

Το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών σε Συστήματα Μελανών Οπών στην Αριθμητική Σχετικότητα

Κωνσταντίνος-Νεκτάριος Βασιλείου

17 Οκτωβρίου 2025

Πρόβλημα Cauchy

Οι εξισώσεις Einstein στην αρχική covariant μορφή τους(τανυστικές εξισώσεις)

- ▶ Είναι αναλλοίωτες κάτω απο μετασχηματισμούς συντεταγμένων
 - ▶ $\chi\acute{o}\rho o s \equiv \chi\rho\acute{o}n o s$
 - ▶ Δεν υπάρχει καθορισμένη χρονική διεύθυνση εξέλιξης
- ▶ Ικανοποιούν τις ταυτότητες Bianchi $\nabla^m G_{mn} = 0$

→μόνο έξι από τις δέκα εξισώσεις Einstein είναι ανεξάρτητες(περιέχουν δηλαδή πραγματική δυναμική πληροφορία).

Οι υπόλοιπες→εξισώσεις περιορισμού(απλώς γεωμετρικές σχέσεις που πρέπει πάντα να ικανοποιεί η μετρική) αντί για εξισώσεις εξέλιξης.

Εξισώσεις Einstein $\neq$ πρόβλημα Cauchy

Πως θα γίνει ο διαχωρισμός ανάμεσα σε εξισώσεις εξέλιξης/περιορισμού;

- ▶ Κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων(δεν είναι a priori καθορισμένο λόγω της συναλλοιότητας των εξισώσεων)
- ▶ Ισοδύναμη μορφή των εξισώσεων, για ένα καθορισμένο σύνολο μεταβλητών→ διαχωρισμό χωρικών/χρονικών παραγώγων.

Επαγόμενη Μετρική

Έστω πολλαπλότητα (M, g_{ij}) και κάποια χωροειδής υπερεπιφάνεια S . Η επαγόμενη μετρική γ_{ij} της g_{ij} στην S

- ▶ Είναι ένας ταυνοστής της υπερεπιφάνειας που προκύπτει από τον περιορισμό της g_{ij} στην S .
- ▶ Ορίζεται στην S : η δράση της σε τρισδιάστατα διανύσματα της $S =$ δράση της g_{ij} στα αντίστοιχα τετραδιάστατα διανύσματα της M που είναι εφαπτόμενα στην S .

Μπορούμε να εμβαπτίσουμε την επαγόμενη μετρική στην M ώστε να την δούμε και ως ταυνοστή που «ζει» στην πολλαπλότητα

- ▶ Η δράση του σε τετραδιάστατα διανύσματα της M εφαπτόμενα στην $S =$ δράση της γ_{ij} ορισμένης στην S , στα αντίστοιχα τρισδιάστατα διανύσματα της S
- ▶ Η δράση του σε ορθογώνια στην υπερεπιφάνεια διανύσματα=0

Ισχύει ότι

$$\gamma_{\mu\nu} = P_{\mu\nu} \quad (0.1)$$

όπου $P_{\mu\nu}$ ο προβολικός τελεστής

$$P_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \eta^{\mu} \eta_{\nu} \quad (0.2)$$

η^{μ} : μοναδιαίο ορθογώνιο διανυσματικό πεδίο της S .

Συναλλοίωτη Παράγωγος

Έστω μια υπερεπιφάνεια Σ (κάθετο διανυσματικό πεδίο $\vec{s}$, προβολικός τελεστής P_{ν}^{μ}) με επαγόμενη μετρική $\gamma_{\mu\nu}$. Για τη μοναδική συναλλοίωτη παράγωγο που είναι

- ▶ χωρίς στρέψη
- ▶ συμβατή με την επαγόμενη μετρική (σύνδεση Levi-Civita) ισχύει ότι:

$$D_m T_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k} = P_{m_1}^{i_1} P_{m_2}^{i_2} \dots P_{m_k}^{i_k} P_{j_1}^{n_1} P_{j_2}^{n_2} \dots P_{j_l}^{n_l} P_m^a \nabla_a T_{n_1 n_2 \dots n_l}^{m_1 m_2 \dots m_k} \quad (0.3)$$

- ▶ Ο ταυιστής

$$D_m T_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k}$$

είναι χωρικός ως προς την υπερεπιφάνεια (contraction με το $\eta^{\mu} = 0$ με όλους του δείκτες).

