bar{D}^i K$). Τώρα θα εφαρμόσουμε τη σχέση 3.2.6 για να διασπάσουμε τον $\bar{A}^{ij}$. Οπότε, αν $\bar{\mathbf{L}}$ είναι ο αντίστοιχος τελεστής που σχετίζεται με τη σύμμορφη μετρική, τότε έχουμε τη διάσπαση

$$\bar{A}^{ij} = \bar{A}_*^{ij} + (\bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{W}})^{ij} \quad (3.2.15)$$

Τότε οι περιορισμοί της ορμής γίνονται

$$\bar{\Delta}_{\bar{\mathbf{L}}} \bar{W}^i - \frac{2}{3} \psi^6 \bar{D}^i K - 8\pi \psi^{10} j^i = 0 \quad (3.2.16)$$

όπου έχουμε ορίσει

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{\bar{\mathbf{L}}} &\equiv \bar{D}_j (\bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{W}})^{ij} \\ \bar{D}^2 W^i + \bar{D}_j \bar{D}^i W^j - \frac{2}{3} \bar{D}^i \bar{D}_j W^j &= \\ \bar{D}^2 \bar{W}^i + \frac{1}{3} \bar{D}^i \bar{D}_j \bar{W}^j + \bar{R}_j^i \bar{W}^j & \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Οπότε λοιπόν έχουμε ένα σύνολο τριών συζευγμένων ελλειπτικών εξισώσεων για τα $\bar{W}^i$.

Έστω τώρα ότι έχουμε ως δεδομένα την σύμμορφη μετρική $\bar{\gamma}_{ij}$ το ίχνος της εξωγενούς καμπυλότητας K και το συμμετρικό άιχνο εγκάρσιο τμήμα $\bar{A}_{ij}^{ij}$ του A_{ij} . Τότε, από την εξίσωση του χαμιλτονιανού περιορισμού 3.2.4 και τις εξισώσεις περιορισμού της ορμής 3.2.16 μπορούμε να βρούμε τον σύμμορφο παράγοντα ψ και το διάνυσμα $\bar{W}^i$. Από αυτά μπορούμε να κατασκευάσουμε τη φυσική μετρική γ_{ij} και την εξωγενή καμπυλότητα K_{ij} .

Ένα βασικό πρόβλημα στην παραπάνω διαδικασία είναι η εύρεση ενός εγκάρσιου(και συμμετρικού/άιχνου) τανυστή. Ξεκινάμε από έναν τυχαίο συμμετρικό και άιχνο τανυστή $\bar{M}^{ij}$, ο οποίος δεν είναι απαραίτητα εγκάρσιος. Τότε προφανώς ο τανυστής

$$\bar{M}_*^{ij} = \bar{M}^{ij} - (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{Y}})^{ij}$$

όπου $\bar{\mathbf{Y}}^i$ είναι ένα κατάλληλο διάνυσμα, είναι εγκάρσιος. Άρα πλέον ο στόχος μας είναι ο προσδιορισμός του $\bar{\mathbf{Y}}^i$. Παρατηρούμε ότι

$$\bar{\Delta}_{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{Y}}^i = \bar{D}_j\bar{M}^{ij} \quad (3.2.18)$$

Άρα αρκεί να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση και τότε, δεδομένου ενός τυχαίου συμμετρικού-άιχνου τανυστή $\bar{M}^{ij}$ θα έχουμε προσδιορίσει έναν συμμετρικό άιχνο και εγκάρσιο τανυστή $\bar{M}_*^{ij}$.

Αν $\bar{M}_*^{ij} = \bar{A}_*^{ij}$ τότε

$$\bar{A}^{ij} = \bar{M}_*^{ij} + (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{W}})^{ij} = \bar{M}^{ij} + (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{V}})^{ij}, \quad \bar{\mathbf{V}}^i \equiv \bar{W}^i - \bar{\mathbf{Y}}^i \quad (3.2.19)$$

το οποίο ισχύει διότι ο $\bar{\mathbf{L}}$ είναι γραμμικός τελεστής. Άρα οι εξισώσεις του χαμιλτινιανού περιορισμού και των περιορισμών της ορμής μπορούν να γραφθούν ως συναρτήσεις των $\bar{A}^{ij}$, $\bar{\mathbf{V}}^i$, $\bar{M}^{ij}$ ως

$$8\bar{D}^2\psi - \bar{R}\psi + \psi^{-7}\bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} - \frac{2}{3}\psi^5 K^2 + 16\pi\psi^5\rho = 0 \quad (3.2.20)$$

$$\bar{\Delta}_{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{V}}^i + \bar{D}_j\bar{M}^{ij} - \frac{2}{3}\psi^6\bar{D}^i K - 8\pi\psi^{10}j^i = 0 \quad (3.2.21)$$

Συνήθως ορίζουμε $\bar{\rho} \equiv \psi^8\rho$, $\bar{j}^i \equiv \psi^{10}j^i$. Ο παράγοντας ψ^{10} στον ορισμό του $\bar{j}^i$ επιλέχθηκε ώστε ο όρος $8\pi\psi^{10}j^i = 8\pi\bar{j}^i$ της 3.2.21 να μην περιέχει το ψ . Τότε η αποσύζευξη της 3.2.20 από τις 3.2.21 είναι ευκολότερη. Έχοντας λοιπόν ως ελεύθερα δεδομένα, την σύμμορφη μετρική $\bar{\gamma}_{ij}$, έναν συμμετρικό-άιχνο τανυστή $\bar{M}^{ij}$, το ίχνος της εξωγενούς καμπυλότητας K , και φυσικά τα $\bar{\rho}$, $\bar{j}^i$, λύνουμε τις παραπάνω εξισώσεις και λαμβάνουμε τα ψ , $\bar{\mathbf{V}}^i$. Οι φυσικές ποσότητες δίνονται στη συνέχεια από τις σχέσεις

$$\gamma_{ij} = \psi^4\bar{\gamma}_{ij} \quad (3.2.22)$$

$$K^{ij} = \psi^{-10}\bar{A}^{ij} + \frac{1}{3}\gamma^{ij}K, \quad \bar{A}^{ij} = (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{V}})^{ij} + \bar{M}^{ij} \quad (3.2.23)$$

Αν επιλέξουμε K να είναι σταθερό, τότε έχουμε αποσύζευξη της εξίσωσης χαμιλτονιανού περιορισμού από τις εξισώσεις περιορισμού της ορμής. Άρα σε αυτή την περίπτωση, λύνουμε αρχικά την εξίσωση περιορισμού της ορμής 3.2.20 οπότε προσδιορίζουμε το ψ και στη συνέχεια λύνουμε τις εξισώσεις περιορισμού της ορμής 3.2.21 προσδιορίζοντας τα $\bar{\mathbf{V}}^i$.

Επίσης, αν η φυσική μετρική είναι σύμμορφα επίπεδη, το οποίο σημαίνει πως η σύμμορφη μετρική ταυτίζεται με τη μετρική του επίπεδου χωροχρόνου, τότε τα Christoffel symbols μηδενίζονται άρα ο όρος $\bar{D}^2$ ταυτίζεται με τη λαπλασιανή του επίπεδου χώρου. Οπότε ο χαμιλτονιανός περιορισμός γράφεται

$$8\bar{D}_{flat}^2\psi - \bar{R}\psi + \psi^{-7}\bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} - \frac{2}{3}\psi^5 K^2 + 16\pi\psi^5\rho = 0 \quad (3.2.24)$$

3.2.2 Φυσική εγκάρσια διάσπαση

Τώρα θα κάνουμε μια διάσπαση του A^{ij} χωρίς να έχει προηγηθεί σύμμορφος μετασχηματισμός. Η διάσπαση γίνεται ως

$$A^{ij} = A_*^{ij} + (\mathbf{L}\mathbf{W})^{ij} \quad (3.2.25)$$

όπου $\bar{\mathbf{L}}$ είναι ο αντίστοιχος τελεστής που σχετίζεται με τη φυσική μετρική. Οι εξισώσεις περιορισμού της ορμής παίρνουν τη μορφή

$$\Delta_{\mathbf{L}}W^i - \frac{2}{3}D^i K - 8\pi j^i = 0 \quad (3.2.26)$$

Θεωρούμε τώρα έναν σύμμορφο μετασχηματισμό του W^i .

$$W_i = \psi^n \bar{W}^i \rightarrow W^i = \psi^{(n-4)} \bar{W}^i \quad (3.2.27)$$

Πρέπει τώρα να γράψουμε την παραπάνω εξίσωση σε όρους της σύμμορφης μετρικής $\bar{\gamma}_{ij} = \psi^{-4} \gamma_{ij}$ και του σύμμορφου τανυστή $\bar{W}_i$. Για να γίνει αυτό, θα μας φανεί χρήσιμη η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.6. *Ισχύει ότι*

$$(\mathbf{L}W)_{ij} = \psi^n (\bar{\mathbf{L}}\bar{W})_{ij} + \psi^n (n-4) [\bar{W}^i \partial_j \ln \psi + \bar{W}_j \partial_i \ln \psi - \frac{2}{3} \bar{\gamma}_{ij} \bar{W}^k \partial_k \ln \psi] \quad (3.2.28)$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε πως

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}W)_{ij} &= D_i W_j + D_j W_i - \frac{2}{3} \gamma_{ij} D_k W^k \\ \gamma_{ij} &= \psi^4 \bar{\gamma}_{ij} \\ W_i &= \psi^n \bar{W}_i \end{aligned}$$

Για τη συναλλοίωτη παραγώγος W_i έχουμε

$$\begin{aligned} D_i W_j &= \partial_i W_j - \Gamma_{ij}^\rho W_\rho = \partial_i W_j - \frac{1}{2} \gamma^{\rho\sigma} (\partial_i \gamma_{j\sigma} + \partial_j \gamma_{i\sigma} - \partial_\sigma \gamma_{ij}) W_\rho = \\ &= \psi^n \bar{D}_i \bar{W}_j + n \psi^{n-1} \bar{W}_j \partial_i \psi - \frac{1}{2} \cdot 4 \psi^{n-1} \bar{\gamma}^{\rho\sigma} (\bar{\gamma}_{j\sigma} \partial_i \psi + \bar{\gamma}_{i\sigma} \partial_j \psi - \bar{\gamma}_{ij} \partial_\sigma \psi) \bar{W}_\rho = \\ &= \psi^n \bar{D}_i \bar{W}_j + n \psi^{n-1} \bar{W}_j \partial_i \psi - 2 \psi^{n-1} (\bar{W}_j \partial_i \psi + \bar{W}_i \partial_j \psi - \bar{\gamma}_{ij} \bar{W}^\sigma \partial_\sigma \psi) = \\ &= \psi^n \bar{D}_i \bar{W}_j + n \psi^n \bar{W}_j \partial_i \ln \psi - 2 \psi^n (\bar{W}_j \partial_i \ln \psi + \bar{W}_i \partial_j \ln \psi - \bar{\gamma}_{ij} \bar{W}^\sigma \partial_\sigma \ln \psi) \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} D_k W^k &= \partial_k W^k + \Gamma_{k\rho}^\kappa W^\rho = \partial_k W^k + \frac{1}{2} (\gamma^{k\sigma} \partial_\rho \gamma_{k\sigma}) W^\rho = \\ &= \psi^{n-4} \bar{D}_k \bar{W}^k + (n-4) \psi^{n-5} \bar{W} \partial_k \psi + 2 \psi^{-1} \bar{\gamma}^{k\sigma} \gamma_{k\sigma} (\partial_\rho \psi) \psi^{n-4} \bar{W}^\rho = \\ &= \psi^{n-4} \bar{D}_k \bar{W}^k + (n+2) \psi^{n-5} \bar{W}^k \partial_k \psi = \\ &= \psi^{n-4} \bar{D}_k \bar{W}^k + (n+2) \psi^{n-4} \bar{W}^k \partial_k \ln \psi \end{aligned}$$

Άρα λοιπόν

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}W)_{ij} &= D_i W_j + D_j W_i - \frac{2}{3} \gamma_{ij} D_k W^k = \\ &= \psi^n (\bar{\mathbf{L}}\bar{W})_{ij} + (n-4) \psi^n [\bar{W}_j \partial_i \ln \psi + \bar{W}_i \partial_j \ln \psi] + [-(n+2) \cdot \frac{2}{3} + 4] \bar{\gamma}_{ij} \bar{W}^k \partial_k \ln \psi = \\ &= \psi^n (\bar{\mathbf{L}}\bar{W})_{ij} + (n-4) \psi^n [\bar{W}_j \partial_i \ln \psi + \bar{W}_i \partial_j \ln \psi - \frac{2}{3} \bar{\gamma}_{ij} \bar{W}^k \partial_k \ln \psi] \end{aligned}$$

□

Είναι φυσικό επομένως να διαλέξουμε $n = 4$. Με αυτή την επιλογή, έχουμε

$$(\mathbf{L}W)_{ij} = \psi^4 (\bar{\mathbf{L}}\bar{W})_{ij} \rightarrow (\mathbf{L}W)_{ij} = \psi^{-4} (\bar{\mathbf{L}}\bar{W})^{ij} \quad (3.2.29)$$

$$\bar{W}^i = W^i \quad (3.2.30)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση 3.2.9 για $n = 4$ έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{L}} W^i &= D_j (\mathbf{L}W)^{ij} = D_j [\psi^{-4} (\bar{\mathbf{L}}\bar{W})^{ij}] = \psi^{-4} [\bar{D}_j (\bar{\mathbf{L}}\bar{W})^{ij} + 6 (\bar{\mathbf{L}}\bar{W})^{ij} \partial_j \ln \psi] = \\ &= \psi^{-4} [\bar{\Delta}_{\mathbf{L}} \bar{W}^i + 6 (\bar{\mathbf{L}}\bar{W})^{ij} \partial_j \ln \psi] \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

Οπότε οι εξισώσεις περιορισμού της ορμής γίνονται

$$\bar{\Delta}_{\mathbf{L}} \bar{W}^i + 6 (\bar{\mathbf{L}}\bar{W})^{ij} \partial_j \ln \psi - \frac{2}{3} \bar{D}^i K - 8 \pi \psi^4 j^i = 0 \quad (3.2.32)$$

εφόσον $\psi^4 D^i K = \psi^4 \gamma^{ij} \partial_j K = \bar{\gamma}^{ij} \partial_j K = \bar{D}^i K$.

Στη συνέχεια, θα ακολουθήσουμε μια παρόμοια διαδικασία όπως στην προηγούμενη περίπτωση. Θεωρούμε έναν συμμετρικό και άγχο ταυυστή M^{ij} . Το εγκάρσιο τμήμα του είναι το

$$M_*^{ij} = M^{ij} - (\mathbf{L}Y)^{ij} \quad (3.2.33)$$

για κάποιο κατάλληλο διάνυσμα Y^i . Όπως και πρίν ισχύει ότι

$$\Delta_{\mathbf{L}} Y^i = D_j M^{ij} \quad (3.2.34)$$

Η διαφορά με την προηγούμενη περίπτωση είναι πως εδώ όλες οι ποσότητες είναι στον φυσικό χώρο και όχι στον σύμμορφο. Παίρνοντας $A_*^{ij} = M_*^{ij}$, έχουμε

$$A^{ij} = M^{ij} + (\mathbf{L}V)^{ij} \quad (3.2.35)$$

όπου $V^i \equiv W^i - Y^i$. Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι $\bar{W}^i = \bar{V}^i + \bar{Y}^i \rightarrow \bar{\Delta}_{\mathbf{L}} \bar{W}^i = \bar{\Delta}_{\mathbf{L}} \bar{V}^i + \bar{\Delta}_{\mathbf{L}} \bar{Y}^i$, και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 3.2.31, 3.2.32, 3.2.34, προκύπτει τελικά ότι οι εξισώσεις περιορισμού της ορμής γράφονται ως

$$\bar{\Delta}_{\mathbf{L}} \bar{V}^i + 6(\bar{\mathbf{L}}\bar{V})^{ij} \partial_j \ln \psi + \psi^4 D_j M^{ij} - \frac{2}{3} \bar{D}^i K - 8\pi \psi^4 j^i = 0 \quad (3.2.36)$$

όπου $\bar{V}^i = V^i$. Μένει μόνο να εκφράσουμε την ποσότητα $D_j M^{ij}$ σε όρους της συναλλοίωτης παραγώγου της σύμμορφης μετρικής $\bar{D}$ και του σύμμορφου ταυυστή $\bar{M}^{ij}$. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας την σχέση 3.2.9. Έχουμε λοιπόν

$$\bar{\Delta}_{\mathbf{L}} \bar{V}^i + 6(\bar{\mathbf{L}}\bar{V})^{ij} \partial_j \ln \psi + \psi^{-6} \bar{D}_j \bar{M}^{ij} - \frac{2}{3} \bar{D}^i K - 8\pi \psi^4 j^i = 0 \quad (3.2.37)$$

Οπότε το σύνολο εξισώσεων που πρέπει να λυθούν είναι οι

$$8\bar{D}^2 \psi - \bar{R}\psi + \psi^5 (A_{ij} A^{ij} - \frac{2}{3} K^2) + 16\pi \psi^5 \rho = 0 \quad (3.2.38)$$

$$\bar{\Delta}_{\mathbf{L}} \bar{V}^i + 6(\bar{\mathbf{L}}\bar{V})^{ij} \partial_j \ln \psi + \psi^{-6} \bar{D}_j \bar{M}^{ij} - \frac{2}{3} \bar{D}^i K - 8\pi \psi^4 j^i = 0 \quad (3.2.39)$$

Οι φυσικές ποσότητες θα βρεθούν στη συνέχεια από τις σχέσεις

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \bar{\gamma}_{ij} \quad (3.2.40)$$

$$K^{ij} = A^{ij} + \frac{1}{3} \gamma^{ij} K, \quad A^{ij} = \psi^{-4} (\bar{\mathbf{L}}\bar{V})^{ij} + \psi^{-10} \bar{M}^{ij} \quad (3.2.41)$$

Έχουμε τα ίδια ελεύθερα δεδομένα όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, δηλαδή τα $\bar{\gamma}_{ij}$, $\bar{M}^{ij}$, K , ρ , j^i . Ο χαμιλτονιανός περιορισμός είναι ίδιος αλλά οι περιορισμοί της ορμής διαφορετικοί. Αυτό θα φανεί καλύτερα αν μετατρέψουμε την εξίσωση 3.2.39 ως εξής. Ξεκινώντας από την παρακάτω σχέση

$$\psi^{-n} \bar{D}_j [\psi^n (\bar{\mathbf{L}}\bar{V})^{ij}] = \bar{\Delta}_{\mathbf{L}} \bar{V}^i + n(\bar{\mathbf{L}}\bar{V})^{ij} \partial_j \ln \psi \quad (3.2.42)$$

η εξίσωση 3.2.39 γράφεται

$$\bar{D}_j [\psi^6 (\bar{\mathbf{L}}\bar{V})^{ij}] + \bar{D}_j \bar{M}^{ij} - \frac{2}{3} \psi^6 \bar{D}^i K - 8\pi \psi^{10} j^i = 0 \quad (3.2.43)$$

Πράγματι είναι διαφορετική από την 3.2.21(η διαφορά βρίσκεται στον πρώτο όρο). Σε αυτή την περίπτωση δεν είναι δυνατή η αποσύνδεση της από την εξίσωση χαμιλτονιανού περιορισμού διότι το ψ περιέχεται και εντός της συναλλοίωτης παραγώγου στον πρώτο όρο.

Ακόμα κι αν τα ελεύθερα αρχικά δεδομένα είναι ακριβώς ίδια, επειδή οι εξισώσεις είναι διαφορετικές στις δύο προσεγγίσεις, τα φυσικά δεδομένα που προκύπτουν θα είναι διαφορετικά. Φυσικά και στις δύο περιπτώσεις είναι αποδεκτές λύσεις για το εν λόγω φυσικό σύστημα όμως υπάρχουν διαφορές.

3.2.3 Σταθμισμένη εγκάρσια διάσπαση

Στις προηγούμενες υποενότητες είδαμε τις διαδικασίες της σύμμορφης εγκάρσιας διάσπασης και της φυσικής εγκάρσιας διάσπασης της εξωγενούς καμπυλότητας. Καταλήξαμε σε διαφορετικές εξισώσεις των περιορισμών της ορμής σε κάθε περίπτωση. Οι εξισώσεις που προκύπτουν από την σύμμορφη εγκάρσια διάσπαση είναι απλούστερες, οπότε χρησιμοποιούνται περισσότερο στην πράξη. Βέβαια, το γεγονός πως καταλήξαμε σε διαφορετικά σύνολα εξισώσεων σε κάθε περίπτωση, υποδηλώνει πως καμία από τις δύο μεθόδους δεν είναι ιδανική. Η αιτία που οδήγησε στην εξαγωγή διαφορετικών εξισώσεων είναι το γεγονός πως ο σύμμορφος μετασχηματισμός ενός τανυστή δεν μετατίθεται με την εγκάρσια διάσπαση. Ας το δούμε λίγο πιο αναλυτικά

- Σύμμορφη εγκάρσια διάσπαση
1ο βήμα $\rightarrow$ σύμμορφος μετασχηματισμός του $\bar{A}^{ij}$
Υπενθυμίζουμε τη σχέση

$$D_j S^{ij} = \psi^{-n} \bar{D}_j (\psi^n S^{ij}) + (10 - n) S^{ik} \partial_k \ln \psi$$

Φυσική επιλογή για το n του μετασχηματισμού $\bar{A}^{ij} = \psi^n A^{ij}$ είναι το $n = 10$ ώστε $D_j A^{ij} = \psi^{-10} \bar{D}_j \bar{A}^{ij}$

2ο βήμα $\rightarrow$ διάσπαση $\bar{A}^{ij} = \bar{A}_*^{ij} + (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{W}})^{ij}$. Τότε

$$D_j A^{ij} = D_j (\psi^{-10} \bar{A}^{ij}) = \psi^{-10} \bar{D}_j \bar{A}^{ij} = \psi^{-10} \bar{D}_j (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{W}})^{ij}$$

- Φυσική εγκάρσια διάσπαση
1ο βήμα $\rightarrow$ διάσπαση $A^{ij} = A_*^{ij} + (\mathbf{L}\mathbf{W})^{ij}$
Υπενθυμίζουμε τις σχέσεις

$$(\mathbf{L}\mathbf{W})_{ij} = \psi^n (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{W}})_{ij} + \psi^n (n - 4) [\bar{W}^i \partial_j \ln \psi + \bar{W}_j \partial_i \ln \psi - \frac{2}{3} \bar{\gamma}_{ij} \bar{W}^k \partial_k \ln \psi]$$

$$W_i = \psi^n \bar{W}_i \rightarrow W^i = \psi^{n-4} \bar{W}^i$$

Τι n πρέπει να διαλέξουμε για να ισχύει $(\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{W}})^{ij} = \psi^m (\mathbf{L}\mathbf{W})^{ij}$; Σε αυτή την περίπτωση θα ισχύει $A^{ij} = A_*^{ij} + \psi^{-m} (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{W}})^{ij} \rightarrow D_j A^{ij} = D_j (\psi^{-m} (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{W}})^{ij})$.