- ▶ Κάθε χωρικό ταυιστή μπορούμε να τον δούμε και σαν ταυιστή που ορίζεται στην υπερεπιφάνεια $\rightarrow D$ συναλλοίωτη παράγωγος της υπερεπιφάνειας.
- ▶ Ορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε $D_k T_{ij} : \text{προκύπτει από τον περιορισμό του } D_{\lambda} T_{\mu\nu} \text{ στην } \Sigma.$
Άρα αν $\gamma_{ij} = (\gamma_{ij}, S)$, τότε $D_k \gamma_{ij} = 0$ εφόσον $D_{\lambda} \gamma_{\mu\nu} = 0$.
Άρα όντως η (D, S) είναι η σύνδεση Levi-Civita της υπερεπιφάνειας.

3+1 Διαχωρισμός του Χωροχρόνου

- ▶ Κάθε καθολικά υπερβολικός χωροχρόνος, μπορεί να υποστεί πλήρη διαμερισμό ή φύλλωση (completely foliated)
→ διαχωρισμός σε τρισδιάστατες χωροειδείς υπερεπιφάνειες
→ κάθε υπερεπιφάνεια ταυτίζεται με μια τιμή κάποιας παραμέτρου t .
- ▶ Προσαρμοσμένες συντεταγμένες (adapted coordinates) ως προς μια διαμέριση
→ προκύπτουν με φυσικό τρόπο κατά την επιλογή μιας διαμέρισης του M σε υπερεπιφάνειες S_t .
→ σημείο $P \in S_t$: συντεταγμένες

$$x^n = (t, x^i)$$

όπου $x^i = (x^1, x^2, x^3)$ ένα σύστημα συντεταγμένων της S_t .

- ▶ Η βαθμωτή ποσότητα

$$\alpha = 1/\sqrt{|(\nabla^m t, \nabla_m t)|} \quad (0.4)$$

ονομάζεται συνάρτηση μετάβασης.

3+1 Διαχωρισμός του Χωροχρόνου

- ▶ Μοναδιαίο ορθογώνιο στις υπερεπιφάνειες της διαμέρισης διανυσματικό πεδίο η^n

$$\eta^m = -\alpha \nabla^m t \quad (0.5)$$

- ▶ Κανονικός παρατηρητής(ή Eulerian observer) : κοσμική γραμμή = κάποια από τις ολοκληρωτικές καμπύλες του η^m .
- ▶ Κάθετο διάνυσμα χρονικής εξέλιξης

$$m^a = \alpha \eta^a \quad (0.6)$$

chart (U, ϕ) : περιέχει τις υπερεπιφάνειες $S_t, S_{t+\delta t}$.

$S_t \rightarrow S_{t+\delta t}$ (συγκεκριμένα αναφερόμαστε στις εικόνες τους στο $\mathbb{R}^4$ μέσω της ϕ)

Μετατόπιση κατά $\delta t \vec{m}$ όπου $\vec{m}$ είναι το διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^4$ που αντιστοιχεί(μέσω της ϕ) στο m^a της πολλαπλότητας.