Πρέπει $(\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{W}})^{ij} = \psi^m (\mathbf{L}\mathbf{W})^{ij} \Leftrightarrow (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{W}})_{ij} = \psi^{m-8} (\mathbf{L}\mathbf{W})_{ij} \Leftrightarrow (\mathbf{L}\mathbf{W})_{ij} = \psi^{8-m} (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{W}})_{ij}$

Πρέπει λοιπόν προφανώς $n = 4$. Τότε $8 - m = n \rightarrow m = 4$. Όμως τότε

$$D_j A^{ij} = D_j (\mathbf{L}\mathbf{W})^{ij} = D_j (\psi^{-4} (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{W}})^{ij}) \neq \psi^{-4} \bar{D}_j (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{W}})^{ij}$$

σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση όπου ο παράγοντας ψ^{-10} βγήκε έξω από την παράγωγο.

Η λύση στο πρόβλημα αυτό δόθηκε από τους Pfeiffer, York[17] οι οποίοι εισήγαγαν ένα νέο είδος διάσπασης τανυστών. Συγκεκριμένα η διάσπαση γίνεται ως

$$A^{ij} = A_*^{ij} + \frac{1}{\sigma} (\mathbf{L}\mathbf{W})^{ij} \quad (3.2.44)$$

όπου σ είναι θετική βαθμωτή ποσότητα. Στα πλαίσια αυτής της προσέγγισης, θεωρούμε τους ακόλουθους σύμμορφους μετασχηματισμούς

$$\bar{A}_*^{ij} = \psi^{10} A_*^{ij}, \quad \bar{W}^i = W^i, \quad \bar{\sigma} = \psi^{-6} \sigma \quad (3.2.45)$$

Τότε, εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι ισχύει

$$A^{ij} = A_*^{ij} + \frac{1}{\sigma} (\mathbf{L}\mathbf{W})^{ij} = \psi^{-10} \left[\bar{A}_*^{ij} + \frac{1}{\bar{\sigma}} (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{W}})^{ij} \right] = \psi^{-10} \bar{A}^{ij} \quad (3.2.46)$$

οπότε ο σύμμορφος μετασχηματισμός και η τανυστική διάσπαση μετατίθενται. Άρα, ως προς αυτή τη διάσπαση, υπάρχει συνέπεια μεταξύ των δύο μεθόδων εφόσον καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα.

Με βάση αυτή τη διάσπαση, οι εξισώσεις περιορισμού της ορμής γίνονται τώρα

$$\bar{D}_j \left[\frac{1}{\bar{\sigma}} (\bar{\mathbf{L}} \bar{W})^{ij} \right] - \frac{2}{3} \psi^6 \bar{D}^i K - 8\pi \psi^{10} j^i = 0 \quad (3.2.47)$$

Η συνέχεια είναι ανάλογη με τις προηγούμενες περιπτώσεις. Θεωρούμε έναν τυχαίο συμμετρικό άιχνο τανυστή $\bar{M}^{ij}$ ο οποίος διασπάται ως

$$\bar{M}^{ij} = \bar{M}_*^{ij} + \frac{1}{\bar{\sigma}} (\bar{\mathbf{L}} \bar{Y})^{ij} \quad (3.2.48)$$

Αν ορίσουμε $\bar{V}^i \equiv \bar{W}^i - \bar{Y}^i$ τότε οι εξισώσεις περιορισμού της ορμής γράφονται ως

$$\bar{D}_j \left[\frac{1}{\bar{\sigma}} (\bar{\mathbf{L}} \bar{V})^{ij} \right] + \bar{D}_j \bar{M}^{ij} - \frac{2}{3} \psi^6 \bar{D}^i K - 8\pi \psi^{10} j^i = 0 \quad (3.2.49)$$

Ο χαμιλτονιανός περιορισμός έχει την ίδια μορφή όπως πριν

$$8\bar{D}^2 \psi - \bar{R} \psi + \psi^{-7} \bar{A}_{ij} \bar{A}^{ij} - \frac{2}{3} \psi^5 K^2 + 16\pi \psi^5 \rho = 0 \quad (3.2.50)$$

Τα ελεύθερα δεδομένα είναι η σύμμορφη μετρική $\bar{\gamma}_{ij}$, ο συμμετρικός-άιχνος τανυστής $\bar{M}_{ij}$, το ίχνος της εξωγενούς καμπυλότητας K , οι πυκνότητες ενέργειας και ορμής $\bar{\rho}$, $\bar{j}^i$ και ο παράγοντας βάρους $\bar{\sigma}$. Με αυτά τα δεδομένα, από τις εξισώσεις προσδιορίζονται τα $\bar{V}^i$, ψ και στη συνέχεια κατασκευάζονται οι φυσικές ποσότητες από τις σχέσεις

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \bar{\gamma}_{ij} \quad (3.2.51)$$

$$K^{ij} = \psi^{-10} \bar{A}^{ij} + \frac{1}{3} \gamma^{ij} K, \quad \bar{A}^{ij} = \frac{1}{\bar{\sigma}} (\bar{\mathbf{L}} \bar{V})^{ij} + \bar{M}^{ij} \quad (3.2.52)$$

Βλέπουμε λοιπόν πως η μέθοδος που βασίζεται σε αυτήν την τανυστική διάσπαση είναι πιο συνεπής από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, όμως καταλήγει σε μια διαφορετική μορφή των εξισώσεων περιορισμών της ορμής η οποία περιέχει μια νέα ποσότητα, το θετικό βαθμωτό βάρος $\bar{\sigma}$ το οποίο πρέπει να επιλεγεί ως ελεύθερο δεδομένο. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα για το ποιά είναι η φυσική του σημασία. Θα δούμε στην επόμενη ενότητα πως προκύπτει φυσικά μια επιλογή για τη συγκεκριμένη συνάρτηση.

3.3 Σύμμορφη thin-sandwich προσέγγιση

Η σύμμορφη διάσπαση York-Lichnerowicz που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα, μας δίνει έναν ξεκάθαρο τρόπο να βρίσκουμε λύσεις των εξισώσεων περιορισμού. Απλώς πρέπει να καθορίσουμε τα ελεύθερα δεδομένα, δηλαδή τη σύμμορφη μετρική $\bar{\gamma}_{ij}$, έναν συμμετρικό-άιχνο τανυστή $\bar{M}_{ij}$, το ίχνος της εξωγενούς καμπυλότητας K και τις πυκνότητες ενέργειας και ορμής $\bar{\rho}$, $\bar{j}^i$. Βέβαια, δεν είναι ξεκάθαρο πως θα πρέπει να προσδιοριστεί ο τανυστής $\bar{M}_{ij}$ για να αντιπροσωπεύει μια συγκεκριμένη φυσική κατάσταση. Επίσης, κάθε διάσπαση θα οδηγεί σε διαφορετικά αρχικά δεδομένα, όταν τα ελεύθερα δεδομένα είναι ίδια. Φαινομενικά καλύτερη μέθοδος είναι η σταθμισμένη εγκάρσια διάσπαση αλλά σε αυτή την περίπτωση υπάρχει και το πρόβλημα επιλογής του βάρους $\bar{\sigma}$ το οποίο επίσης δεν έχει ξεκάθαρη φυσική ερμηνεία. Μια διαφορετική προσέγγιση κατασκευής αρχικών δεδομένων είναι η σύμμορφη thin-sandwich προσέγγιση η οποία προτάθηκε από τον York [21]. Η βασική ιδέα είναι το να προσδιορίσουμε τη σύμμορφη μετρική σε δύο γειτονικές υπερεπιφάνειες (thin-sandwich) ή ισοδύναμα τη σύμμορφη μετρική και τη χρονική της παράγωγο σε μια δεδομένη υπερεπιφάνεια. Έχουμε λοιπόν ένα σύμμορφο μετασχηματισμό της μετρικής $\bar{\gamma}_{ij} = \psi^{-4} \gamma_{ij}$ και ορίζουμε

$$\bar{u}_{ij} \equiv \partial_t \bar{\gamma}_{ij} \quad (3.3.1)$$

Απαιτούμε επίσης το στοιχείο όγκου της σύμμορφης μετρικής να παραμένει στιγμιαία σταθερό, δηλαδή

$$\partial_t \bar{\gamma} = \bar{\gamma} \bar{\gamma}^{ij} \partial_t \bar{\gamma}_{ij} = \bar{\gamma}^{ij} \bar{u}_{ij} = 0 \quad (3.3.2)$$

Θεωρούμε τώρα το άιχνο τμήμα της εξίσωσης χρονικής εξέλιξης της φυσικής μετρικής γ_{ij} και ορίζουμε

$$\begin{aligned} u_{ij} \equiv \partial_t \gamma_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} (\gamma^{mn} \partial_t \gamma_{mn}) = \\ -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i - \frac{1}{3} \gamma_{ij} (-2\alpha K + 2D_k \beta^k) = \\ -2\alpha A_{ij} + (\mathbf{L}\beta)_{ij} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Από την 3.3.2 βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^{ij} \partial_t \bar{\gamma}_{ij} = 0 &\rightarrow \psi^4 \gamma^{ij} \partial_t (\psi^{-4} \gamma_{ij}) = 0 \rightarrow \gamma^{ij} \partial_t \gamma_{ij} - 4\psi^{-1} \gamma^{ij} \gamma_{ij} \partial_t \psi = 0 \rightarrow \frac{1}{\gamma} \partial_t \gamma = 12 \partial_t \ln \psi \rightarrow \\ \partial_t \ln \gamma^{1/12} &= \partial_t \ln \psi \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι

$$\bar{u}_{ij} = \partial_t (\psi^{-4} \gamma_{ij}) = \psi^{-4} (\partial_t \gamma_{ij} - 4\gamma_{ij} \partial_t \ln \psi) = \psi^{-4} \left(\partial_t \gamma_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} \partial_t \ln \gamma \right) = \psi^{-4} u_{ij} \quad (3.3.5)$$

Παρατηρώντας ότι ισχύει $(\mathbf{L}\beta)^{ij} = \psi^{-4} (\bar{\mathbf{L}}\beta)^{ij}$ (εφόσον $\beta^i = \bar{\beta}^i$) τότε από τις 3.3.3, 3.3.5 έχουμε ότι

$$A^{ij} = \frac{1}{2\alpha} [(\mathbf{L}\beta)^{ij} - u^{ij}] = \frac{\psi^{-4}}{2\alpha} [(\bar{\mathbf{L}}\beta)^{ij} - \bar{u}^{ij}] \quad (3.3.6)$$

οπότε παίρνοντας όπως πριν $\bar{A}^{ij} = \psi^{10} A^{ij}$ τότε

$$\bar{A}^{ij} = \frac{1}{2\bar{\alpha}} [(\bar{\mathbf{L}}\beta)^{ij} - \bar{u}^{ij}] \quad (3.3.7)$$

όπου έχουμε ορίσει τη σύμμορφη συνάρτηση μετάβασης ως $\bar{\alpha} \equiv \psi^{-6} \alpha$.

Από τις 3.2.5, 3.2.9, 3.3.7 διαπιστώνουμε ότι οι εξισώσεις περιορισμού τις ορμής γράφονται

$$\bar{D}_j \left[\frac{1}{2\bar{\alpha}} (\bar{\mathbf{L}}\beta)^{ij} \right] - \bar{D}_j \left[\frac{1}{2\bar{\alpha}} \bar{u}^{ij} \right] - \frac{2}{3} \psi^6 \bar{D}^i K - 8\pi \psi^{10} j^i = 0 \quad (3.3.8)$$

Ο χαμιλτονιανός περιορισμός είναι ίδιος με τις προηγούμενες περιπτώσεις

$$8\bar{D}^2 \psi - \bar{R}\psi + \psi^{-7} \bar{A}_{ij} \bar{A}^{ij} - \frac{2}{3} \psi^5 K^2 + 16\pi \psi^5 \rho = 0 \quad (3.3.9)$$

Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν, τα ελεύθερα δεδομένα είναι η σύμμορφη μετρική $\bar{\gamma}_{ij}$, η παράγωγος της $\bar{u}^{ij}$, το ίχνος της εξωγενούς καμπυλότητας K , η σύμμορφη συνάρτηση μετάβασης $\bar{\alpha}$ και οι πυκνότητες ενέργειας και ορμής $\bar{\rho}$, $\bar{j}^i$. Με προσδιορισμένα αυτά τα ελεύθερα δεδομένα, λύνουμε τις παραπάνω εξισώσεις για το σύμμορφο παράγοντα ψ και το διάνυσμα μετατόπισης β^i . Οι φυσικές ποσότητες κατασκευάζονται στη συνέχεια από τις σχέσεις

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \bar{\gamma}_{ij} \quad (3.3.10)$$

$$K^{ij} = \psi^{-10} \bar{A}^{ij} + \frac{1}{3} \bar{\gamma}^{ij} K, \quad \bar{A}^{ij} = \frac{1}{2\bar{\alpha}} [(\bar{\mathbf{L}}\beta)^{ij} - \bar{u}^{ij}] \quad (3.3.11)$$

Θα κάνουμε τώρα ορισμένα σχόλια σχετικά με αυτή τη μέθοδο. Αρχικά, εκτός του ότι καταλήγουμε στα ζητούμενα αρχικά δεδομένα γ_{ij} , K^{ij} τα οποία ικανοποιούν τις εξισώσεις περιορισμού, έχουμε ταυτόχρονα προσδιορίσει και τις συναρτήσεις βαθμίδας β^i , $\alpha = \psi^6 \bar{\alpha}$. Άρα εκτός από τις δυναμικές ποσότητες, λαμβάνουμε αρχικά δεδομένα και για τις συναρτήσεις βαθμίδας. Φυσικά έχουμε την ελευθερία να αγνοήσουμε τις τιμές αυτές και να ξεκινήσουμε τη χρονική εξέλιξη με αυθαίρετες τιμές για τις συναρτήσεις βαθμίδας. Η μετρική και η εξωγενής καμπυλότητα θα συνεχίσουν να ικανοποιούν τις εξισώσεις περιορισμού. Αν όμως επιλέξουμε να κρατήσουμε τις τιμές που προέκυψαν, τότε η χρονική παράγωγος της φυσικής μετρικής θα δίνεται από τη σχέση

$$\partial_t \gamma_{ij} = \partial_t (\psi^4 \bar{\gamma}_{ij}) = u_{ij} + \frac{2}{3} \gamma_{ij} (D_k \beta^k - \alpha K) = \psi^4 \left[\bar{u}_{ij} + \frac{2}{3} \bar{\gamma}_{ij} (\bar{D}_k \beta^k + 6\beta^k \partial_k \ln \psi - \psi^6 \bar{\alpha} K) \right] \quad (3.3.12)$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \partial_t \gamma_{ij} &= \partial_t (\psi^4 \bar{\gamma}_{ij}) = \psi^4 \partial_t \bar{\gamma}_{ij} + 4\psi^3 \bar{\gamma}_{ij} \partial_t \psi = u_{ij} + 4\gamma_{ij} \partial_t \ln \psi = u_{ij} + 4\gamma_{ij} \partial_t \ln \gamma^{1/12} = \\ &= u_{ij} + \frac{4}{12} \gamma_{ij} \gamma^{-1/12} \gamma^{-1/12} \partial_t \gamma = u_{ij} + \frac{1}{3} \gamma_{ij} \gamma^{-1} \partial_t \gamma \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι $\partial_t \gamma = \gamma(-2\alpha K + 2D_k \beta^k)$ έχουμε

$$\partial_t \gamma_{ij} = u_{ij} + \frac{2}{3} \gamma_{ij} (D_k \beta^k - \alpha K) = \psi^4 (\bar{u}_{ij} + \frac{2}{3} \bar{\gamma}_{ij} (\bar{D}_k \beta^k + 6\beta^k \partial_k \ln \psi - \psi^6 \bar{\alpha} K))$$

διότι

$$\begin{aligned} D_k \beta^k &= \partial_k \beta^k + \Gamma_{k\rho}^k \beta^\rho = \partial_k \beta^k + \frac{1}{2} \gamma^{\kappa\sigma} (\partial_\rho \gamma_{\kappa\sigma}) \beta^\rho = \partial_k \beta^k + \frac{1}{2} \psi^{-4} \bar{\gamma}^{\kappa\sigma} (\partial_\rho \psi^4 \bar{\gamma}_{\kappa\sigma}) \beta^\rho = \\ &= \partial_k \beta^k + 6\beta^\rho \partial_\rho \ln \psi + \bar{\Gamma}_{k\rho}^k \beta^\rho = \bar{D}_k \beta^k + 6\beta^\rho \partial_\rho \ln \psi \end{aligned}$$

Παρόλο που οι συναρτήσεις βαθμίδας προκύπτουν από τη λύση των εξισώσεων περιορισμού, η σύμμορφη συνάρτηση βαθμίδας $\bar{\alpha}$ είναι ελεύθερο δεδομένο, οπότε τίθεται το ερώτημα για το ποιά θα ήταν μια καλή επιλογή για αυτή την ποσότητα. Φυσικά μπορούμε να την ορίσουμε αυθαίρετα, όμως υπάρχει ένας πιο φυσικός τρόπος από τον οποίο προκύπτει ο ορισμός της τιμής αυτής. Θα αλλάξουμε τον τρόπο προσέγγισης και πλέον θα θεωρούμε σαν ελεύθερα δεδομένα τα $\bar{\gamma}_{ij}$, $\bar{u}_{ij} = \partial_t \bar{\gamma}_{ij}$ αλλά και τα K , $\bar{K} = \partial_t K$. Από αυτά τα δεδομένα μπορεί να προσδιοριστεί το $\bar{\alpha}$ ως εξής. Από τις ADM εξισώσεις χρονικής εξέλιξης έχουμε

$$\begin{aligned} \partial_t K &= \beta^j \partial_j K - D^2 \alpha + \alpha(R + K^2) + 4\pi\alpha(S - 3\rho) = \\ &= \beta^j \partial_j K - D^2 \alpha + \alpha K_{ij} K^{ij} + 4\pi\alpha(S + \rho) \\ &= \beta^j \partial_j K - D^2 \alpha + \alpha \left(A_{ij} A^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right) + 4\pi\alpha(S + \rho) \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

όπου στη δεύτερη γραμμή χρησιμοποιήσαμε τον χαμιλτονιανό περιορισμό 3.0.1 για να εξαφανίσουμε το R . Για την παράγωγο του α ισχύει

$$D^2 \alpha = \psi^{-4} [\bar{D}^2 \alpha + 2\bar{\gamma}^{mn} \partial_m \alpha \partial_n \ln \psi] \quad (3.3.14)$$

Άρα

$$\partial_t K = \beta^j \partial_j K - \psi^{-4} \bar{D}^2 \alpha - 2\psi^{-5} \bar{D}_m \alpha \bar{D}^m \psi + \alpha \left(\psi^{-12} \bar{A}_{ij} \bar{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right) + 4\pi\alpha(S + \rho) \quad (3.3.15)$$

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\bar{D}^2 \alpha = \bar{D}^2 (\psi^6 \bar{\alpha}) = \psi^6 \bar{D}^2 \bar{\alpha} + 6\bar{\alpha} \psi^5 \bar{D}^2 \psi + 30\bar{\alpha} \psi^4 \bar{D}_m \psi \bar{D}^m \psi + 12\psi^5 \bar{D}_m \bar{\alpha} \bar{D}^m \psi \quad (3.3.16)$$

και

$$\bar{D}_m \alpha \bar{D}^m \psi = \bar{D}_m (\psi^6 \bar{\alpha}) \bar{D}^m \psi = \psi^6 \bar{D}_m \bar{\alpha} \bar{D}^m \psi + 6\bar{\alpha} \psi^5 \bar{D}_m \psi \bar{D}^m \psi \quad (3.3.17)$$

Άρα, με τη χρήση των παραπάνω σχέσεων και του χαμιλτονιανού περιορισμού στη μορφή 3.2.20 (για να εξαφανίσουμε τον όρο $\bar{D}^2 \psi$), η εξίσωση της χρονικής παραγωγού του K μετασχηματίζεται στην

$$\begin{aligned} \bar{D}^2 \bar{\alpha} + \bar{\alpha} \left[\frac{3}{4} \bar{R} - \frac{7}{4} \psi^{-8} \bar{A}_{ij} \bar{A}^{ij} + \frac{1}{6} \psi^4 K^2 + 42(\bar{D}_m \ln \psi)^2 \right] + 14\bar{D}_m \bar{\alpha} \bar{D}^m \ln \psi + \\ \psi^{-2} (\partial_t K - \beta^m \partial_m K) - 4\pi\bar{\alpha} \psi^4 (S + 4\rho) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε μια ελλειπτική εξίσωση για το $\bar{\alpha}$. Η εξίσωση αυτή είναι συζευγμένη με τις υπόλοιπες 4 εξισώσεις περιορισμών, οπότε τελικά έχουμε ένα σύστημα από 5 συζευγμένες εξισώσεις από τις οποίες προκύπτουν τα ψ , $\bar{\alpha}$, β^i με δεδομένα τα $\bar{\gamma}_{ij}$, K και των χρονικών παραγώγων αυτών.

Θα κάνουμε ένα τελικό σχόλιο για τη σύνδεση που υπάρχει μεταξύ της σύμμορφης thin-sandwich προσέγγισης και της York-Lichnerowicz σταθμισμένης εγκάρσιας διάσπασης. Παρατηρούμε ότι αν, στα πλαίσια της σταθμισμένης εγκάρσιας διάσπασης, επιλέξουμε

$$\bar{V}^i = \bar{\beta}^i = \beta^i, \quad \bar{\sigma} = 2\bar{\alpha}, \quad \bar{M}^{ij} = -\bar{u}^{ij}/2\bar{\alpha} \quad (3.3.19)$$

τότε οι εξισώσεις γίνονται ίδιες με αυτές που προκύπτουν στα πλαίσια της σύμμορφης thin-sandwich προσέγγισης. Με αυτή την παρατήρηση διαπιστώνουμε ότι η York-Lichnerowicz σταθμισμένη εγκάρσια διάσπαση και η σύμμορφη thin-sandwich προσέγγιση είναι συνεπείς μεταξύ τους. Επίσης, βλέπουμε πως οι φυσικές επιλογές για την συνάρτηση $\bar{\sigma}$ και τον ταυστή $\bar{M}^{ij}$, όπου στα πλαίσια της σταθμισμένης εγκάρσιας διάσπασης δεν είχαν κανένα φυσικό νόημα, είναι οι τιμές $2\bar{\alpha}$, $-\bar{u}^{ij}/2\bar{\alpha}$.

Κεφάλαιο 4

Αρχικά Δεδομένα σε Συστήματα Μελανών Οπών

4.1 Στιγμαιαία στατικά αρχικά δεδομένα

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε μια συγκεκριμένη κατηγορία αρχικών δεδομένων που ονομάζονται στιγμαιαία στατικά δεδομένα. Τέτοιου είδους δεδομένα, όπως θα δούμε, επάγουν μια τοπική συμμετρία της μετρικής του χωροχρόνου στη γειτονιά της υπερεπιφάνειας που ορίζονται. Αυτός είναι και ο λόγος που τέτοια αρχικά δεδομένα, χαρακτηρίζουν φυσικά συστήματα τα οποία βρίσκοντα αρχικά σε «ηρεμία». Συγκεκριμένα θα κατασκευάσουμε σύνολα αρχικών δεδομένων που χαρακτηρίζουν χωροχρόνους που περιέχουν μία ή πολλές μελανές οπές Schwarzschild και θα μελετήσουμε τη γεωμετρία της αρχικής υπερεπιφάνειας στην οποία αυτά ορίζονται.

Αρχικά θα ορίσουμε την έννοια του ασυμπτωτικά επίπεδου χωροχρόνου. Ένας ασυμπτωτικά επίπεδος χωροχρόνος, αναδύεται στην περίπτωση ενός συστήματος σωμάτων τα οποία είναι μόνα τους σε ένα κατά τα άλλα άδειο σύμπαν. Φυσικά δεν υπάρχει ακριβώς μια τέτοια κατάσταση αλλά σε πολλές περιπτώσεις αποτελεί μια καλή προσέγγιση.[18]

Ορισμός 4.1. (Ασυμπτωτικά επίπεδος χωροχρόνος)

Θεωρούμε έναν καθολικά υπερβολικό χωροχρόνο $(M, g_{\mu\nu})$ ο οποίος έχει διαμεριστεί από μια οικογένεια $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ χωροειδών υπερεπιφανειών. Έστω γ_{ij} , K_{ij} η επαγόμενη μετρική και η εξωγενής καμπυλότητα των υπερεπιφανειών Σ_t . Λέμε ότι ο χωροχρόνος είναι ασυμπτωτικά επίπεδος αν και μόνο αν σε κάθε υπερεπιφάνεια Σ_t υπάρχει μια Riemannian μετρική f_{ij} (μετρική υποβάθρου) τέτοια ώστε

- Να είναι επίπεδη, εκτός ίσως από μια συμπαγή δομή B της Σ_t (περιοχή ισχυρού πεδίου). Δηλαδή ο τανυστής Riemann ως προς αυτή τη μετρική, σε όλα τα σημεία εκτός του B μηδενίζεται.
- Υπάρχει ένα σύστημα συντεταγμένων $(x)^i = (x, y, z)$ στην Σ_t τέτοιο ώστε, εκτός του B , τα στοιχεία της f_{ij} ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων να είναι $f_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$ (καρτεσιανού τύπου συντεταγμένες) και η μεταβλητή $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ να παίρνει αυθαίρετα μεγάλες τιμές στην Σ_t .
- όταν $r \rightarrow \infty$, τα στοιχεία της μετρικής γ_{ij} ως προς τις συντεταγμένες (x^i) ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\gamma_{ij} = f_{ij} + O(r^{-1}) \quad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} = O(r^{-2}) \quad (4.1.2)$$

- όταν $r \rightarrow \infty$, τα στοιχεία της εξωγενούς καμπυλότητας K_{ij} ως προς τις συντεταγμένες (x^i) ικανοποιούν τις σχέσεις

$$K_{ij} = O(r^{-2}) \quad (4.1.3)$$

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial x^k} = O(r^{-3}) \quad (4.1.4)$$

Η περιοχή $r \rightarrow +\infty$ ονομάζεται χωρικό άπειρο και συμβολίζεται με i^0 .

Μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του ασυμπτωτικά επίπεδου χωροχρόνου χωρίς να αναφερθούμε σε συστήματα συντεταγμένων[20], όμως στα πλαίσια της μελέτης που κάνουμε εδώ μας αρκεί ο παραπάνω ορισμός.

Ορισμός 4.2. (Πλήρως γεωδαισιακή υπερεπιφάνεια)

Έστω μια υπερεπιφάνεια (Σ, γ_{ij}) της πολλαπλότητας $(M, g_{\mu\nu})$. Αν κάθε γεωδαισιακή καμπύλη της Σ είναι και γεωδαισιακή της M τότε η Σ λέγεται πλήρως γεωδαισιακή υπερεπιφάνεια

Πρόταση 4.1. Μια υπερεπιφάνεια Σ είναι πλήρως γεωδαισιακή αν και μόνο αν $K_{ij} = 0$ σε κάθε σημείο αυτής.

Απόδειξη. Έστω δύο διανυσματικά πεδία U^i, V^i τα οποία είναι εφαπτόμενα στην Σ . Αν $D_U V^i = U^j D_j V^i$, $\nabla_U V^i = U^j \nabla_j V^i$ (οι κατά κατεύθυνση συναλλοίωτες παράγωγοι. Επίσης προφανώς $D_j V^i = \gamma_j^\alpha \gamma_\beta^i \nabla_\alpha V^\beta$.) τότε εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$D_U V^i = \nabla_U V + K(U, V)\eta^i \quad (4.1.5)$$

όπου η^i το μοναδιαίο ορθογώνιο διανυσματικό πεδίο στην Σ . Έστω λοιπόν τώρα μια γεωδαισιακή καμπύλη S της (Σ, γ_{ij}) και έστω u το εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο που σχετίζεται με κάποια affine παραμετροποίηση της S . Τότε $D_u u = 0$. Από την παραπάνω εξίσωση καταλήγουμε στην

$$\nabla_u u^i = -K(u, u)\eta^i$$

Αν η S ήταν γεωδαισιακή της (M, g_{ij}) τότε θα ίσχυε $\nabla_u u = \kappa u$ για κάποια non-affine παράμετρο κ . Το u^i δεν γίνεται να είναι παράλληλο με το η^i οπότε για να είναι η S γεωδαισιακή της (M, g_{ij}) θα πρέπει αναγκαστικά $K_{ij} = 0$ (μπορούμε να πούμε και πως το K_{ij} μετράει την «αποτυχία» μιας γεωδαισιακής της (Σ, γ_{ij}) να είναι ταυτόχρονα γεωδαισιακή της (M, g_{ij})). $\square$

Ορισμός 4.3. (Στηγμαία στατικά(ή χρονικά συμμετρικά) δεδομένα)

Αρχικά δεδομένα (γ_{ij}, K_{ij}) ορισμένα σε κάποια υπερεπιφάνεια Σ_0 με $K_{ij} = 0$ λέγονται στηγμαία στατικά ή χρονικά συμμετρικά αρχικά δεδομένα.

Αυτός ο ορισμός δεν είναι και πολύ διαφωτιστικός οπότε θα εξηγήσουμε πιο αναλυτικά τι ακριβώς σημαίνει «στιγμαία στατικά δεδομένα». Έστω μια υπερεπιφάνεια Σ , η^i το μοναδιαίο ορθογώνιο διανυσματικό πεδίο σε αυτή και $m^i = \alpha \eta^i$ το ορθογώνιο διάνυσμα χρονικής εξέλιξης. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί πως ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$\nabla_i m^j = -\alpha K_i^j - D^j \alpha \eta_i + \eta^j \nabla_i \alpha \rightarrow \nabla_i m^j = -\alpha K_i^j - \nabla^j \alpha \eta_i - \eta^j \eta_k \nabla^k \alpha \eta_i + \eta^j \nabla_i \alpha \quad (4.1.6)$$

Από αυτή τη σχέση διαπιστώνουμε ότι

$$\mathcal{L}_{\vec{m}} g_{ij} = g_{\alpha j} \nabla_i m^\alpha + g_{i\beta} \nabla_j m^\beta = \nabla_i m_j + \nabla_j m_i = -2\alpha K_{ij} - 2\eta_i \eta_j \eta^k \nabla_k \alpha \quad (4.1.7)$$

Μπορούμε να επιλέξουμε $\alpha = 1$, $\beta^i = 0$ στη γειτονιά της αρχικής υπερεπιφάνειας Σ_0 . Σε αυτή την περίπτωση εύκολα διαπιστώνουμε πως

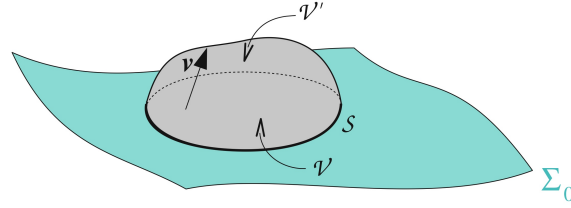
- Οι γραμμές σταθερών χωρικών συντεταγμένων (χρονικές γραμμές) είναι ορθογώνιες στις υπερεπιφάνειες ($\eta^\mu = (1, \vec{0})$).
- Ο χρόνος t του συστήματος συντεταγμένων ταυτίζεται με τον ιδιόχρονο ενός κανονικού παρατηρητή ($\delta t = \delta \tau$).

Οι συντεταγμένες αυτές λέγονται **γκαουσιανές κανονικές συντεταγμένες** και η διαμέριση των υπερεπιφανειών στη γειτονιά της Σ_0 που αντιστοιχεί σε αυτή την επιλογή για τη συνάρτηση μετάβασης α ονομάζεται **geodesic slicing**. Αν επίσης έχουμε δεδομένα με $K_{ij} = 0$, τότε από την 4.1.7 έχουμε

$$\mathcal{L}_{\vec{m}} g_{ij} = 0 \quad (4.1.8)$$

δηλαδή το ορθογώνιο διανυσματικό πεδίο χρονικής εξέλιξης m^i είναι τοπικά Killing Vector Field. Να δούμε λίγο πιο αναλυτικά τι σημαίνει αυτό. Αν σ_0 ένα σημείο της Σ_0 , σ_t το σημείο τομής της ολοκληρωτικής καμπύλης του m^i που διέρχεται από το σ_0 με την υπερεπιφάνεια Σ_t , τότε ισχύει

$$\mathcal{L}_{\vec{m}} g_{ij}|_{\sigma_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^*(g_{ij}|_{\sigma_t}) - g_{ij}|_{\sigma_0}) \quad (4.1.9)$$



Σχήμα 4.1: Ένα χωρίο $\mathcal{V}$ της υπερεπιφάνειας Σ_0 και μια μικρή παραμόρφωση $\mathcal{V}'$ του $\mathcal{V}$ με το ίδιο σύνορο S .

όπου $\phi_t^* g_{ij}$ το pullback της μετρικής μέσω του diffeomorphism που ορίζεται από τις ολοκληρωτικές καμπύλες του m^i . Άρα η 4.1.8 σημαίνει ότι

$$\phi_t^*(g_{ij}|_{\sigma_t}) = g_{ij}|_{\sigma_0} \Rightarrow \phi_t^*(\gamma_{ij}|_{\sigma_t}) = \gamma_{ij}|_{\sigma_0} \Leftrightarrow (\phi_t)_*(\gamma_{ij}|_{\sigma_0}) = \gamma_{ij}|_{\sigma_t} \quad (4.1.10)$$

όταν $t \rightarrow 0$ δηλαδή σε γειτονικές υπερεπιφάνειες. Βλέπουμε λοιπόν πως υπάρχει μια τοπική συμμετρία της μετρικής κάτω από «μετατοπίσεις» που προκύπτουν από το διανυσματικό πεδίο m^i . Επειδή αυτό το Killing Vector Field είναι χρονοειδές, λέμε ότι το σύστημα είναι **στάσιμο**. Δηλαδή υπάρχει κάποιος παρατηρητής ο οποίος σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα(στιγμιαία) δεν θα αντιληφθεί κάποια αλλαγή στη γεωμετρία. Επιπλέον, επειδή το Killing Vector Field είναι ορθογώνιο σε υπερεπιφάνεια, λέμε ότι το σύστημα είναι **στατικό**. Φυσικά η σχέση 4.1.8 θα ισχύει μόνο στην Σ_0 διότι δεν μας εγγυάται κανείς ότι η χρονική εξέλιξη των αρχικών δεδομένων με $K_{ij} = 0$ όταν $t = 0$ θα διατηρεί $K_{ij} = 0$ για $t > 0$. Οπότε αυτή η συμμετρία θα ισχύει μόνο στη γειτονιά της αρχικής υπερεπιφάνειας, γι αυτό και τέτοιου είδους αρχικά δεδομένα, δηλαδή με $K_{ij} = 0$ για $t = 0$ ονομάζονται στιγμιαία στατικά αρχικά δεδομένα. Αυτά τα δεδομένα θα χαρακτηρίζαν ένα φυσικό σύστημα το οποίο θα ήταν αρχικά «ακίνητο».

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια της τοπικά ελάχιστης/τοπικά μέγιστης υπερεπιφάνειας μιας πολλαπλότητας.

Ορισμός 4.4. (Τοπικά ελάχιστη/μέγιστη υπερεπιφάνεια)

Έστω $(M, g_{\mu\nu})$ μια n -διάστατη πολλαπλότητα, (Σ_0, γ_{ij}) μια $(n-1)$ -διάστατη υπερεπιφάνεια της M και S μια $(n-2)$ -διάστατη κλειστή επιφάνεια της Σ_0 . Η Σ_0 λέγεται τοπικά ελάχιστη/μέγιστη υπερεπιφάνεια της πολλαπλότητας $(M, g_{\mu\nu})$ αν ο όγκος V του χωρίου $\mathcal{V}$, το οποίο αποτελείται από όλα τα σημεία της Σ_0 που περιλαμβάνονται από την S , είναι τοπικά ελάχιστος/μέγιστος υπό την έννοια πως είναι μικρότερος/μεγαλύτερος από κάθε άλλο όγκο κάποιου χωρίου $\mathcal{V}'$ που προκύπτει από μια απειροστά μικρή παραμόρφωση του $\mathcal{V}$ κρατώντας όμως σταθερά τα σημεία της S , όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1.

Πρόταση 4.2. Μια υπερεπιφάνεια (Σ, γ_{ij}) κάποιας πολλαπλότητας $(M, g_{\mu\nu})$ είναι τοπικά ελάχιστη/μέγιστη αν και μόνο αν, σε κάθε σημείο της, για το ίχνος της εξωγενούς καμπυλότητας της υπερεπιφάνειας ισχύει

$$K = 0 \quad (4.1.11)$$

Συγκεκριμένα

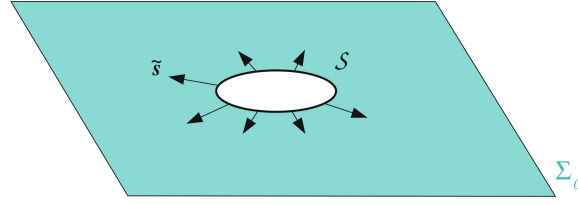
- Αν η $g_{\mu\nu}$ έχει υπογραφή 1 και η γ_{ij} έχει υπογραφή 0 τότε η Σ είναι τοπικά μέγιστη.
- Αν η $g_{\mu\nu}$ έχει υπογραφή 0(τότε προφανώς και η γ_{ij} έχει υπογραφή 0) τότε η Σ είναι τοπικά ελάχιστη.

Έστω ένας ασυμπτωτικά επίπεδος χωροχρόνος. Θα δουλέψουμε στα πλαίσια της σύμμορφης εγκάρσιας διάσπασης. Συγκεκριμένα θεωρούμε ότι η σύμμορφη μετρική είναι επίπεδη $\bar{\gamma}_{ij} = f_{ij}$. Θεωρούμε επίσης $\bar{M}^{ij} = 0$ και $K = 0$ (τοπικά μέγιστη υπερεπιφάνεια). Επίσης θεωρούμε ότι ο χωροχρόνος είναι κενός $\bar{\rho} = 0$, $\bar{j}^i = 0$. Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι $\bar{D} = D_{flat}$ οι εξισώσεις περιορισμού ενέργειας, ορμής γίνονται

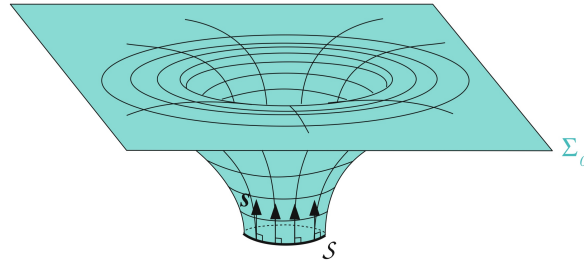
$$\bar{D}^2 \psi + \frac{1}{8} \psi^{-7} (\bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{V}})_{ij} (\bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{V}})^{ij} = 0 \quad (4.1.12)$$

$$\bar{\Delta}_{\mathbf{L}} \bar{V}^i = 0 \rightarrow \bar{D}^2 \bar{V}^i + \frac{1}{3} \bar{D}^i \bar{D}_j \bar{V}^j + \underbrace{\bar{R}_j^i}_{=0} \bar{V}^j = 0 \quad (4.1.13)$$

Από τον ορισμό του ασυμπτωτικά επίπεδου χωροχρόνου, θα πρέπει να ισχύει ότι $\gamma_{ij} \approx f_{ij}$ όταν $r \rightarrow \infty$, άρα $\gamma_{ij} = \psi^4 f_{ij} \Rightarrow \psi \approx 1$ όταν $r \rightarrow \infty$. Επίσης,



Σχήμα 4.2: Η υπερεπιφάνεια Σ_0 με την τοπολογία $\mathbb{R}^3 - \text{Ball}$ ως προς την επίπεδη σύμμορφη μετρική $\bar{\gamma}_{ij}$ εμβαπτισμένη στον ευκλείδειο χώρο ως δισδιάστατη επιφάνεια. Απεικονίζεται και το $\bar{s}^i$ μοναδιαίο ορθογώνιο διανυσματικό πεδίο στην S , ως προς τη σύμμορφη μετρική $\bar{\gamma}_{ij}$. Δεν ισχύει $\bar{D} \cdot \bar{s}^i = \bar{D}_{flat} \cdot \bar{s}^i = \nabla \cdot \bar{s}^i = 0$ το οποίο φαίνεται και στο σχήμα, εφόσον τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους. Για την ακρίβεια είναι $\bar{D} \cdot \bar{s}^i > 0$.



Σχήμα 4.3: Η υπερεπιφάνεια Σ_0 με την τοπολογία $\mathbb{R}^3 - \text{Ball}$ ως προς την φυσική μετρική γ_{ij} εμβαπτισμένη στον ευκλείδειο χώρο ως δισδιάστατη επιφάνεια. Η συνθήκη $D_i s^i = 0 \Leftrightarrow K = 0$ τοπικά ελάχιστης επιφάνειας απεικονίζεται στο σχήμα με παράλληλα διανύσματα του s^i , διότι τότε θα ισχύει $\nabla \cdot \bar{s} = 0$.

$$\bar{A}^{ij} = \underbrace{\bar{M}^{ij}}_0 + (\bar{\mathbf{L}}\bar{V})^{ij} \Rightarrow K^{ij} = \psi^{-10} \bar{A}^{ij} + \underbrace{\frac{1}{3}\gamma^{ij}K}_0 = \psi^{-10} (\bar{\mathbf{L}}\bar{V})^{ij} \text{ οπότε επειδή } K_{ij} \approx 0 \text{ όταν } r \rightarrow \infty, \text{ θα}$$

ισχύει ότι $\bar{V}^i \approx 0$ για $r \rightarrow \infty$.

Έχουμε λοιπόν τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες στο άπειρο

$$\begin{aligned} \psi &= 1 \quad \text{όταν} \quad r \rightarrow \infty \\ \bar{V}^i &= 0 \quad \text{όταν} \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Η λύση των εξισώσεων 4.1.12, 4.1.13 εξαρτάται από την τοπολογία της υπερεπιφάνειας Σ_0 διότι μπορεί να εισάγει και επιπλέον εσωτερικές συνοριακές συνθήκες.