- ▶ Ο ιδιόχρονος που μετράει ένας κανονικός παρατηρητής μεταξύ των υπερεπιφανειών $S_t, S_{t+\delta t}$ ισούται με:

$$\delta\tau = \alpha \delta t \quad (0.7)$$

3+1 Διαχωρισμός του Χωροχρόνου

- ▶ Διανυσματικό πεδίο μετατόπισης

$$\beta^a = \partial_t - m^a \quad (0.8)$$

- ▶ Σε ένα σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο σε κάποιο foliation είναι

$$\eta^\mu = \left(\frac{1}{a}, -\frac{\beta^i}{a} \right) \quad (0.9)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta^k \beta_k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad (0.10)$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \beta^\kappa \beta_\kappa & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad (0.11)$$

$$\gamma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j / \alpha^2 \end{pmatrix} \quad (0.12)$$

3+1 Διαχωρισμός του Χωροχρόνου

- Τανυστής εξωγενούς καμπυλότητας

$$K_{\mu\nu} = -P_{\mu}^{\alpha} P_{\nu}^{\beta} \nabla_{\alpha} \eta_{\beta} \quad (0.13)$$

- Για διανυσματικό πεδίο v^{μ} ισχύει

$$K_{\mu}^{\nu} v^{\mu} = D_{\nu} v^{\nu} \quad (0.14)$$

Μας δίνει την πληροφορία για το πόσο αποκλίνει από την παράλληλη μετατόπιση, ένα ορθογώνιο στην υπερεπιφάνεια διανυσματικό πεδίο, κατά μήκος μιας ολοκληρωτικής καμπύλης ενός άλλου διανυσματικού πεδίου.

- Είναι χωρικός και συμμετρικός

$$K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu} \quad (0.15)$$

- Ισχύει ότι

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\vec{\eta}} \gamma_{\mu\nu} \quad (0.16)$$

3+1 Διαχωρισμός του Χωροχρόνου

- Ισχύει ότι

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\vec{\eta}}\gamma_{\mu\nu} \quad (0.17)$$

Από την παραπάνω σχέση καταλήγουμε στις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i \quad (0.18)$$

Χρειαζόμαστε ακόμη ένα σύνολο από εξισώσεις χρονικής εξέλιξης για τα K_{ij}

- Εξίσωση Gauss Codazzi

$$P_{\delta}^{\alpha} P_{\beta}^{\kappa} P_{\mu}^{\lambda} P_{\nu}^{\sigma} R_{\kappa\lambda\sigma}^{\delta} = {}^{(3)}R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} + K_{\nu\beta} K_{\mu}^{\alpha} - K_{\mu\beta} K_{\nu}^{\alpha} \quad (0.19)$$

- Εξίσωση Codazzi-Mainardi

$$P_{\alpha}^{\delta} P_{\beta}^{\kappa} P_{\mu}^{\lambda} \eta^{\nu} R_{\delta\kappa\lambda\nu} = D_{\beta} K_{\alpha\mu} - D_{\alpha} K_{\beta\mu} \quad (0.20)$$

- Εξίσωση Ricci

$$\eta^d \eta^c \gamma_a^q \gamma_b^r R_{qcrd} = \mathcal{L}_{\vec{\eta}} K_{ab} + \frac{1}{\alpha} D_a D_b \alpha + K_b^c K_{ac} \quad (0.21)$$

Εξισώσεις Einstein σε 3+1 Μορφή

Εξισώσεις Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (0.22)$$

και στην ισοδύναμη μορφή

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} T \right) \quad (0.23)$$

Παίρνουμε τις εξής συστολές με τον προβολικό τελεστή:

$$P^{\alpha\mu} P^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = 2\eta^\mu \eta^\nu G_{\mu\nu} \quad (0.24)$$

Από την εξίσωση Gauss-Codazzi έχουμε

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} P_{\alpha}^{\delta} P_{\beta}^{\kappa} P_{\mu}^{\lambda} P_{\nu}^{\sigma} R_{\delta\kappa\lambda\sigma} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} \rightarrow$$
$$P^{\alpha\mu} P^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}$$

Απο τα παραπάνω καταλήγουμε στον Χαμιλτονιανό περιορισμό

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} = 16\pi\rho, \quad \rho = \eta^\mu \eta^\nu T_{\mu\nu} \quad (0.25)$$