Ξεκινάμε με την πιο απλή περίπτωση όπου $\Sigma_0 = \mathbb{R}^3$. Σε αυτή την περίπτωση οι μόνες συνοριακές συνθήκες είναι στο άπειρο, δηλαδή οι 4.1.14. Άρα η 4.1.13 έχει μοναδική λύση $\bar{V}^i = 0$. Άρα η 4.1.12 γίνεται

$$D_{flat}^2 \psi = 0 \rightarrow \nabla^2 \psi = 0 \tag{4.1.15}$$

Με τη συνοριακή συνθήκη $\psi = 1$ στο άπειρο, έχουμε μοναδική λύση $\psi = 1$. Οπότε

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= f_{ij} \\ K_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή η Σ_0 είναι μια χωρική υπερεπιφάνεια του επίπεδου χωροχρόνου Minkowski. Επίσης, επειδή $K_{ij} = 0$ είναι πλήρως γεωδαισιακή υπερεπιφάνεια. Για να πάρουμε μια πιο ενδιαφέρουσα λύση, πρέπει να θεωρήσουμε μια λίγο πιο περίπλοκη τοπολογία. Αυτό ακριβώς θα κάνουμε στην επόμενη υποενοότητα.

4.1.1 Μάυρη τρύπα Schwarzschild

Θα θεωρήσουμε τώρα την τοπολογία $\Sigma_0 = \mathbb{R}^3 - B$ όπου B μια κλειστή μπάλα. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ένα εσωτερικό σύνορο που αποτελείται από μια σφαίρα S στο οποίο πρέπει να ορίσουμε καινούριες συνοριακές συνθήκες. Επιλέγουμε ως συνοριακή συνθήκη για το $\bar{V}^i$ την $\bar{V}^i|_S = 0$. Μαζί με τη συνοριακή συνθήκη στο άπειρο, πάλι η εξίσωση 4.1.13 έχει μοναδική λύση την

$$\bar{V}^i = 0$$

Τότε πάλι η 4.1.12 ανάγεται στην εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \psi = 0$$

Αν επιλέξουμε ως συνοριακή συνθήκη $\psi|_S = 1$ τότε θα έχουμε μοναδική λύση $\psi = 1$ όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Για να προκύψει κάποια πιο ενδιαφέρουσα λύση, θα απαιτήσουμε για το ψ να παίρνει τέτοιες τιμές στην σφαίρα S ώστε η μετρική γ_{ij} που θα προκύψει να κάνει την S τοπικά ελάχιστη επιφάνεια της (Σ_0, γ_{ij}) (Εδώ η επιφάνεια είναι τοπικά ελάχιστη επειδή η μετρική γ_{ij} της Σ_0 έχει υπογραφή 0 σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση που αναφερόμασταν σε υπερεπιφάνεια της $(M, g_{\mu\nu})$ όπου η $g_{\mu\nu}$ έχει υπογραφή 1). Πρέπει δηλαδή

$$K = 0 \rightarrow D_i s^i = 0 \quad (4.1.16)$$

όπου s^i το μοναδιαίο ορθογώνιο διανυσματικό πεδίο στην S . Εύκολα αποδυνκνείται η σχέση $D_i s^i = \psi^{-6} \bar{D}_i(\psi^6 s^i)$. Οπότε με βάση αυτή, η συνοριακή συνθήκη γράφεται ως

$$\bar{D}_i(\psi^6 s^i)|_S = 0 \quad (4.1.17)$$

Θα γράψουμε τώρα αυτή την έκφραση σε όρους του $\bar{s}^i$ δηλαδή του μοναδιαίου ορθογώνιου διανυσματικού πεδίου στην S ως προς τη σύμμορφη μετρική $\bar{\gamma}_{ij} = f_{ij}$. Είναι $\bar{s}^i = \psi^2 s^i$ διότι $\bar{\gamma}_{ij} \bar{s}^i \bar{s}^j = \psi^4 \gamma_{ij} s^i s^j = \gamma_{ij} s^i s^j = 1$. Άρα τελικά η συνοριακή συνθήκη γράφεται

$$\bar{D}_i(\psi^4 \bar{s}^i)|_S = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_i(\sqrt{\gamma} \psi^4 \bar{s}^i)|_S = 0 \quad (4.1.18)$$

Έστω ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων $(x^i) = (r, \theta, \phi)$. Σε αυτό το σύστημα έχουμε

- Επιφάνεια $S = \{(r, \theta, \phi), r = a > 0\}$
- $f_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$
- $\bar{s}^i = (1, 0, 0)$
- $\sqrt{\gamma} = \sqrt{f} = r^2 \sin \theta$

Οπότε από τη συνοριακή συνθήκη 4.1.18 έχουμε

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\psi^4 r^2)|_{r=a} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{2r} \right) \Big|_{r=a} = 0 \quad (4.1.19)$$

Newmann-Dirichlet συνοριακές συνθήκες.

Η μοναδική λύση της εξίσωσης Laplace που ικανοποιεί τις 4.1.14, 4.1.19 είναι η

$$\psi = 1 + \frac{a}{r} \quad (4.1.20)$$

Η παράμετρος a θα προσδιοριστεί από τον υπολογισμό της ADM μάζας της υπερεπιφάνειας Σ_0 .

Θεωρώντας μια σφαίρα S_t ακτίνας r , έχουμε

$$\begin{aligned} m = M_{ADM} &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} s^i \bar{D}_i \psi \sqrt{q} d^2 y = -\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{r=\text{const}} \frac{\partial \psi}{\partial r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(1 + \frac{a}{r} \right) = 2a \rightarrow \\ a &= \frac{m}{2} \end{aligned}$$

Άρα τελικά

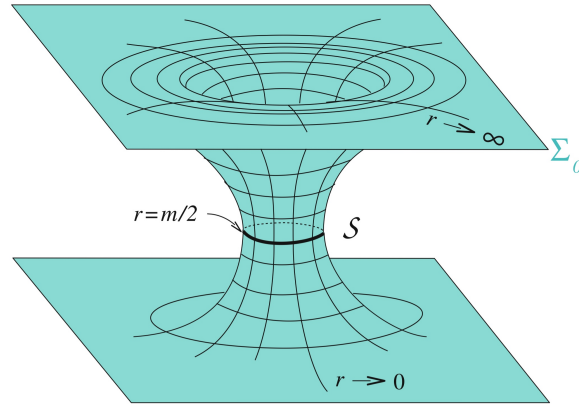
$$\psi = 1 + \frac{m}{2r}, \quad r \geq a = \frac{m}{2} \quad (4.1.21)$$

Άρα η μετρική ισούται με

$$\gamma_{ij} = \left(1 + \frac{m}{2r} \right)^4 \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin \theta) \quad (4.1.22)$$

και προφανώς $K_{ij} = 0$. Παρατηρούμε πως αυτά τα αρχικά δεδομένα αντιστοιχούν σε μια υπερεπιφάνεια κάποιου χρόνου t ενός χωροχρόνου Schwarzschild σε ισοτροπικές συντεταγμένες. Συγκεκριμένα, αν (t, R, θ, ϕ) είναι οι συνήθεις Schwarzschild συντεταγμένες, τότε οι συντεταγμένες

$$(t, r, \theta, \phi) \quad \text{με} \quad R = r \left(1 + \frac{m}{2r} \right)^2 \quad (4.1.23)$$



Σχήμα 4.4: Η επέκταση Σ'_0 που προκύπτει αν κολλήσουμε ένα αντίγραφο της Σ_0 στην τοπικά ελάχιστη επιφάνεια S , η οποία αποτελεί τον «λαιμό» της γέφυρας Einstein-Rosen που ενώνει τις δύο ασυμπτωτικά επίπεδες περιοχές.

λέγονται ισοτροπικές.

Τώρα θα επεκτείνουμε την πολλαπλότητα (Σ_0, γ_{ij}) σε μια μεγαλύτερη Riemannian πολλαπλότητα $(\Sigma'_0, \gamma'_{ij})$ με $\gamma'_{ij}|_{\Sigma_0} = \gamma_{ij}$, και με την απαίτηση η γ'_{ij} να είναι ομαλή στην S . Αυτό μπορεί να γίνει αν «κολλήσουμε» ένα αντίγραφο της Σ_0 στην S όπως φαίνεται στην εικόνα 4.4. Η τοπολογία του Σ'_0 θα είναι τώρα $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ και η μεταβλητή r του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων που είχαμε ορίσει θα παίρνει τιμές $r \in (0, +\infty)$. Η μετρική θα έχει την ίδια μορφή όπως πριν

$$\gamma'_{ij} = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad r > 0 \quad (4.1.24)$$

Θα κάνουμε τώρα μια αλλαγή μεταβλητής $r' = \frac{m^2}{4r}$. Τότε τα στοιχεία της μετρικής στο νέο σύστημα συντεταγμένων είναι

- $\gamma_{r'r'} = \frac{\partial r}{\partial r'} \frac{\partial r}{\partial r'} \gamma_{rr} = \left(1 + \frac{2r'}{m}\right)^4 \frac{m^4}{16(r')^4} = \left(1 + \frac{m}{2r'}\right)^4 \approx 1$ όταν $r' \rightarrow \infty$
- $\gamma_{\theta'\theta'} = \gamma_{\theta\theta} = \left(1 + \frac{2r'}{m}\right)^4 \left(\frac{m}{2}\right)^4 \frac{1}{(r')^2} = \left(1 + \frac{m}{2r'}\right)^4 (r')^2 \approx (r')^2$ όταν $r' \rightarrow \infty$
- παρόμοια βρίσκουμε $\gamma_{\phi'\phi'} = \gamma_{\phi\phi} = \left(1 + \frac{m}{2r'}\right)^4 (r')^2 \sin^2 \theta \approx (r')^2 \sin^2 \theta$ όταν $r' \rightarrow \infty$

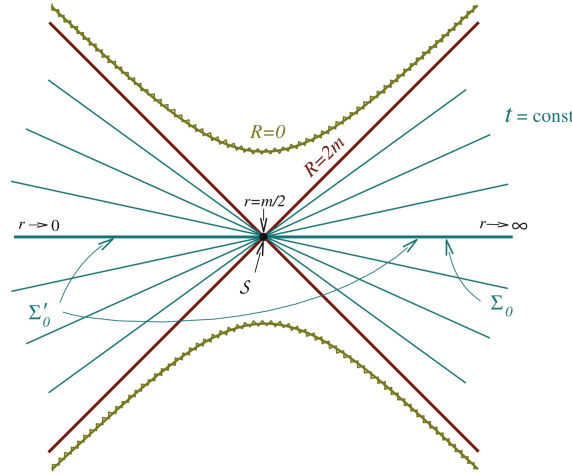
Βλέπουμε λοιπόν, ότι η περιοχή $r \rightarrow 0$ ισοδύναμα $r' \rightarrow \infty$ δεν αντιστοιχεί σε κάποιο «κέντρο» αλλά σε μια δεύτερη ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή. Ο μετασχηματισμός αυτός τώρα, αν τον δούμε ενεργητικά, απεικονίζει ένα σημείο p της Σ_0 ($r > m/2$) σε ένα σημείο του αντίγραφου της $(r' < m/2)$ (στην εικόνα 4.4 το σημείο $p \in \Sigma_0$ θα βρίσκεται στο πάνω μισό και η εικόνα του θα είναι στην τομή της κάθετης (ως προς τα επίπεδα) που διέρχεται από αυτό με το κάτω μισό). Επίσης, ο μετασχηματισμός αυτός, με θ, ϕ σταθερά, όπως φαίνεται είναι μια ισομετρία της γ'_{ij} . Η επιφάνεια S είναι αναλλοίωτη κάτω από αυτή την ισομετρία. Η περιοχή γύρω από την S είναι μια **γέφυρα Einstein-Rosen**. Διαπιστώνουμε ότι η υπερεπιφάνεια $(\Sigma'_0, \gamma'_{ij})$ είναι πάλι μια φέτα του χωροχρόνου Schwarzschild. Ενώνει δύο ασυμπτωτικά επίπεδες περιοχές χωρίς να εισέλθει εντός του ορίζοντα γεγονότων όπως φαίνεται και στο διάγραμμα Kruskal Szekers στην εικόνα 4.5.

4.1.2 Πολλαπλές μαύρες τρύπες Schwarzschild

Με βάση την ανάλυση που κάναμε στην προηγούμενη υποενότητα, μια υπερεπιφάνεια του χωροχρόνου Schwarzschild μιας μελανής οπής μπορεί να προκύψει ως εξής. Θεωρούμε μια υπερεπιφάνεια Σ_0 η οποία έχει την τοπολογία $\mathbb{R}^3$ αφαιρώντας ένα σημείο

$$\Sigma_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \quad (4.1.25)$$

Το αφαιρούμενο σημείο ονομάζεται ιδιομορφία. Η τοπολογία της Σ_0 είναι η $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Διαφέρει από την τοπολογία $\mathbb{R}^3 - \text{Ball}$ όμως είναι η ίδια τοπολογία με αυτή που έχει η επέκταση Σ'_0 . Θεωρούμε τη λύση



Σχήμα 4.5: Διάγραμμα Kruskal Szekers για την επέκταση Σ'_0 . Με R συμβολίζουμε την συνηθισμένη ακτινική Schwarzschild συντεταγμένη και με r την ισοτροπική ακτινική Schwarzschild συντεταγμένη. Το $R = 0$ είναι η μοναδικότητα και το $R = 2m$ ο ορίζοντας γεγονότων. Η Σ'_0 είναι μια υπερεπιφάνεια του χωροχρόνου Schwarzschild $t = \text{const}$ όπου t η χρονική συντεταγμένη στις συνήθεις Schwarzschild συντεταγμένες. Σε αυτό το διάγραμμα, οι υπερεπιφάνειες απεικονίζονται ως γραμμές και ο λαιμός της γέφυρας Einstein-Rosen απεικονίζεται ως ένα σημείο.

$\bar{V}^i = 0$ της 4.1.13 η οποία οδηγεί σε μηδενική εξωγενή καμπυλότητα $K_{ij} = 0$. Πρόκειται δηλαδή για στιγμιαία στατικά αρχικά δεδομένα, όπως και αναμένεται για μια μαύρη τρύπα Schwarzschild. Θεωρώντας τη συνοριακή συνθήκη 4.1.18 πάνω σε σφαίρα ακτίνας $a = m/2$ (όπου στο τέλος θα προκύψει $m = M_{ADM}$), καταλήγουμε στη μοναδική λύση της εξίσωσης Laplace

$$\psi = 1 + \frac{m}{2r}, \quad r > 0 \quad (4.1.26)$$

όπως περιγράψαμε προηγουμένως. Αυτή η λύση τελικά μας δίνει τη μετρική $\gamma_{ij} = \psi^4 \bar{\gamma}_{ij} = \psi^4 f_{ij}$ μιας υπερεπιφάνειας του χωροχρόνου Schwarzschild μιας μαύρης τρύπας.

Θα γενικεύσουμε τώρα τα αποτελέσματα αυτά στην περίπτωση που έχουμε N μαύρες τρύπες Schwarzschild. Σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε μια υπερεπιφάνεια Σ_0 με N ιδιομορφίες αντιστοιχούν στις μοναδικότητες. Αν θεωρήσουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, το οποίο είναι δυνατόν διότι η σύμμορφη μετρική είναι επίπεδη, τότε η λύση ψ που αναφέραμε πιο πάνω, γράφεται ως

$$\psi = 1 + \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (4.1.27)$$

Αν κάνουμε έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων $(x', y', z') = (x + x_0, y + y_0, z + z_0)$ τότε

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z'^2} = 0$$

Άρα η

$$1 + \frac{k}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} = 1 + \frac{k}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

είναι λύση της εξίσωσης Laplace. Αυτή η λύση αντιπροσωπεύει μια ιδιομορφία που δεν βρίσκεται πλέον στην αρχή των αξόνων, αλλά στη θέση (x_0, y_0, z_0) . Επίσης, επειδή η εξίσωση Laplace είναι γραμμική, μπορούμε να πάρουμε ως λύση έναν γραμμικό συνδυασμό λύσεων

$$\psi = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (4.1.28)$$

Αυτή η λύση λοιπόν αναπαριστά N μαύρες τρύπες οι οποίες είναι στιγμιαία σε «ηρεμία» όπου οι μοναδικότητες (ιδιομορφίες) βρίσκονται στα σημεία $\vec{r}_i$.

Οι ποσότητες m_i ονομάζονται γυμνές μάζες.

Πρόταση 4.3. Ισχύει ότι $M_{ADM} = \sum_i m_i$ για την ADM μάζα του συστήματος, η οποία υπολογίζεται στο άπειρο.

Πρόταση 4.4. Σε ένα σύστημα από N μαύρες τρύπες Schwarzschild οι οποίες είναι στιγμαία σε ηρεμία, υπάρχουν ασυμπτωτικά επίπεδες περιοχές του χωροχρόνου κοντά στις μοναδικότητες (ιδιομορφίες).

Απόδειξη. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, ως προς την σύμμορφη μετρική που είναι είλεπεδη, έχουμε

$$\psi(\vec{r}) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad |\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

Γενικά, η ποσότητα $|\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$ λέγεται απόσταση συντεταγμένων και στα πλαίσια αυτής της απόδειξης ορίζουμε ως σύμβαση, πως θα έχει πάντα τον ίδιο τύπο ακόμα κι αν δεν έχουμε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Θα κάνουμε τώρα μια αλλαγή συντεταγμένων $\vec{r} \rightarrow \vec{s}$ όπου

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \vec{r} - \vec{r}_i \\ s^k &= r^k - (r_i)^k \end{aligned}$$

Αν r^i είναι καρτεσιανές συντεταγμένες τότε προφανώς και οι s^i είναι πάλι καρτεσιανές συντεταγμένες. Άρα λοιπόν, έχουμε

$$\psi(\vec{r}) = 1 + \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2|\vec{r} - \vec{r}_k|} \rightarrow \psi(\vec{s}) = \frac{m_i}{2|\vec{s}|} + 1 + \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{2|\vec{s} + \vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Ορίζουμε

$$f(\vec{s}) = \frac{1}{|\vec{s} + \vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Κοντά στην $\vec{r}_i$ ιδιομορφία, δηλαδή όταν $|\vec{s}| \rightarrow 0$, κρατώντας μόνο τον πρώτο όρο στο ανάπτυγμα Taylor της f , έχουμε

$$f(\vec{s}) = f(\vec{0}) + \nabla f(\vec{0}) \cdot \vec{s} = f(\vec{0}) + |\nabla f(\vec{0})| |\vec{s}| \cos(\widehat{\nabla f(\vec{0}), \vec{s}}) = f(\vec{0}) + O(|\vec{s}|)$$

Συμβολίζοντας $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ έχουμε τελικά

$$\psi(\vec{s}) = \frac{m_i}{2|\vec{s}|} + \left(1 + \sum \frac{m_j}{2r_{ij}}\right) + O(|\vec{s}|)$$

κοντά στο $\vec{s} = \vec{0}(\vec{r} = \vec{r}_i)$.

Θα κάνουμε τώρα μια δεύτερη αλλαγή συντεταγμένων

$$\vec{s}' = \frac{m_i^2}{4} \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|^2} \quad (s')^i = \frac{m_i^2}{4} \frac{s^i}{|\vec{s}|^2}$$

Ένας τέτοιος μετασχηματισμός συντεταγμένων ονομάζεται αντιστροφή ως προς μια σφαίρα ακτίνας $a = m_i/2$.

Προφανώς $|\vec{s}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (s^i)^2}$, $|\vec{s}'| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 [(s')^i]^2}$. Ισχύει προφανώς

$$|\vec{s}'| = \frac{m_i^2}{4} \sqrt{\frac{\sum (s^i)^2}{|\vec{s}|^4}} = \frac{m_i^2}{4|\vec{s}|}$$

Επίσης από την παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$\vec{s} = \frac{m_i^2}{4} \frac{\vec{s}'}{|\vec{s}'|^2}$$

Για τον παραπάνω μετασχηματισμό $\vec{s} \rightarrow \vec{s}'$, $s^i \rightarrow (s')^i$ έχουμε (θέτουμε για απλότητα $m_i = m$)

$$s^i = \frac{m^2}{4} \frac{(s')^i}{|\vec{s}'|^2} \Rightarrow \frac{\partial s^i}{\partial (s')^j} = \frac{m^2}{4} \frac{\delta_j^i |\vec{s}'|^2 - 2(s')^i (s')^j}{|\vec{s}'|^4}$$

Οι συντεταγμένες s^i είναι καρτεσιανές ως προς τη σύμμορφη μετρική, οπότε $\gamma_{ij}(\vec{s}) = \psi^4 \delta_{ij}$. Ως προς το σύστημα συντεταγμένων $(s')^i$ τα στοιχεία της μετρικής γίνονται

$$\gamma'_{ij}(\vec{s}') = \frac{\partial s^k}{\partial (s')^i} \frac{\partial s^\lambda}{\partial (s')^j} \gamma_{k\lambda}(\vec{s}) = \frac{m^4}{16} \frac{\delta_{ij}}{|\vec{s}'|^4} \psi^4$$

Έστω τώρα ψ' ένας καινούριος σύμμορφος παράγοντας για τον οποίο ισχύει $\gamma'_{ij} = (\psi')^4 \delta_{ij}$. Τότε, από την παραπάνω σχέση, έχουμε

$$\psi' = \frac{m}{2} \frac{1}{|\vec{s}'|} \psi$$

Και το ψ' λοιπόν είναι σύμμορφος παράγοντας της φυσικής μετρικής. Εκφράζουμε το ψ ως προς το $\vec{s}'$

$$\psi = \frac{2}{m_i} |\vec{s}'| + \left(\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{2r_{ij}} + 1 \right) + O\left(\frac{1}{|\vec{s}'|}\right)$$

Άρα λοιπόν για το $\psi' = \psi'(\vec{s}')$ έχουμε

$$\psi' = \psi'(\vec{s}') = 1 + \frac{m_i}{2|\vec{s}'|} \left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{2r_{ij}} \right) + O\left(\frac{1}{|\vec{s}'|^2}\right) \quad (4.1.29)$$

Τώρα, οι συντεταγμένες $(s')^i$ είναι καρτεσιανές ως προς τη σύμμορφη μετρική που προκύπτει από το σύμμορφο παράγοντα ψ' . Όταν $|\vec{s}'| \rightarrow \infty$, δηλαδή όταν $|\vec{s}| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \vec{r} \rightarrow \vec{r}_i$, δηλαδή κοντά στην ιδιομορφία $\vec{r}_i$ έχουμε ότι

$$\psi' \rightarrow 1 \Rightarrow \gamma'_{ij} \approx \delta_{ij}$$

δηλαδή έχουμε ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή του χωροχρόνου κοντά στην ιδιομορφία $\vec{r}_i$. $\square$

Ορισμός 4.5. Σε ένα σύστημα από N μαύρες τρύπες Schwarzschild οι οποίες είναι στιγμιαία σε ηρεμία, ορίζουμε ως μάζα M_i της i μαύρης τρύπας την ADM μάζα του συστήματος που προκύπτει αν την υπολογίσουμε στην ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή της i μαύρης τρύπας. Συγκεκριμένα προκύπτει ότι

$$M_i = m_i \left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{2r_{ij}} \right) \quad (4.1.30)$$

Απόδειξη. Έστω μια κλειστή 2-διάστατη επιφάνεια S_t της Σ_0 , q_{ij} η επαγόμενη μετρική σε αυτή και s^k το μοναδιαίο ορθογώνιο διανυσματικό πεδίο σε αυτή. Τότε η ADM-μάζα της Σ_0 ισούται με

$$M_{ADM} = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \oint_{S_t} s^i \left(\tilde{D}_i \psi - \frac{1}{8} \tilde{D}^j \tilde{\gamma}_{ij} \right) \sqrt{q} d^2 y \quad (4.1.31)$$

όπου $\tilde{D}$ η συναλλοίωτη παράγωγος που σχετίζεται με την επίπεδη μετρική f_{ij} .

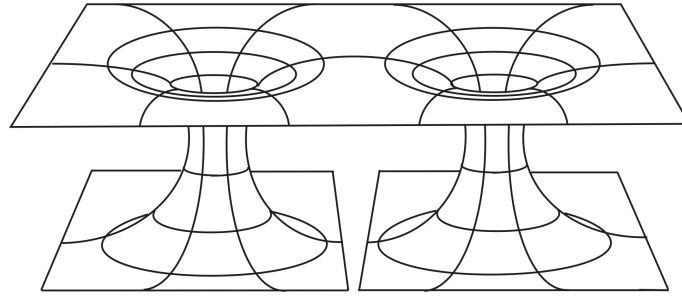
Στα πλαίσια της προηγούμενης απόδειξης, συνειδητοποιούμε ότι οι συντεταγμένες $(s')^i$ είναι ασυμπτωτικά καρτεσιανές ως προς τη φυσική μετρική, κοντά στην ιδιομορφία $\vec{r}_i$. Άρα λοιπόν, κάνοντας έναν μετασχηματισμό σε σφαιρικές συντεταγμένες (ρ', θ', ϕ') , και θεωρώντας μια σφαίρα ακτίνας ρ $S_t = \{(\rho', \theta', \phi') : \rho' = \rho\}$ έχουμε

$$M_i = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \oint_{S_t} (\partial_\rho \psi') \rho^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' = \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \oint_{S_t} \frac{m_i}{2} \left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{2r_{ij}} \right) \sin \theta' d\theta' d\phi' =$$

$$m_i \left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{2r_{ij}} \right)$$

εφόσον όταν $\rho \rightarrow \infty$ ισχύει $|\vec{s}'| \approx \rho$. $\square$

Brill-Lindquist type data



Σχήμα 4.6: Τοπολογία της αρχικής υπερεπιφάνειας με αρχικά δεδομένα τύπου Brill-Lindquist. Συγκεκριμένα, απεικονίζεται η αρχική υπερεπιφάνεια με μετρική που προκύπτει από αρχικά δεδομένα τύπου Brill-Lindquist εμβαπτισμένη στον 3-διάστατο ευκλείδιο χώρο. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, το σύμπαν συνδέεται με άλλα σύμπαντα (ασυμπτωτικά επίπεδες περιοχές) μέσα από γέφυρες Einstein-Rosen τα οποία όμως δεν ενώνονται μεταξύ τους.

4.1.3 Αρχικά Δεδομένα τύπου Brill-Lindquist/Misner

Στην προηγούμενη υποενότητα, παρουσιάσαμε τη λύση

$$\psi = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (4.1.32)$$

Η λύση αυτή αναπαριστά N μαύρες τρύπες αν τα σημεία $\vec{r}_i$ είναι αρκετά μακριά μεταξύ τους. Διαφορετικά, μπορεί να υπάρξει συγχώνευση οριζόντων και να έχουμε έτσι λιγότερες μαύρες τρύπες (ακόμα και μόνο μία) με περίπλοκες εσωτερικές τοπολογίες. Για παράδειγμα, μπορεί να αποδειχθεί [10, 6, 1], ότι στην περίπτωση 2 μελανών σπών με μάζες $m_1 = m_2 = 1$ και με απόσταση των κέντρων τους μικρότερη από $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \sim 1.5$ έχουμε στην πραγματικότητα μία παραμορφωμένη μελανή σπή.

Η παραπάνω λύση ψ οδηγεί σε αρχικά δεδομένα γ_{ij} τα οποία ονομάζονται **αρχικά δεδομένα τύπου Brill-Lindquist**. Όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη υποενότητα, κοντά στις ιδιομορφίες υπάρχουν ασυμπτωτικά επίπεδες περιοχές του χωροχρόνου. Ας το δούμε αυτό λίγο πιο αναλυτικά. Κοντά στην ιδιομορφία $\vec{r}_i$, όλοι οι όροι του αθροίσματος ψ εκτός του $a_i(\vec{r} - \vec{r}_i)^{-1}$ μπορούν να θεωρηθούν σταθεροί ($\approx a_j/r_{ij}$), οπότε έχουμε

$$\psi \approx 1 + c + \frac{a_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \approx \frac{a_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad \text{όταν } \vec{r} \rightarrow \vec{r}_i \quad (4.1.33)$$

δηλαδή η γεωμετρία κοντά στην ιδιομορφία $\vec{r}_i$ είναι ίδια με τη γεωμετρία Schwarzschild μίας μόνο μαύρης τρύπας κοντά στο κέντρο της. Δηλαδή κάθε ιδιομορφία αναπαριστά το άπειρο σε μια διαφορετική ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή. Άρα το σύμπαν συνδέεται με N διαφορετικά σύμπαντα μέσα από γέφυρες Einstein-Rosen όπως φαίνεται και στην εικόνα 4.6. Επίσης, όταν οι ιδιομορφίες $\vec{r}_j$ είναι αρκετά μακριά μεταξύ τους, τότε ισχύει

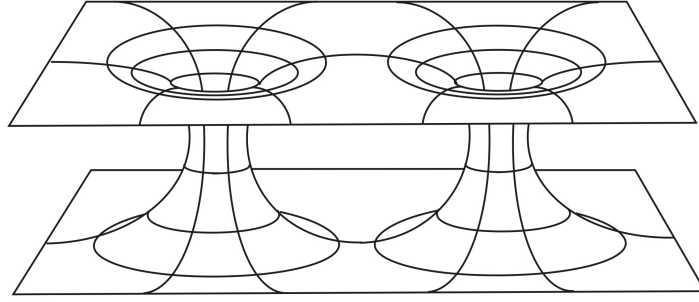
$$\psi \approx 1 + \frac{a_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad \text{όταν } |\vec{r} - \vec{r}_i| \leq 2a_i \quad (4.1.34)$$

υπάρχει δηλαδή μια περιοχή στη γειτονία της $\vec{r}_i$ ιδιομορφίας $|\vec{r} - \vec{r}_i| \leq 2a_i$ (η οποία αντιστοιχεί σε όλο το «λαιμό» της εικόνας 4.6), με γεωμετρία πανομοιότυπη με τη γεωμετρία Schwarzschild μιας μαύρης τρύπας (αυτή είναι ακριβώς η περίπτωση που αντιστοιχεί στην εικόνα 4.6).

Αρχικά δεδομένα Misner

Όπως έδειξε ο Misner [16], μπορεί να κατασκευαστεί μια λύση ψ που αναπαριστά N μαύρες τρύπες η οποία όμως αντιστοιχεί σε 2 ισομετρικά (πανομοιότυπα) σύμπαντα. Σε αυτή την περίπτωση δηλαδή, όλες οι γέφυρες Einstein-Rosen ενώνουν αυτά τα 2 σύμπαντα, όπως φαίνεται και στην εικόνα 4.7. Αρχικά δεδομένα γ_{ij} που προκύπτουν από αυτή τη λύση λέγονται **αρχικά δεδομένα τύπου Misner**. Παρακάτω θα ακολουθήσουμε την μαθηματική περιγραφή που έκανε ο Misner. Η ανάλυση θα γίνει σε δύο

Misner type data



Σχήμα 4.7: Τοπολογία της αρχικής υπερεπιφάνειας με αρχικά δεδομένα τύπου Misner. Συγκεκριμένα, απεικονίζεται η αρχική υπερεπιφάνεια με μετρική που προκύπτει από αρχικά δεδομένα τύπου Misner εμβαπτισμένη στον 3-διάστατο ευκλείδειο χώρο. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, υπάρχουν μόνο δύο ισομετρικά σύμπακτα (αυμπτωτικά επίπεδες περιοχές) τα οποία συνδέονται μεταξύ τους μέσα από γέφυρες Einstein-Rosen.

μέρος. Το πρώτο μέρος θα περιέχει μια σειρά από προτάσεις από τις οποίες θα προκύψει η ύπαρξη μιας συμμετρικής λύσης ψ σε ένα τμήμα της υπερεπιφάνειας που αντιστοιχεί σε λίγο παραπάνω από το πάνω μισό της εικόνας 4.7. Στο δεύτερο μέρος θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του πρώτου μέρους για να αποδείξουμε ότι το πάνω και το κάτω μέρος της υπερεπιφάνειας είναι πανομοιότυπα.

Πρώτο Μέρος

Αρχικά, να αναφέρουμε ότι θα αναφερόμαστε στις ιδιομορφίες και ως πόλους.

Όπως είπαμε πριν, δεδομένου ότι οι ιδιομορφίες $\vec{r}_i$ είναι αρκετά μακριά μεταξύ τους, κοντά στον πόλο $\vec{r}_i$, συγκεκριμένα στην περιοχή των σημείων $|\vec{r} - \vec{r}_i| \leq 2a_i$, ισχύει

$$\psi \approx 1 + \frac{a_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (4.1.35)$$

δηλαδή η γεωμετρία είναι ίδια με αυτή μιας μόνο μαύρης τρύπας Schwarzschild κοντά στο κέντρο της. Πρέπει λοιπόν με κάποιο τρόπο να αλλάξουμε τη γεωμετρία ώστε το πάνω και το κάτω μέρος της εικόνας 4.6 να είναι ίδια. Ξεκινάμε από την περιοχή σημείων $|\vec{r} - \vec{r}_1| \leq 2a_1$ κοντά στην ιδιομορφία $\vec{r}_1$. Για να μοιάζει η γεωμετρία στην περιοχή αυτή με τη γεωμετρία στο πάνω μέρος πρέπει να προσθέσουμε στο ψ μερικούς πόλους κοντά στο $\vec{r}_1$ (στο κάτω φύλλο) οι οποίοι θα αντιστοιχούν στους πόλους $\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ στο πάνω φύλλο. Όπως θα δούμε, τα βάρη και οι θέσεις των πόλων αυτών που κάνουν την πάνω και κάτω περιοχή (πάνω και κάτω φύλλα) στη γειτονιά της ιδιομορφίας $\vec{r}_1$ πανομοιότυπες, καθορίζονται από το μετασχηματισμό αντιστροφής ως προς τη σφαίρα με κέντρο την ιδιομορφία και ακτίνα a_1 (γενικά έναν μετασχηματισμό αντιστροφής ως προς σφαίρα θα τον λέμε και «σφαιρική αντιστροφή» ή «ανάκλαση»). Στη συνέχεια όμως, πρέπει να εξασφαλίσουμε συμμετρία και για τη γειτονιά της ιδιομορφίας 2. Για να γίνει αυτό, πρέπει να προσθέσουμε εκτός από τις εικόνες των ιδιομορφιών $\vec{r}_1, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N$ και τις εικόνες των πόλων που προσθέσαμε κοντά στο $\vec{r}_1$. Τότε όμως καταστρέφεται η συμμετρία στην περιοχή κοντά στο $\vec{r}_1$, $|\vec{r} - \vec{r}_1| \leq 2a_1$, την οποία θα πρέπει να αποκαταστήσουμε με νέες εικόνες των πόλων που προσθέσαμε στην περιοχή κοντά στο $\vec{r}_2$, $|\vec{r} - \vec{r}_1| \leq 2a_2$. Η διαδικασία αυτή, κατά την οποία εισάγουμε εικόνες εικόνων, όπως θα δούμε, συγκλίνει και οδηγεί στη γεωμετρία της εικόνας 4.7. Άρα στη συνάρτηση ψ που αντιστοιχεί στην εικόνα 4.7 δεν υπάρχουν μόνο οι βασικοί πόλοι $\vec{r}_j$ που αντιστοιχούν σε κάθε γέφυρα, αλλά και οι εικονικοί πόλοι, οι οποίοι αντιστοιχούν στην πιθανότητα να προσεγγίσουμε κάποια γέφυρα όχι μόνο από μια διαδρομή από το $r = \infty$ αλλά και μετά από μια μεγάλη διαδρομή μέσα από πολλές γέφυρες πρώτα. Τώρα προχωράμε στην αναλυτική περιγραφή της κατασκευής

Έστω ο χώρος $\mathbb{R}^3$ με N ιδιομορφίες στα σημεία $\vec{r}_i$ και N σφαίρες με κέντρα $\vec{r}_i$ και ακτίνες a_i ($|\vec{r} - \vec{r}_i| = a_i$) οι οποίες δεν τέμνονται.

Ορίζουμε τον τελεστή αντιστροφής J ως προς μια σφαίρα $|\vec{r}| = a$ ως

$$\vec{r} \rightarrow J\vec{r} \quad J\vec{r} = \frac{a^2}{r^2}\vec{r} \quad (4.1.36)$$

Για μια σφαίρα με κέντρο $\vec{r}_k$ έχουμε αντίστοιχα

$$\vec{r} \rightarrow J_k \vec{r} = \vec{r}_k + \frac{a_k^2}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2} (\vec{r} - \vec{r}_k) \quad (4.1.37)$$

Αναζητούμε μια μετρική η οποία να είναι αναλλοίωτη κάτω από αντιστροφές ως προς κάθε σφαίρα. Συγκεκριμένα, ως προς τη σφαίρα $|\vec{r}| = a$ (και αντίστοιχα για κάθε άλλη σφαίρα $|\vec{r} - \vec{r}_k| = a_k$), απαιτούμε για τη μετρική

$$ds^2 = \psi^4(\vec{r}) dx^i dx^i \quad (4.1.38)$$

να είναι αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό $\vec{r} \rightarrow J\vec{r}$, δηλαδή η ίδια μετρική ds^2 πρέπει να δίνεται και από τη σχέση

$$ds^2 = \psi^4 \left(\frac{a^2 \vec{r}}{r^2} \right) d \left(\frac{a^2 x^i}{r^2} \right) d \left(\frac{a^2 x^i}{r^2} \right) = \left[\frac{a}{r} \psi \left(\frac{a^2 \vec{r}}{r^2} \right) \right]^4 dx^i dx^i \quad (4.1.39)$$

Το ίδιο πρέπει να ισχύει ως προς κάθε άλλη σφαίρα (ο λόγος που επιλέξαμε αυτές τις συμμετρίες είναι διότι αντιστοιχούμε κάθε σημείο $\vec{r}$ στο πάνω μισό με ένα σημείο $\vec{r}' = J_k \vec{r} \quad \forall k$ στο κάτω μισό).

Αυτή η απαίτηση μπορεί να γραφτεί ως

$$J[\psi] = \psi \quad (4.1.40)$$

όπου εδώ το J είναι ένας τελεστής που δράει σε συναρτήσεις ως εξής

$$J[f](\vec{r}) = \frac{a}{r} f \left(\frac{a\vec{r}}{r^2} \right) = \frac{a}{r} f(J\vec{r}) \quad (4.1.41)$$

Παρατηρούμε ότι είναι γραμμικός τελεστής. Επίσης, σαν γραμμικός τελεστής αλλά και σαν απεικόνιση, το J ικανοποιεί τη σχέση

$$J^2 = I \quad (4.1.42)$$

Όπως θα αποδείξουμε στην επόμενη ενότητα, ισχύει ότι

$$\text{Αν } \nabla^2 f = 0, \text{ τότε } \nabla^2 J[f] = 0 \quad (4.1.43)$$

Άρα αν μια συνάρτηση ψ ικανοποιεί τον χαμιλτονιανό περιορισμό τότε και η $J[\psi]$ τον ικανοποιεί επίσης.

Πρόταση 4.5. Στην περίπτωση που είναι

$$\psi = \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

αν θέλουμε να ισχύει $J_k[\psi] = \psi$ θα πρέπει να τοποθετήσουμε έναν πόλο στη θέση $\vec{r}_k + \frac{a_k^2(\vec{r}_i - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^2}$ με βάρος $\frac{q_i a_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$, δηλαδή θα είναι

$$\psi(\vec{r}) = \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \frac{a_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_k - \frac{a_k^2(\vec{r}_i - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^2}|} = \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \frac{a_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \frac{q_i}{|\vec{r} - J_k \vec{r}_i|}$$

Απόδειξη. Για απλότητα θα θεωρήσουμε ότι $\vec{r}_k = 0$. Ανάλογα αποδυνκνείται και στην περίπτωση που $\vec{r}_k \neq 0$.

Αρχικά, εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$|J\vec{r} - J\vec{r}_i| = \left| \frac{a^2 \vec{r}}{r^2} - \frac{a^2 \vec{r}_i}{r_i^2} \right| = \frac{a^2}{rr_i} |\vec{r} - \vec{r}_i| \quad (4.1.44)$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} J[\psi](\vec{r}) &= \frac{a}{r} \frac{q_i}{|J\vec{r} - \vec{r}_i|} + \frac{a^2}{rr_i} \frac{q_i}{|J\vec{r} - J\vec{r}_i|} = \frac{a}{r} \frac{q_i}{|J\vec{r} - J^2 \vec{r}_i|} + \frac{a^2}{rr_i} \frac{q_i}{|J\vec{r} - J\vec{r}_i|} = \\ &= \frac{|J\vec{r}_i|}{a} \frac{q_i}{|\vec{r} - J\vec{r}_i|} + \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{a}{r_i} \frac{q_i}{|\vec{r} - J\vec{r}_i|} + \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \psi(\vec{r}) \end{aligned}$$

Προφανώς η ψ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace (χαμιλτονιανός περιορισμός) αφού την ικανοποιεί κάθε όρος. □

Πρόταση 4.6. Στην περίπτωση που είναι

$$\psi = 1$$

αν θέλουμε να ισχύει $J_k[\psi] = \psi$ θα πρέπει να τοποθετήσουμε έναν πόλο στο κέντρο της σφαίρας που αντιστοιχεί στο J_k με βάρος a_k , δηλαδή θα είναι

$$\psi(\vec{r}) = 1 + \frac{a_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}$$

Απόδειξη. Για απλότητα θα θεωρήσουμε ότι $\vec{r}_k = 0$. Ανάλογα αποδυνκνείται και στην περίπτωση που $\vec{r}_k \neq 0$.

Πράγματι

$$J[\psi](\vec{r}) = \frac{a}{r} \cdot 1 + \frac{a^2}{r} \frac{1}{\frac{a^2}{r}} = \frac{a}{r} + 1 = \psi(\vec{r})$$

Προφανώς η ψ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace (χαμιλτονιανός περιορισμός) αφού την ικανοποιεί κάθε όρος. □

Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε τη συνάρτηση ψ και κατ' επέκταση τη μετρική. Θα χρειαστούμε τη δράση του J_k στις εξής συναρτήσεις

$$J_k[1] = \frac{a_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \quad (4.1.45)$$

$$J_k \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right] = \frac{a_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \frac{1}{|\vec{r} - J_k \vec{r}_i|} \quad (4.1.46)$$

Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε τη συνάρτηση που δράει το J_k ως συνάρτηση του $\vec{r}$ ενώ τη δεύτερη ως συνάρτηση του $\vec{r}_i$.

Επειδή $\psi \rightarrow 1$ όταν $r \rightarrow \infty$ τότε λόγω συμμετρίας αντιστροφής ως προς την k -σφαίρα, το ψ θα πρέπει να περιέχει έναν όρο

$$J_k[1] = \frac{a_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \quad (4.1.47)$$

(ο όρος αυτός υπήρχε ήδη από τη λύση Brill-Lindquist) όμως τώρα, λόγω αντιστροφής ως προς τη l σφαίρα θα πρέπει να υπάρχει ένας όρος

$$J_l J_k[1] \quad (4.1.48)$$

Αν $l = k$ τότε έχουμε ήδη συμπεριλάβει τον όρο αυτόν διότι

$$J_k^2[1] = I[1] = 1$$

Διαφορετικά, πρόκειται για έναν καινούριο πόλο μέσα στην l -σφαίρα. Μετά από n αντιστροφές, έχουμε έναν πόλο

$$J_{i_1} J_{i_2} \dots J_{i_n}[1]$$

στην σφαίρα i_1 . Άρα λοιπόν πρέπει να θεωρήσουμε την απειροσειρά

$$S = I + \sum J_{i_1} J_{i_2} \dots J_{i_n} \quad (4.1.49)$$

όπου το άθροισμα θεωρεί όλους τους πεπερασμένους μήκους $n = 1, 2, \dots$ συνδυασμούς $i_k = 1, 2, \dots, N$ με την προϋπόθεση

$$i_{k+1} \neq i_k \quad (4.1.50)$$

Πρόταση 4.7. Η συνάρτηση

$$\psi = S[1] \quad (4.1.51)$$

αν συγκλίνει ομοιόμορφα (θα αποδειχθεί στη συνέχεια), τότε είναι αναλυτική, και η παράγωγος της προκύπτει από τη σειρά των παραγώγων κάθε όρου. Άρα ικανοποιεί την εξίσωση Laplace (χαμιλτονιανός περιορισμός), εφόσον κάθε όρος την ικανοποιεί.

Πρόταση 4.8. Η συνάρτηση $\psi = S[1]$ είναι αναλλοίωτη κάτω από όλες τις ανακλάσεις ως προς κάθε σφαίρα διότι

$$J_k S = S \quad (4.1.52)$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε τις δύο πλευρές της 4.1.52. Ένας όρος $J_{i_1}J_{i_2}\dots J_{i_n}$ της σειράς της S στη δεξιά πλευρά μπορεί να βρεθεί στην αριστερή ως $J_k(J_{i_2}J_{i_3}\dots J_{i_n})$ στην περίπτωση που $i_1 = k$ και ως $J_k(J_kJ_{i_1}J_{i_2}\dots J_{i_n})$ στην περίπτωση που $i_1 \neq k$ ($J_k^2 = 1$). Αυτό ισχύει και για όλους τους όρους του $J_k S$ στην αριστερή πλευρά διότι πάλι, ο πρώτος παράγοντας ενός όρου πρέπει να είναι J_k ή όχι. $\square$

Απομένει να αποδείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα.

Έστω ένα άθροισμα από πόλους

$$\sum \frac{q_a}{r_a} \quad r_a \equiv |\vec{r} - \vec{p}_a| \quad (4.1.53)$$

και έστω R μια περιοχή της υπερεπιφάνειας που κάθε σημείο της έχει πεπερασμένη απόσταση από όλες τις ιδιομορφίες. Συγκεκριμένα, υπάρχει ένα $\rho > 0$ τέτοιο ώστε

$$r_a \geq \rho \quad \forall a, \forall \vec{r} \in R \quad (4.1.54)$$

Τότε, ισχύει

$$\left| \sum \left(\frac{q_a}{r_a} \right) \right| \leq \sum \left(\frac{|q_a|}{r_a} \right) \leq \frac{1}{\rho} \sum |q_a| \quad (4.1.55)$$

άρα η απόλυτη και η ομοιόμορφη σύγκλιση (κριτήριο Weierstrass) της σειράς $\sum (q_k/r_k)$ στο R προκύπτει από την απόλυτη σύγκλιση της σειράς $\sum q_i$. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα για να αποδείξουμε την παρακάτω πρόταση

Πρόταση 4.9. *Η σειρά $S[1]$ συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα σε μια συνάρτηση $\psi > 1$, σε μια ανοιχτή περιοχή R η οποία περιλαμβάνει όλα τα σημεία που δεν είναι εσωτερικά σε κάποια σφαίρα και δεδομένου ότι $(N-1)a/d < 1$, όπου $a = \max a_k$ και d η ελάχιστη ευκλείδια απόσταση από το κέντρο κάποιας από τις N σφαίρες έως ένα σημείο σε κάθε άλλη σφαίρα.*

Απόδειξη. Λόγω της 4.1.55, η ομοιόμορφη και η απόλυτη σύγκλιση της $S[1]$ στο R προκύπτει από την απόλυτη σύγκλιση της σειράς των βαρών των πόλων της $S[1]$, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν πόλοι κοντά στο R . Ας θεωρήσουμε έναν όρο $J_{i_n}J_{i_{n-1}}\dots J_{i_1}[1]$ του $S[1]$. Από την 4.1.47 ισχύει $J_{i_1}[1] = a_{i_1}/|\vec{r} - \vec{r}_{i_1}|$, δηλαδή είναι ένας πόλος βάρους a_{i_1} που βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας i_1 . Τώρα, το $J_{i_2}J_{i_1}[1]$ είναι ένας πόλος βάρους $a_{i_2}a_{i_1}/d_{i_1i_2}$ μέσα στη σφαίρα i_2 , όπου $d_{i_1i_2} = |\vec{r}_{i_1} - \vec{r}_{i_2}|$ η απόσταση μεταξύ των πόλων στα κέντρα των σφαιρών i_1, i_2 . Άρα διαπιστώνουμε ότι το $J_{i_n}J_{i_{n-1}}\dots J_{i_1}[1]$ είναι ένας πόλος στη σφαίρα i_n . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι για το βάρος του ισχύει

$$\text{βάρος}(J_{i_n}J_{i_{n-1}}\dots J_{i_1}[1]) \leq \left(\frac{a}{d}\right)^{n-1} a \quad (4.1.56)$$

όπου a, d είναι τα μεγέθη της διατύπωσης της πρότασης. Το i_1 είναι κάποια από τις N σφαίρες και το i_k είναι κάποια από τις $N-1$ σφαίρες, οποιαδήποτε δηλαδή εκτός δηλαδή της i_{k-1} , άρα υπάρχουν $N(N-1)^{n-1}$ όροι του τύπου $J_{i_n}J_{i_{n-1}}\dots J_{i_1}$. Άρα, το άθροισμα των βαρών όλων των όρων στην $S[1]$ είναι μικρότερο ή ίσο από

$$\sum_{n=1}^{\infty} N(N-1)^{n-1} \frac{a^{n-1}}{d^{n-1}} a = Na \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(N-1)a}{d} \right]^n \quad (4.1.57)$$

Εφόσον ισχύει $(N-1)a/d < 1$ η σειρά συγκλίνει άρα έχει εξασφαλιστεί η σύγκλιση του ψ . Επίσης, εφόσον κάθε όρος της σειράς $S[1]$ είναι θετικός, ισχύει προφανώς ότι

$$\psi = S[1] > 1$$

Αναρωτιέται κανείς αν ικανοποιείται η προϋπόθεση πως οι ιδιομορφίες δεν βρίσκονται αυθαίρετα κοντά στις επιφάνειες των σφαιρών $|\vec{r} - \vec{r}_k| = a_k$. Πράγματι, ο όρος $J_1J_2\dots J_k[1]$ δεν είναι απλά ένας πόλος στη σφαίρα 1 αλλά μια εικόνα ενός πόλου στη σφαίρα 2. Άρα θα βρίσκεται μέσα στην εικόνα της σφαίρας 2 στην σφαίρα 1 οπότε δεν θα είναι αυθαίρετα κοντά στην επιφάνεια της σφαίρας 1. Αυτό ισχύει διότι οι σφαίρες και κατ' επέκταση οι εικόνες τους, δεν τέμνονται. $\square$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι

Πρόταση 4.10. *Η συνάρτηση $\psi = S[1]$, στο R , δηλαδή στο χωρίο που αντιστοιχεί σε λίγο παραπάνω από το πάνω μισό της εικόνας 4.7(δηλαδή σε όλο το πάνω μέρος και λίγο εντός των σφαιρών)*

- Είναι καλά ορισμένη.

- Ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.
- Ικανοποιεί τη σχέση $J[\psi](\vec{r}) = \psi(\vec{r})$ για κάθε $\vec{r}$ τέτοιο ώστε $J\vec{r} \in R$.

Η συμμετρία ανάκλασης στο μικρό τμήμα εντός των σφαιρών, υποδηλώνει πως θα πρέπει να υπάρχει ένα πανομοιότυπο κάτω μισό το οποίο είναι ομαλά συνδεδεμένο με το πάνω μισό. Στο δεύτερο μέρος θα αποδείξουμε ότι αυτό όντως ισχύει.

Να σημειώσουμε επίσης, ότι αν αποδεχθούμε σαν λύση το $\psi = S[1]$ στο μέγιστο χωρίο που είναι καλά ορισμένο, τότε παίρνουμε μια εντελώς διαφορετική εικόνα από την εικόνα 4.7. Κάθε πόλος αντιστοιχεί σε μια διαφορετική ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή άρα έχουμε άπειρα διαφορετικά σύμπαντα.

Δεύτερο Μέρος

Έστω E_X^3 μια 3-διάστατη τοπολογικά ευκλείδια πολλαπλότητα. Ένα σημείο της E_X^3 θα συμβολίζεται με x . Έστω επίσης E_Y^3 μια ακόμη 3-διάστατη τοπολογικά ευκλείδια πολλαπλότητα. Ένα σημείο της E_Y^3 θα συμβολίζεται με y . Έστω επίσης $x^i(x)$ 3 συναρτήσεις $x^i : E_X^3 \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες ορίζουν ένα σύστημα συντεταγμένων στο E_X^3 . Ονομάζουμε αυτές τις συντεταγμένες κανονικές συντεταγμένες και τις συμβολίζουμε ως ένα διάνυσμα $\vec{x}(x) = (x^1(x), x^2(x), x^3(x))$. Παρόμοια, ορίζουμε ένα σύστημα κανονικών συντεταγμένων για την E_Y^3 . Χρησιμοποιώντας αυτά τα συστήματα συντεταγμένων, ορίζουμε σε κάθε χώρο ένα σύνολο από N σφαίρες με κέντρα στα σημεία $\vec{r}_k$ και ακτίνες a_k . Ορίζουμε τώρα τα υποσύνολα

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \{x \in E_X^3 : |\vec{x}(x) - \vec{r}_k| \geq a_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, N\} \\ L &= \{y \in E_Y^3 : |\vec{y}(y) - \vec{r}_k| > a_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, N\}\end{aligned}\quad (4.1.58)$$

τα οποία αποτελούνται από όλα τα σημεία που βρίσκονται έξω από τις σφαίρες (στο σύνολο $\bar{U}$ έχουμε συμπεριλάβει και τα σημεία που βρίσκονται στις επιφάνειες των σφαιρών). Τα σύνολα αυτά είναι τοπολογικά ισοδύναμοι χώροι με τα τμήματα της υπερεπιφάνειας που αντιστοιχούν στο πάνω και το κάτω φύλλο της εικόνας 4.7. Η υπερεπιφάνεια λοιπόν θα είναι η ένωση των $\bar{U}, L$

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= M = \bar{U} \cup L \\ \Sigma_0 &= M = \{z : z = x \in \bar{U} \quad \text{or} \quad z = y \in L\}\end{aligned}\quad (4.1.59)$$

Η υπερεπιφάνεια όμως είναι μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα, άρα θα πρέπει να δώσουμε στο M τη δομή διαφορίσιμης πολλαπλότητας. Για να γίνει αυτό, κάθε σημείο $z \in M$ θα πρέπει να βρίσκεται στο εσωτερικό ενός chart $(u, \chi)(\chi : M \rightarrow \mathbb{R}^3)$. Αν το z δεν βρίσκεται στο σύνορο του $\bar{U}$ τότε αυτή η απαίτηση ικανοποιείται θεωρώντας $\chi(z) \equiv \vec{x}(z) = \vec{x}(x)$ στην περίπτωση που $z = x$ (δηλαδή $z \in \bar{U}$) ή $\chi(z) \equiv \vec{y}(z) = \vec{y}(y)$ στην περίπτωση που $z = y$ (δηλαδή $z \in L$).

Απομένει η περίπτωση που το z βρίσκεται στο σύνορο του $\bar{U}$. Έστω ότι βρίσκεται στο σύνορο της σφαίρας 1. Ο ορισμός ενός chart γύρω από ένα τέτοιο σημείο είναι κρίσιμο βήμα στο να δώσουμε στην M τη δομή διαφορίσιμης πολλαπλότητας, διότι προηγουμένως τα $\bar{U}, L$ δεν είχαν κάποια ιδιαίτερη σχέση μεταξύ τους. Ορίζουμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων $\vec{y}(z) = \vec{y}(x)$ για σημεία $x \in \bar{U}$ κοντά ή πάνω στην σφαίρα 1 ως

$$\vec{y}(x) = J_1 \vec{x}(x) \quad (4.1.60)$$

όπου J_1 είναι ο γνωστός τελεστής αντιστροφής ως προς τη σφαίρα 1. Δεδομένου ότι $|\vec{x}(x) - \vec{r}_1| \geq a_1$ θα ισχύει ότι $|\vec{y}(x) - \vec{r}_1| \leq a_1$. Προφανώς στην περίπτωση που το x βρίσκεται πάνω στη σφαίρα, τότε $\vec{y}(x) = \vec{x}(x)$. Αυτές οι σχέσεις μας επιτρέπουν να ταυτοποιήσουμε σημεία $x \in \bar{U}$ κοντά στη σφαίρα 1 με σημεία $y \in E_Y^3$ που είναι μέσα στη σφαίρα 1_Y (δηλαδή εκτός του L) ως

$$y \equiv x \quad \text{όταν} \quad \vec{y}(y) = \vec{y}(x) \quad (4.1.61)$$

Για να αποδείξουμε ότι οι νέες συναρτήσεις συντεταγμένων $y^i(x)$ στο εσωτερικό U του $\bar{U}$ είναι καλά ορισμένες, δεδομένου ότι ήδη έχουμε επιλέξει ένα σύστημα καλά ορισμένων συντεταγμένων $x^i(x)$, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων $y^i(x^j)$, $x^i(y^j)$ δηλαδή $\vec{y} = J_1 \vec{x}$, $\vec{x} = J_1^{-1} \vec{y} = J_1 \vec{y}$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις. Πράγματι αυτό ισχύει, αν εξαιρέσουμε το σημείο $\vec{r}_1$. Θεωρούμε τώρα ένα σύστημα συντεταγμένων $\vec{y}(z)$ το οποίο ορίζεται για μια περιοχή P του M που δεν περιλαμβάνει μόνο το L (εκεί ορίζουμε $\vec{y}(z) = \vec{y}(y)$) αλλά και μια γειτονιά της σφαίρας 1 στο $\bar{U}$ (εκεί ορίζουμε $\vec{y}(z) = \vec{y}(x)$) όπως ορίζεται από την 4.1.60).

Πρέπει να αποδείξουμε ότι το $(P, \vec{y}(z))$ είναι ένα καλά ορισμένο chart. Οπώς δείξαμε προηγουμένως, οι αλλαγές συντεταγμένων στο $P \cap U$ είναι αναλυτικές (και προφανώς στο $P \cap L$). Υπάρχει μία ακόμα

συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται ώστε το $(P, \bar{y}(z))$ να αποτελεί καλά ορισμένο chart. Συγκεκριμένα η συνάρτηση $\bar{y}(z)$ θα πρέπει να απεικονίζει ανοιχτά σύνολα του P (που μεταξύ άλλων είναι και το ίδιο το P) σε ανοιχτά σύνολα του $\mathbb{R}^3$ σε 1-1 αντιστοιχία. Η δυσκολία στο να το πετύχουμε αυτό, είναι πως θέλουμε να συμπεριλάβουμε σημεία της σφαίρας 1 τα οποία είναι στο σύνορο του $\bar{U}$ ως εσωτερικά σημεία του P (γιατί αν είναι συνοριακά σημεία του P , η εικόνα του P δεν θα πηγαίνει σε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$). Αυτό μπορεί να γίνει αν ορίσουμε το P ως την ένωση του L με το σύνολο που περιλαμβάνει τα σημεία του $\bar{U}$ για τα οποία ισχύει

$$a_1 - \epsilon < |\bar{y}(x) - \bar{r}_1| \leq a_1 \quad (4.1.62)$$

για κάποιο $\epsilon > 0$. Τότε, σύμφωνα με τη σχέση 4.1.61, μπορούμε να σκεφτόμαστε το σύνολο L_ϵ ως το σύνολο όλων των σημείων $\bar{y}(z)$ που αποτελούν το L μαζί με τα επιπλέον σημεία που θα προκύψουν αν μειωθεί η ακτίνα της σφαίρας 1 κατά ϵ . Τα σημεία της σφαίρας 1 είναι εσωτερικά. Το σύνολο αυτό είναι ανοιχτό υποσύνολο του E_Y^3 (όπως και το L), οπότε είναι ένα καλά ορισμένο chart διότι ικανοποιεί την ιδιότητα που αναφέραμε προηγουμένως. Για να ισχύει ότι όντως το P ταυτίζεται με το L αν ελαττώσουμε κατά ϵ την ακτίνα της σφαίρας 1, θα πρέπει όλα τα σημεία x του E_X^3 που ικανοποιούν την 4.1.62 να ανήκουν στο $\bar{U}$, δηλαδή το $\bar{y}(x)$ δεν πρέπει να ανήκει στην J_1 εικόνα καμίας άλλης σφαίρας του E_X^3 . Αυτό είναι δυνατόν αν οι σφαίρες δεν τέμνονται, το οποίο και υποθέτουμε. Στη συνέχεια, αρκεί να πάρουμε το ϵ αρκετά μικρό.

Είναι προφανές ότι μπορούμε να επεκτείνουμε το $(P, \bar{y}(z))$ με τέτοιο τρόπο ώστε να συμπεριλάβουμε αντίστοιχες ϵ -γειτονιές όλων των υπόλοιπων σφαιρών του $\bar{U}$, οι οποίες θα αντιστοιχούν σε ϵ -περιοχές των αντίστοιχων σφαιρών του E_Y^3 , μέσω των εικόνων $\bar{y}(x) = J_k \bar{x}(x)$. Για αρκετά μικρά ϵ , οι γειτονιές αυτές (στο $\bar{U}$) δεν επικαλύπτονται. Θεωρούμε αρκετά μικρό ϵ ώστε $P \subseteq R$ όπου R είναι η περιοχή του E_Y^3 που είναι αντίστοιχη της περιοχής που ορίσαμε στις προτάσεις 4.8, 4.9.

Η δομή του M λοιπόν ως διαφορίσιμη πολλαπλότητα ορίζεται από 2 chart, το $(P, \bar{y}(z))$ και το $(U, \bar{x}(z))$ το οποίο μπορεί να επεκταθεί συνεχώς (ή αναλυτικά) ώστε να περιλαμβάνει και τα σημεία του ορίου ∂U (για λόγους συντομίας, άτυπα γράφουμε $(\bar{U}, \bar{x}(z))$, αν και αυτό δεν αποτελεί chart με την αυστηρή μαθηματική έννοια).

Ορίζουμε την εξής μετρική στο M . Συγκεκριμένα, ορίζουμε

$$ds^2 = \psi^4(\bar{y})(dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2) \quad (4.1.63)$$

στο chart, $(P, \bar{y}(z))$ και

$$ds^2 = \psi^4(\bar{x})(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (4.1.64)$$

στο chart, $(\bar{U}, \bar{x}(z))$, όπου $\psi = S[1]$. Η συνάρτηση $\psi = S[1]$, όπως αποδείξαμε προηγουμένως, είναι αναλυτική και μη μηδενική (οπότε η μετρική έχει την κατάλληλη υπογραφή), όπως θα έπρεπε για να είναι καλά ορισμένη η μετρική, και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace. Για να είναι καλά ορισμένη η μετρική που μόλις ορίσαμε, θα πρέπει στην τομή $P \cap \bar{U}$ οι εξισώσεις 4.1.63, 4.1.64 να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα, τα δεξιά μέλη των εξισώσεων 4.1.63, 4.1.64 θα πρέπει να συσχετίζονται μέσω του κανόνα μετασχηματισμού της μετρικής υπό αλλαγή συντεταγμένων, συγκεκριμένα ως προς τον μετασχηματισμό συντεταγμένων $y^i(x^j)$

$$\bar{y} = J_k \bar{x} \rightarrow \bar{y} = \bar{r}_k + \frac{a_k^2}{|\bar{x} - \bar{r}_k|^2} (\bar{x} - \bar{r}_k) \quad (4.1.65)$$

Ισοδύναμα

$$\bar{x} = \bar{r}_k + \frac{a_k^2}{|\bar{y} - \bar{r}_k|^2} (\bar{y} - \bar{r}_k) \quad (4.1.66)$$

Δηλαδή πρέπει

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \delta_{kl} \psi^4(\bar{x}) &= \psi^4(\bar{y}) \delta_{ij} \Leftrightarrow \frac{\partial x^k}{\partial (\bar{y} - \bar{r}_k)^i} \frac{\partial x^l}{\partial (\bar{y} - \bar{r}_k)^j} \delta_{kl} \psi^4(\bar{x}) = \psi^4(\bar{y}) \delta_{ij} \Leftrightarrow \\ \frac{a_k^4}{|\bar{y} - \bar{r}_k|^4} \delta_{ij} \psi^4(\bar{x}) &= \psi^4(\bar{y}) \delta_{ij} \Leftrightarrow \frac{a_k^4}{|\bar{y} - \bar{r}_k|^4} \psi^4(\bar{x}) = \psi^4(\bar{y}) \Rightarrow \psi(\bar{x}) = \frac{a_k}{|\bar{x} - \bar{r}_k|} \psi(J_k \bar{x}) \end{aligned}$$

(πιο αναλυτικά, για μετασχηματισμούς αντιστροφής βλ. τύπους από 4.2.13 έως 4.2.18. Εκεί βέβαια αναφερόμαστε σε μετασχηματισμούς αντιστροφής ως προς σφαίρα με κέντρο το 0 αλλά και η περίπτωση μας (κέντρο σφαίρας $\bar{r}_k$) είναι παρόμοια)

Θα πρέπει να ισχύει δηλαδή

$$J_k[\psi](\bar{x}) = \psi(\bar{x}) \quad \text{για κάθε } \bar{x} \text{ τέτοιο ώστε } J_k \bar{x} \in P \subseteq R \quad (4.1.67)$$

η οποία πράγματι ισχύει όπως αποδείξαμε προηγουμένως (πρόταση 4.10). Άρα η παραπάνω μετρική είναι καλά ορισμένη.

Άρα λοιπόν βλέπουμε ότι η μετρική έχει την ίδια μορφή στα $P, \bar{U}$ που έχουμε ταυτίσει με τα χωρία της υπερεπιφάνειας που αντιστοιχούν στα πάνω και κάτω φύλλα της εικόνας 4.7 το οποίο σημαίνει πως τα πάνω και κάτω μέρη της υπερεπιφάνειας που αντιστοιχεί στην εικόνα 4.7 είναι πανομοιότυπα.

4.2 Αρχικά Δεδομένα Bowen-York

Τα στιγμιαία στατικά αρχικά δεδομένα που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα δεν αντιστοιχούν σε ρεαλιστικές φυσικές καταστάσεις. Αυτό συμβαίνει, διότι στην αστροφυσική οι μαύρες τρύπες δεν είναι ακίνητες αλλά έχουν ορμή και στροφορμή. Για να κατασκευάσουμε σύνολα αρχικών δεδομένων, στα πλαίσια της σύμμορφης εγκάρσιας διάσπασης, που να αντιπροσωπεύουν τέτοιες καταστάσεις θα πρέπει να βρούμε λύσεις τως εξισώσεων περιορισμού της ορμής, πέραν της τετριμμένης $\bar{V} = 0$. Θεωρούμε έναν ασυμπτωτικά επίπεδο χωροχρόνο και μια αρχική υπερεπιφάνεια Σ_0 με μια ιδιομορφία (τοπολογία $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$). Θεωρούμε πως η σύμμορφη μετρική είναι επίπεδη $\bar{\gamma}_{ij} = f_{ij}$. Έχουμε απουσία ύλης και ενέργειας, οπότε $\bar{\rho}, \bar{j}^i = 0$. Για τα υπόλοιπα ελεύθερα δεδομένα επιλέγουμε $\bar{M}_{ij} = 0$ και $K = 0$ (τοπικά μέγιστη υπερεπιφάνεια). Υπενθυμίζουμε ότι στα πλαίσια της εγκάρσιας σύμμορφης διάσπασης, οι εξισώσεις περιορισμού της ορμής (με αυτά τα ελεύθερα δεδομένα) γράφονται ως

$$\bar{\Delta}_L \bar{V} = \bar{D}^2 \bar{V}^i + \frac{1}{3} \bar{D}^i \bar{D}_j \bar{V}^j = \nabla^2 \bar{V}^i + \frac{1}{3} \partial^i \partial_j \bar{V}^j = 0 \quad (4.2.1)$$

εφόσον $\bar{R}_{ij}^i = 0$ (επίπεδη σύμμορφη μετρική). Αν παίρναμε τη λύση $\bar{V}^i = 0$ θα καταλήγαμε στη λύση που βρήκαμε στην προηγούμενη ενότητα, δηλαδή στην υπερεπιφάνεια του χωροχρόνου Schwarchild. Μια μη τετριμμένη λύση της παραπάνω εξίσωσης βρέθηκε από τους Bowen-York[7],[8]. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ως προς τη σύμμορφη μετρική (δηλαδή $f_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$ σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων), όπου ως προς αυτό το σύστημα η ιδιομορφία O έχει συντεταγμένες $(0, 0, 0)$, η λύση γράφεται ως

$$\bar{V}^i = -\frac{1}{4r} [7P^i + n^i n_j P^j] + \frac{1}{r^2} \epsilon^{ijk} n_j S_k \quad (4.2.2)$$

όπου

- P^i, S^i σταθερά διανύσματα
- $n^i = \frac{x^i}{r}$ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Άρα

$$\bar{A}_{ij} = (\bar{L}\bar{V})_{ij} = \frac{3}{2r^2} [n_i P_j + n_j P_i + n_k P^k (n_i n_j - \delta_{ij})] - \frac{3}{r^3} (\epsilon_{ilk} n_j + \epsilon_{jlk} n_i) n^l S^k \quad (4.2.3)$$

Άρα λοιπόν για την εξωγενή καμπυλότητα έχουμε

$$K_{ij} = \psi^{-2} \bar{A}_{ij} \quad (4.2.4)$$

Αναρωτιέται κανείς ποια είναι η φυσική σημασία των P^i, S^i . Όπως θα δούμε, τα διανύσματα αυτά ταυτίζονται με την ADM-ορμή και στροφορμή της υπερεπιφάνειας Σ_0 .

- ADM-Ορμή των αρχικών δεδομένων $\Sigma_0, \gamma_{ij}, K_{ij}$
Έστω μια κλειστή 2-διάστατη επιφάνεια S_t της Σ_0 , q_{ij} η επαγόμενη μετρική σε αυτή και s^k το μοναδιαίο ορθογώνιο διανυσματικό πεδίο σε αυτή. Τότε για την i συνιστώσα της ADM-Ορμής ισχύει

$$P_i^{ADM} = \frac{1}{8\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} (K_{jk} - K \gamma_{jk}) (\partial_i)^j s^k \sqrt{q} d^2 y$$

Επειδή έχουμε ασυμπτωτικά επίπεδο χωροχρόνο, όταν $r \rightarrow \infty$ έχουμε ότι $\psi \approx 1$, $x^i \rightarrow$ ασυμπτωτικά καρτεσιανές συντεταγμένες.

Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι η S_t είναι σφαίρα ακτίνας r , στην περίπτωση των Bowen-York αρχικών δεδομένων, ισχύει προφανώς ότι $s^k = n^k$ οπότε έχουμε

$$P_i^{ADM} = \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{r=\text{const}} \bar{A}_{ik} n^k \sqrt{q} d^2 y \quad (4.2.5)$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$P_i^{ADM} = \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{r=const} \bar{A}_{ik} x^k r \sin \theta d\theta d\phi \quad (4.2.6)$$

Το τμήμα του $\bar{A}_{ij}$ που περιέχει το S^k μηδενίζεται γιατί στο ολοκλήρωμα φθίνει ως $O(1/r)$. Άρα τελικά

$$\begin{aligned} P_i^{ADM} &= \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{r=const} \frac{3}{2r^2} \left(x_i P_j x^j + r^2 P_i + P_k x^k \underbrace{\left(\frac{x_i r^2}{r^2} - x_i \right)}_0 \right) \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= \frac{3}{16\pi} \left(P_j \oint_{r=const} \frac{x^i x^j}{r^2} \sin \theta d\theta d\phi + P_i \underbrace{\oint_{r=const} \sin \theta d\theta d\phi}_{4\pi} \right) = \\ &= \frac{3}{16\pi} \left(P_j \oint_{r=const} \frac{x^i x^j}{r^2} \sin \theta d\theta d\phi + 4\pi P_i \right) = \frac{3}{16\pi} \left(P_j \delta^{ij} \oint_{r=const} \frac{(x^j)^2}{r^2} \sin \theta d\theta d\phi + 4\pi P_i \right) \end{aligned}$$

διότι αν $i \neq j$ στο προ-τελευταίο ολοκλήρωμα, τότε λόγω συμμετρίας θα ισούται με 0. Οπότε τελικά

$$P_i^{ADM} = \frac{3}{16\pi} P_i \left(\frac{1}{3} \oint_{r=const} \frac{r^2}{r^2} \sin \theta d\theta d\phi + 4\pi \right) = \frac{3}{16\pi} P_i \left(\frac{4\pi}{3} + 4\pi \right) = P_i \quad (4.2.7)$$

Άρα οι παράμετροι P_i είναι οι συνιστώσες της ADM γραμμικής ορμής στην υπερεπιφάνεια Σ_0 .

- ADM-Στροφορμή των αρχικών δεδομένων $\Sigma_0, \gamma_{ij}, K_{ij}$

Για την i συνιστώσα της ADM στροφορμής ισχύει

$$J_i = \frac{1}{8\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint (K_{jk} - K \gamma_{ij}) (\phi_i)^j s^k \sqrt{q} d^2 y \quad (4.2.8)$$

όπου

$$\begin{aligned} \phi_x &= -z\partial_y + y\partial_z \\ \phi_y &= -x\partial_z + z\partial_x \\ \phi_z &= -y\partial_x + x\partial_y \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

S_t κλειστή 2-διάστατη επιφάνεια της Σ_0 με επαγόμενη μετρική q_{ij} και με μοναδιαίο ορθογώνιο διανυσματικό πεδίο s^k .

Άρα για τα αρχικά δεδομένα Bowen-York, αν θεωρήσουμε ότι η S_t είναι σφαίρα ακτίνας r , έχουμε

$$J_i = \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{r=const} \bar{A}_{jk} (\phi_i)^j x^k \sin \theta d\theta d\phi \quad (4.2.10)$$

Αυτή τη φορά το τμήμα του $\bar{A}_{ij}$ που περιέχει το S_i θα συνεισφέρει το ολοκλήρωμα ενώ το τμήμα που περιέχει το P_i θα μηδενιστεί. Τελικά, μετά από πράξεις καταλήγουμε στο ότι

$$J_i = S_i \quad (4.2.11)$$

Άρα, οι παράμετροι S_i είναι οι συνιστώσες της ADM στροφορμής στην υπερεπιφάνεια Σ_0 .

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση 4.2.1 είναι γραμμικές άρα μπορούμε να θεωρήσουμε έναν γραμμικό συνδυασμό λύσεων ο οποίο πάλι θα αποτελεί λύση. Άρα, μπορούμε να προσθέσουμε λύσεις της ίδιας μορφής με διαφορετικά κέντρα $\vec{r} = \vec{r}_i$ (εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $\bar{V}^j(\vec{r} - \vec{r}_i)$ είναι επίσης λύση της 4.2.1) για να αναπαραστήσουμε ένα σύστημα σωμάτων με δεδομένες ορμές και στροφορμές.

Η λύση 4.2.3 δεν είναι συμμετρική κάτω από έναν μετασχηματισμούς αντιστροφής ως προς σφαίρα ακτίνας a . Για την ακρίβεια, οι Bowen-York κατασκεύασαν μια ακόμα λύση που περιέχει δύο επιπλέον όρους, η

οποία είναι συμμετρική κάτω από έναν μετασχηματισμό αντιστροφής ως προς μια σφαίρα ακτίνας $a[7]$. Συγκεκριμένα, πρόκειται για τη λύση

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{ij} = (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{V}})_{ij} &= \frac{3}{2r^2} [n_i P_j + n_j P_i + n_k P^k (n_i n_j - \delta_{ij})] \\
&\pm \frac{3a^2}{2r^4} [n_i P_j + n_j P_i - n_k P^k (5n_i n_j - \delta_{ij})] \\
&- \frac{3}{r^3} (\epsilon_{ilk} n_j + \epsilon_{jlk} n_i) n^l S^k = \\
&\pm \left[-\frac{3}{r^3} (\epsilon_{ilk} \eta_j + \epsilon_{jlk} \eta_i) \right] \frac{x_l}{r} S^k \\
&= \frac{3}{2r^2} \left[\frac{x_i}{r} P_j + \frac{x_j}{r} P_i + \frac{x_k}{r} P^k \left(\frac{x_i x_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) \right] \\
&\pm \frac{3a^2}{2r^4} \left[\frac{x_i}{r} P_j + \frac{x_j}{r} P_i - \frac{x_k}{r} P^k \left(5 \frac{x_i x_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) \right] \\
&- \frac{3}{r^3} \left(\epsilon_{ilk} \frac{x_j}{r} + \epsilon_{jlk} \frac{x_i}{r} \right) \frac{x_l}{r} S^k \\
&\pm \left[-\frac{3}{r^3} (\epsilon_{ilk} \frac{x_j}{r} + \epsilon_{jlk} \frac{x_i}{r}) \right] \frac{x_l}{r} S^k
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Αν υπολογίσουμε την ADM ορμή στην άλλη πλευρά της σκουληκότρυπας ($r \rightarrow 0$), τότε θα βρούμε ότι ισούται με P_i ή $-P_i$ ανάλογα με το πρόσημο που έχουμε διαλέξει στην παραπάνω έκφραση. Παρατηρούμε επίσης ότι αν διαλέξουμε πρόσημο $-$ τότε το S μέρος της λύσης μηδενίζεται.

Παρακάτω θα αποδείξουμε την εν λόγω συμμετρία

Έστω ο μετασχηματισμός αντιστροφής ως προς μια σφαίρα ακτίνας a με κέντρο το 0

$$\phi : \vec{r} \rightarrow \vec{r}' \quad y^i = a^2 \frac{x^i}{r^2} \tag{4.2.13}$$

όπου $r = \sqrt{\sum (x^i)^2}$. Ισοδύναμα

$$x^i = a^2 \frac{y^i}{r'^2} \tag{4.2.14}$$

όπου $r' = \sqrt{\sum ((x')^i)^2}$, εφόσον

$$r' = \frac{a^2}{r} \tag{4.2.15}$$

Επίσης, διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$\frac{y^i}{r'} = \frac{x^i}{r} \tag{4.2.16}$$

Έχουμε ότι

$$\frac{\partial x^k}{\partial y^i} = a^2 \frac{\delta_i^k r'^2 - 2y^i y^k}{r'^4} = a^2 \frac{\delta_i^k - s a^4 \frac{x^i x^k}{r^4}}{\frac{a^8}{r^4}} = \frac{1}{a^2} (\delta_i^k r^2 - 2x^i x^k) \tag{4.2.17}$$

$$\frac{\partial x^l}{\partial y^j} = \frac{1}{a^2} (\delta_j^l r^2 - 2x^j x^l) \tag{4.2.18}$$

οπότε

$$(\phi_* A_{ij})(\vec{r}') = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \bar{A}_{kl}(\vec{r}) = \frac{1}{a^4} (r^4 \bar{A}_{ij} - 2r^2 x^j x^k \bar{A}_{ik} - 2r^2 x^i x^k \bar{A}_{kj} + 4x^i x^j x^k x^l \bar{A}_{kl}) \tag{4.2.19}$$

Θα υπολογίσουμε τον κάθε όρο ξεχωριστά

- $r^2 x^j x^k \bar{A}_{ik}$

$$\begin{aligned}
r^2 x^j x^k \bar{A}_{ik} &= \frac{3r^2}{2r^2} r^2 \left[\frac{x_i x_j}{r^2} \frac{x_k}{r} P_k + \frac{x_j}{r} P_j \right] \pm \frac{3a^2 r^2}{2r^4} r^2 \left[\frac{x_i x_j}{r^2} \frac{x_k}{r} P_k + \frac{x_i}{r} P_j - 4 \frac{x_k}{r} P_k \frac{x_i x_j}{r^2} \right] \\
&- \frac{3r^2}{r^3} r^2 \left[\epsilon_{ilk} \frac{x_j}{r} + \underbrace{\frac{x_\rho}{r^2} \epsilon_{\rho lk} \frac{x_i}{r}}_a \right] \underbrace{\frac{x_l}{r} S^k}_b \pm \left[-\frac{3r^2}{r^3} r^2 \left[\epsilon_{ilk} \frac{x_j}{r} \right] \frac{x_l}{r} S^k \right]
\end{aligned}$$

Η συστολή των όρων a, b δίνει 0 διότι $\epsilon_{\rho lk} x_\rho x_l = -\epsilon_{l \rho k} x_\rho x_l$. Κάθε άλλη παρόμοια συστολή θα δίνει 0.

- $r^2 x^i x^k \bar{A}_{kj}$

$$r^2 x^i x^k \bar{A}_{kj} = \frac{3r^2}{2r^2} r^2 \left[\frac{x_i x_j}{r^2} \frac{x_k}{r} P_k + \frac{x_j}{r} P_j \right] \pm \frac{3a^2 r^2}{2r^4} r^2 \left[\frac{x_i x_j}{r^2} \frac{x_k}{r} P_k + \frac{x_i}{r} P_j - 4 \frac{x_k}{r} P_k \frac{x_i x_j}{r^2} \right] \\ - \frac{3r^2}{r^3} r^2 \left[\epsilon_{jlk} \frac{x_i}{r} \right] \frac{x_l}{r} S^k \pm \left[-\frac{3r^2}{r^3} r^2 \left[\epsilon_{ilk} \frac{x_j}{r} \right] \frac{x_l}{r} S^k \right]$$

- $x^i x^j x^k x^l \bar{A}_{kl}$

$$\frac{3r^2}{2r^2} r^2 \left[2 \frac{x_i x_j}{r^2} \frac{x_k}{r} P_k \right] \pm \frac{3a^2 r^2}{2r^4} r^2 \left[2 \frac{x_i x_j}{r^2} \frac{x_k}{r} P_k - 4 \frac{x_k}{r} P^k \frac{x_i x_j}{r^2} \right]$$

Άρα τελικά έχουμε

$$(\phi_* \bar{A}_{ij})(\vec{r}') = \frac{r^4}{a^4} \left[\frac{3}{2r^2} \left(-\frac{x_i}{r} P_j - \frac{x_j}{r} P_i + \frac{x_k}{r} P^k \left(5 \frac{x_i x_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) \right) \right. \\ \left. \pm \frac{3a^2}{2r^4} \left(-\frac{x_i}{r} P_j - \frac{x_j}{r} P_i - \frac{x_k}{r} P^k \left(\frac{x_i x_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) \right) \right. \\ \left. - \frac{3}{r^3} \left[-\epsilon_{ilk} \frac{x_j}{r} P_j - \epsilon_{jlk} \frac{x_i}{r} \right] \frac{x_l}{r} S^k \right. \\ \left. \pm \left[-\frac{3}{r^3} \left[-\epsilon_{ilk} \frac{x_j}{r} - \epsilon_{jlk} \frac{x_i}{r} \right] \frac{x_l}{r} S^k \right] \right] = \\ -\frac{a^4}{r'^4} \frac{r'^6}{a^6} \left[\frac{3}{2r'^2} \left(\frac{y_i}{r'} P_j + \frac{y_j}{r'} P_i - \frac{y_k}{r'} P^k \left(5 \frac{y_i y_j}{r'^2} - \delta_{ij} \right) \right) \right. \\ \left. \pm \frac{3a^2}{2r'^4} \left(\frac{y_i}{r'} P_j + \frac{y_j}{r'} P_i + \frac{y_k}{r'} P^k \left(\frac{y_i y_j}{r'^2} - \delta_{ij} \right) \right) \right. \\ \left. - \frac{3}{r'^3} \left[\epsilon_{ilk} \frac{y_j}{r'} P_j + \epsilon_{jlk} \frac{y_i}{r'} \right] \frac{y_l}{r'} S^k \right. \\ \left. \pm \left[-\frac{3}{r'^3} \left[\epsilon_{ilk} \frac{y_j}{r'} + \epsilon_{jlk} \frac{y_i}{r'} \right] \frac{y_l}{r'} S^k \right] \right]$$

Οπότε

- Στην περίπτωση που έχουμε + τότε

$$(\phi_* \bar{A}_{ij})(\vec{r}') = -\frac{r'^2}{a^2} \bar{A}_{ij}(\vec{r}') \quad (4.2.20)$$

- Στην περίπτωση που έχουμε - τότε

$$(\phi_* \bar{A}_{ij})(\vec{r}') = \frac{r'^2}{a^2} \bar{A}_{ij}(\vec{r}') \quad (4.2.21)$$

Επίσης, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\phi_* \bar{A}^{ij}(\vec{r}') = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^l} \bar{A}^{kl}(\vec{r}) = \pm \frac{a^2}{r'^2} \bar{A}^{ij}(\vec{r}') \quad (4.2.22)$$

Σύμμορφος παράγοντας ψ

Παραπάνω, περιγράψαμε 2 λύσεις των εξισώσεων περιορισμών της ορμής, οι οποίες όπως είδαμε δίνουν μη μηδενικές τιμές της ADM-ορμής και στροφορμής. Αντιστοιχούν δηλαδή σε μελανές σπές με ορμή και στροφορμή. Αποτελούν λοιπόν, μια πιο ρεαλιστική περίπτωση αρχικών δεδομένων σε σχέση με τα στιγμιαία στατικά αρχικά δεδομένα που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα. Για να ολοκληρωθεί ο προσδιορισμός των αρχικών δεδομένων πρέπει να προσδιορίσουμε και τον σύμμορφο παράγοντα ψ από τον

χαμιλτονιανό περιορισμό. Έχουμε επίπεδη σύμμορφη μετρική οπότε ισχύει ότι $\bar{R} = 0$. Επίσης, εφόσον έχουμε $K = 0$, $\rho = 0$ ο χαμιλτονιανός περιορισμός γράφεται ως

$$8\nabla^2\psi + \psi^{-7}\bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} = 0 \quad (4.2.23)$$

Θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί το ψ . Αρχικά θα εξάγουμε τη συνοριακή συνθήκη για $r \rightarrow \infty$ η οποία θα προκύψει από το γεγονός πως έχουμε ασυμπτωτικά επίπεδο χωροχρόνο. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι στην περιοχή $r \rightarrow \infty$ ισχύει η νευτώνια προσέγγιση. Προκύπτει ότι[2], αν ϕ είναι το νευτώνιο βαρυτικό δυναμικό, το οποίο προκύπτει από την εξίσωση

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho \quad (4.2.24)$$

τότε η μετρική του χωροχρόνου παίρνει τη μορφή

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)^2 dt^2 + (1 - 2\phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.2.25)$$

Αυτή φυσικά είναι μια προσέγγιση, η οποία λέγεται προσέγγιση ασθενούς πεδίου και ισχύει προφανώς μόνο στην περίπτωση ενός ασθενούς πεδίου, δηλαδή όταν $\phi \ll 1$. Στην περίπτωση μελανής οπής είναι $\phi = M/r$, άρα

$$\psi = \sqrt[4]{1 + \frac{M}{2r}} \approx 1 + \frac{M}{2r} \quad \text{για μεγάλα } r \quad (4.2.26)$$

Σε διαφορικούς όρους

$$\partial_r\psi = \frac{1}{r}(1 - \psi) \quad (4.2.27)$$

Χρειαζόμαστε ακόμη μία εσωτερική συνοριακή συνθήκη. Πριν την αναζήτηση της δεύτερης συνοριακής συνθήκης πρέπει να παρατηρήσουμε το πρόβλημα που υπάρχει καθώς $r \rightarrow 0$. Ακόμα και στην απλή περίπτωση Schwarzschild είχαμε βρεί την λύση $\psi = 1 + \frac{M}{2r}$ η οποία απειρίζεται στο $r = 0$, υπάρχει δηλαδή singularity. Οπότε και τώρα αναμένουμε singularity στο $r = 0$. Αυτό αποτελεί πρόβλημα, διότι κατά την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης, θα αρχίσουν να εμφανίζονται όλο και μεγαλύτερα σφάλματα καθώς πλησιάζουμε το $r = 0$. Παρακάτω, θα αναφέρουμε 2 προσεγγίσεις για την αντιμετώπιση του συγκεκριμένου προβλήματος, την μέθοδο αντιστροφής και την μέθοδο ιδιομορφιών.

4.2.1 Μέθοδος αντιστροφής

Στη μέθοδο αντιστροφής, θα χρησιμοποιήσουμε τη λύση 4.2.12 η οποία είναι συμμετρική κάτω από μετασχηματισμούς αντιστροφής ως προς σφαίρα ακτίνας a . Όπως και στην περίπτωση των στιγμιαία στατικών αρχικών δεδομένων θα επιλέξουμε μια εσωτερική συνοριακή συνθήκη ως εξής. Το ψ πρέπει να παίρνει τέτοιες τιμές πάνω σε μια σφαίρα S ακτίνας a , ώστε η μετρική γ_{ij} που θα προκύψει, να κάνει την S τοπικά ελάχιστη επιφάνεια της (Σ_0, γ_{ij}) . Όπως είχαμε βρει στην προηγούμενη ενότητα, η συνοριακή συνθήκη είναι η

$$\partial_r\psi|_{r=a} = -\frac{\psi}{2r}\Big|_{r=a} \quad (4.2.28)$$

Όπως θα δούμε, αν λύσουμε το χαμιλτονιανό περιορισμό εκτός της σφαίρας, με την παραπάνω συνοριακή συνθήκη, τότε η λύση στα σημεία εντός της σφαίρας προκύπτει αυτόματα. Αυτό είναι δυνατό, όπως θα δούμε, λόγω της συμμετρίας του $\bar{A}_{ij}$ κάτω από μετασχηματισμούς αντιστροφής. Έστω λοιπόν $\psi(\vec{r})$ η λύση της εξίσωσης

$$8\nabla^2\psi + \psi^{-7}\bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} = 0$$

για $r > a$. Έστω και ένας μετασχηματισμός αντιστροφής ως προς σφαίρα ακτίνας a

$$\vec{r}' = a^2 \frac{\vec{r}}{r^2}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $r' = \frac{a^2}{r}$

Έστω η συνάρτηση

$$\psi'(\vec{r}) = \frac{a}{r}\psi(\vec{r}) \quad (4.2.29)$$

η οποία ορίζεται για $r < a$. Όπως θα αποδείξουμε, αυτή είναι ακριβώς η λύση εντός της σφαίρας[13].

Ως προς τον σύμμορφο παράγοντα ψ' ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\bar{A}'_{ij} &= \psi'^2 A_{ij} = \frac{a^2}{r^2} \psi^2 A_{ij} = \frac{a^2}{r^2} \bar{A}_{ij} \\ (\bar{A}')^{ij} &= \psi'^{10} \bar{A}_{ij} = \frac{a^{10}}{r^{10}} \bar{A}^{ij}\end{aligned}\tag{4.2.30}$$

Άρα, για να είναι το $\psi'(\vec{r})$ λύση του χαμιλτονιανού περιορισμού εντός της σφαίρας, πρέπει να ισχύει

$$8\nabla^2\psi' + \psi'^{-7} \bar{A}'_{ij} (\bar{A}')^{ij} = 0 \Leftrightarrow 8\nabla^2\psi'(\vec{r}) + \frac{a^5}{r^5} (\psi(\vec{r}))^{-7} \bar{A}_{ij}(\vec{r}) \bar{A}^{ij}(\vec{r}) = 0\tag{4.2.31}$$

Αρχικά θα υπολογίσουμε την ποσότητα

$$\nabla^2\psi'(\vec{r}) = \nabla^2\left(\frac{a}{r}\psi(r')\right)\tag{4.2.32}$$

Υπενθυμίζουμε ότι η λαπλασιανή εκφράζεται σε σφαιρικές συντεταγμένες ως

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\tag{4.2.33}$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi'(\vec{r})}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{a}{r} \psi(r') \right) = -\frac{a}{r^2} \psi(r') + \frac{a}{r} \frac{\partial \psi(r')}{\partial r} = -\frac{a}{r^2} \psi(r') + \frac{a}{r} \frac{\partial \psi(r')}{\partial r'} \frac{\partial r'}{\partial r} = \\ &= -\frac{a}{r^2} \psi(r') - \frac{a^3}{r^3} \frac{\partial \psi(r')}{\partial r'}\end{aligned}\tag{4.2.34}$$

Άρα, με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi'(\vec{r})}{\partial r} \right) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[-a\psi(r') - \frac{a^3}{r} \frac{\partial \psi(r')}{\partial r'} \right] = \\ &= \frac{1}{r^2} \left[-a \frac{\partial \psi(r')}{\partial r'} \frac{\partial r'}{\partial r} + \frac{a^3}{r^2} \frac{\partial \psi(r')}{\partial r'} - \frac{a^3}{r} \frac{\partial^2 \psi(r')}{\partial r'^2} \frac{\partial r'}{\partial r} \right] = \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{a^3}{r^2} \frac{\partial \psi(r')}{\partial r'} + \frac{a^3}{r^2} \frac{\partial \psi(r')}{\partial r'} + \frac{a^5}{r^3} \frac{\partial^2 \psi(r')}{\partial r'^2} \right] = \\ &= \frac{r'^2}{a^4} \left[\frac{2r'^2}{a} \frac{\partial \psi(r')}{\partial r'} + \frac{r'^3}{a} \frac{\partial^2 \psi(r')}{\partial r'^2} \right] = \frac{r'^5}{a^5} \frac{1}{r'^2} \left[2r' \frac{\partial \psi(r')}{\partial r'} + r'^2 \frac{\partial^2 \psi(r')}{\partial r'^2} \right] = \\ &= \left(\frac{r'}{a} \right)^5 \frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left[r'^2 \frac{\partial \psi(r')}{\partial r'} \right]\end{aligned}$$

Προφανώς $\theta' = \theta$, $\phi' = \phi$ οπότε

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi'}{\partial \theta} \right) &= \frac{a}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ \frac{r'^3}{a^5 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) &= \left(\frac{r'}{a} \right)^5 \frac{1}{r'^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)\end{aligned}$$

και

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = \left(\frac{r'}{a} \right)^5 \frac{1}{r'^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}$$

Άρα τελικά προκύπτει

$$\nabla^2\psi'(\vec{r}) = \left(\frac{r'}{a} \right)^5 \nabla'^2\psi(r') = \left(\frac{a}{r} \right)^5 \nabla'^2\psi(r')\tag{4.2.35}$$

όπου $\nabla'^2\psi(r') = \nabla^2\psi(\vec{r})|_{\vec{r}=\vec{r}'}$.

Υπεθνυμίζουμε τη συμμετρία αντιστροφής των $\bar{A}_{ij}, \bar{A}^{ij}$

$$\phi_* \bar{A}^{ij}(\vec{r}') = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \bar{A}_{kl}(\vec{r}) = \pm \frac{r'^2}{a^2} \bar{A}^{ij}(\vec{r}') \quad (4.2.36)$$

$$\phi_* \bar{A}^{ij}(\vec{r}') = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^l} \bar{A}^{kl}(\vec{r}) = \pm \frac{a^2}{r'^2} \bar{A}^{ij}(\vec{r}') \quad (4.2.37)$$

Έχουμε λοιπόν

$$\bar{A}_{ij}(\vec{r}) \bar{A}^{ij}(\vec{r}) = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \bar{A}_{kl}(\vec{r}) \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^j}{\partial x^\nu} \bar{A}^{\mu\nu}(\vec{r}) = \bar{A}_{ij}(\vec{r}') \bar{A}^{ij}(\vec{r}') \quad (4.2.38)$$

Οπότε, με βάση τις 4.2.35, 4.2.38 έχουμε τελικά

$$8\nabla^2 \psi'(\vec{r}) + \frac{a^5}{r^5} \bar{A}_{ij}(\vec{r}) \bar{A}^{ij}(\vec{r}) = \frac{a^5}{r^5} \left[(\nabla')^2 \psi(\vec{r}') + \left(\psi(\vec{r}')^{-7} \bar{A}_{ij}(\vec{r}') \bar{A}^{ij}(\vec{r}') \right) \right] = 0 \quad (4.2.39)$$

διότι η έκφραση μέσα στην παρένθεση είναι η εξίσωση χαμιλτονιανού περιορισμού για $r' > a$ και το ψ είναι λύση της.

Άρα λοιπόν πράγματι η $\psi'(\vec{r}) = \frac{a}{r} \psi(\frac{a^2}{r^2} \vec{r})$ είναι λύση του χαμιλτονιανού περιορισμού εντός της σφαίρας.

Επίσης, από τις 4.2.34, 4.2.28 βρίσκουμε ότι

$$\left. \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (4.2.40)$$

Από τις 4.2.34, 4.2.28 έχουμε επίσης

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi'(\vec{r})}{\partial r^2} &= \frac{2a}{r^3} \psi(\vec{r}') + \frac{a}{r^2} \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial \psi(\vec{r}')}{\partial r'} + \frac{3a^3}{r^4} \frac{\partial \psi(\vec{r}')}{\partial r'} + \frac{a^2}{r^2} \frac{a^3}{r^3} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}')}{\partial r'^2} \Rightarrow \\ \left. \frac{\partial^2 \psi'(\vec{r})}{\partial r^2} \right|_{r=a} &= \frac{2}{a^2} \underbrace{\psi}_{-2a\partial_r \psi|_{r=a}} + \frac{1}{a} \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=a} + \frac{3}{a} \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=a} + \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right|_{r=a} \end{aligned}$$

Άρα η λύση $\psi \in C^2$ το οποίο αρκεί για να είναι καλά ορισμένη η μετρική.

Κάνοντας τώρα έναν μετασχηματισμό αντιστροφής

$$\begin{aligned} \phi : \vec{r} &\rightarrow \vec{r}' \\ \vec{r}' &= \frac{a^2}{r^2} \vec{r} \Leftrightarrow \vec{r} = \frac{a^2}{r'^2} \vec{r}' \end{aligned}$$

η ψ' ως προς το νέο σύστημα συντεταγμένων γράφεται

$$\psi'(\vec{r}') = \frac{r'}{a} \psi(\vec{r}) \rightarrow \frac{r'}{a} \left(1 + \frac{M}{2r'} \right) \approx \frac{r'}{a} \quad \text{όταν } r' \rightarrow \infty (r \rightarrow 0) \quad (4.2.41)$$

δηλαδή κοντά στην ιδιομορφία. Επίσης τα στοιχεία της σύμμορφης μετρικής ως προς το νέο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$\bar{\gamma}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \delta_{kl} = a^4 \frac{\delta_i^k r'^2 - 2y^i y^k}{r'^4} \frac{\delta_j^l r'^2 - 2y^j y^l}{r'^4} \delta_{kl} = \frac{a^4}{r'^4} \delta_{ij} \quad (4.2.42)$$

Άρα λοιπόν, κοντά στην ιδιομορφία $r' \rightarrow \infty (r \rightarrow 0)$ έχουμε

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \bar{\gamma}_{ij} = \left(\frac{r'}{a} \right)^4 \frac{a^4}{r'^4} \delta_{ij} = \delta_{ij} \quad (4.2.43)$$

υπάρχει δηλαδή ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή του χωροχρόνου.

Δεδομένα που προκύπτουν από αυτή τη μέθοδο μπορούν να θεωρηθούν ως **γενίκευση των δεδομένων Misner** στην περίπτωση που έχουμε μη τετριμμένη(μη μηδενική) εξωγενή καμπυλότητα, διότι η ψ έχει τη συμμετρία 4.1.40

$$J[\psi] = \psi \quad (4.2.44)$$

διότι $\psi'(\vec{r}) = J[\psi](\vec{r}) (\Rightarrow J[\psi'](\vec{r}) = \psi(\vec{r}))$. Δηλαδή το πάνω και το κάτω μέρος(εντός και εκτός της σφαίρας) είναι πανομοιότυπα. Τι ακριβώς σημαίνει αυτό; Όπως είχαμε πει και στην υποενότητα των δεδομένων Misner, αρχικά αντιστοιχούμε ένα σημείο $\vec{r}$ με $r > a$ από το πάνω μέρος σε ένα σημείο $\vec{r}' = J\vec{r}$ στο κάτω μέρος. Τότε, δεδομένου ότι ισχύει η 4.2.44, προκύπτει πως η μετρική είναι ίδια στα δύο χωρία

$$ds^2 = \psi^4(\vec{r}) dx^i dx^i = \underbrace{\psi^4(\vec{r}')}_{\psi'(\vec{r}')} d(x')^i d(x')^i \quad (4.2.45)$$

4.2.2 Μέθοδος Ιδιομορφιών

Στα πλαίσια της μεθόδου ιδιομορφιών, θα χρησιμοποιήσουμε την απλή, μη συμμετρική λύση Bowen-York

$$\bar{A}_{ij} = (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{V}})_{ij} = \frac{3}{2r^2}[n_i P_j + n_j P_i + n_k P^k(n_i n_j - \delta_{ij})] - \frac{3}{r^3}(\epsilon_{ilk} n_j + \epsilon_{jlk} n_i) n^l S^k \quad (4.2.46)$$

Θα έχουμε έναν τέτοιο όρο για κάθε μαύρη τρύπα. Το γεγονός της μη ύπαρξης συμμετρίας σημαίνει ότι δεν υπάρχει κάποιο φυσικό όριο στο οποίο θα σταματήσουμε την ολοκλήρωση. Άρα θα πρέπει να ολοκληρώσουμε σε όλο το χώρο ακόμα και στις περιοχές κοντά στις ιδιομορφίες. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι να γράψουμε το ψ στην μορφή

$$\psi = \psi_{BL} + u \quad (4.2.47)$$

όπου

$$\psi_{BL} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (4.2.48)$$

Έχουμε θεωρήσει δηλαδή, ότι το singular κομμάτι της λύσης, έχει την ίδια μορφή με τα αρχικά δεδομένα τύπου Brill-Lindquist (με τη διαφορά ότι το 1 έχο απορροφηθεί στο u). Προφανώς

$$\nabla^2 \psi_{BL} = 0 \quad \mathbb{R}^3 - \{\vec{r}_i\} \quad (4.2.49)$$

Άρα η εξίσωση χαμιλτονιανού περιορισμού γίνεται

$$\nabla^2 u + \underbrace{\frac{1}{8\psi_{BL}^7} \bar{A}_{ij} \bar{A}^{ij}}_{\eta} \left(1 + \frac{u}{\psi_{BL}}\right)^{-7} = 0 \quad (4.2.50)$$

Όπως και πριν, όταν $r \rightarrow \infty$, επειδή έχουμε ασυμπτωτικά επίπεδο χωροχρόνο, θα είναι

$$u = a + \frac{k}{r} \Rightarrow \partial_r u = \frac{1-u}{r} \quad (4.2.51)$$

για κάποια σταθερά k . Τί γίνεται όμως κοντά στις ιδιομορφίες; Όπως θα δούμε, η μέθοδος αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό του u χωρίς τη χρήση συνοριακών συνθηκών στις ιδιομορφίες. Αρχικά, υπολογίζουμε την τάξη των μεγεθών ψ_{BL} , $\bar{A}_{ij} \bar{A}^{ij}$ σε δυνάμεις του $|\vec{r} - \vec{r}_i|$ κοντά στην ιδιομορφία $\vec{r}_i$. Συγκεκριμένα, βρίσκουμε

- $\psi_{BL} \sim |\vec{r} - \vec{r}_i|^{-1}$
- $\bar{A}_{ij} \bar{A}^{ij} \sim |\vec{r} - \vec{r}_i|^{-6}$, για στροφορμή $S^i \neq 0$
 $\bar{A}_{ij} \bar{A}^{ij} \sim |\vec{r} - \vec{r}_i|^{-4}$, για στροφορμή $S^i = 0$

Άρα

- $\eta \sim |\vec{r} - \vec{r}_i|$, για στροφορμή $S^i \neq 0$
- $\eta \sim |\vec{r} - \vec{r}_i|^3$, για στροφορμή $S^i = 0$

Άρα, κοντά στις ιδιομορφίες, η εξίσωση 4.2.50 γίνεται

$$\nabla^2 u = 0 \quad (4.2.52)$$

Οι Brandt, Bruegmann απέδειξαν ότι κάτω από αυτές τις συνθήκες, υπάρχει μοναδική C^2 λύση του χαμιλτονιανού περιορισμού σε όλο το $\mathbb{R}^3$ [9], οπότε μπορούμε απλά να αγνοήσουμε τις ιδιομορφίες και να λύσουμε την εξίσωση 4.2.50 σε όλο το $\mathbb{R}^3$.

Εφόσον κοντά σε κάποια ιδιομορφία κυριαρχεί ο όρος ψ_{BL} , διαπιστώνουμε ότι κοντά σε αυτήν υπάρχει ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή του χωροχρόνου. Αν υπολογίσουμε την ADM ορμή σε αυτές τις ασυμπτωτικά επίπεδες περιοχές, θα βρούμε ότι μηδενίζεται. Αυτό συμβαίνει διότι χρησιμοποιήσαμε την απλή, μη συμμετρική λύση για το $\bar{A}_{ij}$ ενώ μόνο οι όροι ανάλογοι του a^2 της συμμετρικής λύσης συνεισφέρουν στην ADM-ορμή. Άρα από την άλλη πλευρά της σκουληκότρυπας η μαύρη τρύπα φαίνεται να έχει μηδενική ορμή.

Επίσης, εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι οι ADM-μάζες που υπολογίζονται στις ασυμπτωτικά επίπεδες περιοχές των ιδιομορφιών είναι

$$M_i = m_i \left(1 + u_i + \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{2r_{ij}} \right), \quad u_i = u(\vec{r}_i) \quad (4.2.53)$$

Κάνουμε και την εξής τελευταία παρατήρηση. Σε αυτή τη μέθοδο, δε θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη συμμετρική λύση $\bar{A}_{ij}$ διότι τότε θα ίσχυε

$$\bar{A}_{ij} \bar{A}^{ij} \sim |\vec{r} - \vec{r}_i|^{-8} \quad (4.2.54)$$

κοντά στην $\vec{r}_i$ ιδιομορφία, οπότε το η θα απέκλινε.

Δεδομένα που προκύπτουν από αυτή τη μέθοδο μπορούν να θεωρηθούν ως **γενίκευση των δεδομένων Brill-Lindquist** στην περίπτωση που έχουμε μη τετρωμένη(μη μηδενική) εξωγενή καμπυλότητα.

Βιβλιογραφία

- [1] M. Alcubierre et al. “Symmetry without symmetry: Numerical simulation of axisymmetric systems using Cartesian grids.”. In: *Int. J. Mod. Phys. D* 10(3) (2001), pp. 273–289.
- [2] Miguel Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford University Press, 2008. ISBN: 9780191709371.
- [3] Konstantinos N. Anagnostopoulos. *General Theory of Relativity and Cosmology*. URL: <https://www.physics.ntua.gr/konstant/GR/videos.html>.
- [4] Miguel Sánchez Antonio N. Bernal. “Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes”. In: *Commun.Math.Phys.* 257 (2005), pp. 43–50. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00220-005-1346-1>.
- [5] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. “The Dynamics of General Relativity”. In: *Gravitation: An Introduction to Current Research*. Ed. by L. Witten. New York: Wiley, 1962, pp. 227–265.
- [6] N. T. Bishop. “The closed trapped region and the apparent horizon of two Schwarzschild black holes.”. In: *Gen. Rel. Grav.* 14(9) (1982), pp. 717–723.
- [7] J. M. Bowen. “General form for the longitudinal momentum of a spherically symmetric source.”. In: *Gen. Rel. Grav.* 11(3) (1979), pp. 227–231.
- [8] J. M. Bowen and J. W. York. “Time-asymmetric initial data for black holes and black hole collisions.”. In: *Phys. Rev. D* 21(8) (1980), pp. 2047–2056.
- [9] S. Brandt and B. Bruggmann. “A simple construction of initial data for multiple black holes.”. In: *Phys. Rev. Lett.* 78(19) (1997), pp. 3606–3609.
- [10] D. S. Brill and R. W. Lindquist. “Interaction energy in geometrostatics.”. In: *Phys. Rev.* 131(1) (1963), pp. 471–476.
- [11] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry*. Cambridge University Press, 2019. ISBN: 9781108770385.
- [12] S Frittelli. “Note on the propagation of the constraints in standard 3+1 general relativity.”. In: *Phys. Rev. D* 55.10 (1997), pp. 5992–5996.
- [13] Harald P. Pfeiffer Geoffrey Lovelace Robert Owen and Tony Chu. “Binary-black-hole initial data with nearly-extremal spins”. In: *Phys.Rev.D* 78 (2008), p. 084017. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.084017>.
- [14] Ericourgoulhon. *3+1 Formalism in General Relativity*. Springer, 2012. ISBN: 978-3-642-24525-1.
- [15] James B. Hartle. *Gravity*. Cambridge University Press, 2021. ISBN: 9781009042604.
- [16] C. W. Misner. “The method of images in geometrostatics.”. In: *Ann. Phys.* 24 (1963), pp. 102–117.
- [17] H. P. Pfeiffer and J. W. York. “Extrinsic curvature and the Einstein constraints”. In: *Phys. Rev. D* 67 (2003), p. 044022. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.044022>.
- [18] Norbert Straumann. *General Relativity*. Springer, 2012. ISBN: 978-94-007-5410-2.
- [19] Stuart L. Shapiro Thomas W. Baumgarte. *Numerical Relativity*. Cambridge University Press, 2010. ISBN: 9781139193344.
- [20] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984. ISBN: 9780226870335.
- [21] J. W. York. “Conformal ‘thin-sandwich’ data for the initial-value problem of general relativity.”. In: *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999), pp. 1350–1353.
- [22] Jr. York J. W. “Kinematics and Dynamics of General Relativity”. In: *Sources of Gravitational Radiation*. Ed. by L. Smarr. Cambridge: Cambridge University Press, 1979, pp. 83–126.