ρ είναι η πυκνότητα ενέργειας που αντιλαμβάνεται ένας κανονικός παρατηρητής

Εξισώσεις Einstein σε 3+1 Μορφή

Παίρνουμε τώρα τη συστολή

$$P^{\alpha\mu}\eta^\nu G_{\mu\nu} = P^{\alpha\mu}\eta^\nu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}P^\alpha_\nu\eta^\nu R = P^{\alpha\mu}\eta_\nu R_{\mu\nu} \quad (0.26)$$

Από την εξίσωση Codazzi-Mainardi

$$P^\delta_\alpha P^{\beta\kappa} P^{\mu\lambda}\eta^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu} = D^\beta K^\mu_\alpha - D_\alpha K^{\beta\mu} \quad (0.27)$$

Θεωρώντας τώρα τη συστολή στους δείκτες α, μ καταλήγουμε στη σχέση

$$P^{\beta\kappa}\eta^\nu R_{\kappa\nu} = D^\beta K - D_\mu K^{\beta\mu} \rightarrow P^{\alpha\mu}\eta^\nu R_{\mu\nu} = D^\alpha K - D_\mu K^{\alpha\mu} \quad (0.28)$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις και από τις εξισώσεις Einstein καταλήγουμε στις εξισώσεις περιορισμού της ορμής.

$$D_\mu (K^{\alpha\mu} - \gamma^{\alpha\mu} K) = 8\pi j^\alpha, \quad j^\alpha = -\gamma^{\alpha\mu}\eta^\nu T_{\mu\nu} \quad (0.29)$$

j^α είναι η πυκνότητα ορμής στη διεύθυνση a που αντιλαμβάνεται ένας κανονικός παρατηρητής.

Εξισώσεις Einstein σε 3+1 Μορφή

Οι εξισώσεις Gauss Codazzi, Codazzi-Mainardi περιέχουν μόνο 14 από τα 20 ανεξάρτητα components του τανυστή Riemann

Για να πάρουμε και τα υπόλοιπα ανεξάρτητα components του τανυστή Riemann θα πρέπει να πάρουμε και δεύτερη φορά τη συστολή του τανυστή Riemann με το η^μ .

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa \eta^\lambda \eta^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma}$$

Από την τανυστική εξίσωση Ricci έχουμε ότι

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa \eta^\lambda \eta^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} = \mathcal{L}_{\vec{\eta}} K_{\mu\nu} + K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda + \frac{1}{\alpha} D_\mu D_\nu \alpha \quad (0.30)$$

Ξεκινώντας από την παραπάνω σχέση, καταλήγουμε στις ADM-εξισώσεις εξέλιξης

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{ij} &= -D_i D_j \alpha + \alpha [{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k] + 4\pi\alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}] \rightarrow \\ \partial_t K_{ij} &= \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha + \alpha [{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k] + \\ &4\pi\alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}] \end{aligned} \quad (0.31)$$

Εξισώσεις Einstein σε 3+1 Μορφή

- Εξισώσεις περιορισμού(περιέχουν μόνο χωρικές παραγώγους)

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} = 16\pi\rho, \quad \rho = \eta^\mu\eta^\nu T_{\mu\nu} \quad (0.32)$$

$$D_\mu(K^{\alpha\mu} - \gamma^{\alpha\mu}K) = 8\pi j^\alpha, \quad j^\alpha = -\gamma^{\alpha\mu}\eta^\nu T_{\mu\nu} \quad (0.33)$$

- Εξισώσεις εξέλιξης

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i \quad (0.34)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha + \alpha [{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k] + \\ & 4\pi\alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}] \end{aligned} \quad (0.35)$$

Αν τα αρχικά δεδομένα γ_{ij} , K_{ij} ικανοποιούν τις εξισώσεις περιορισμού στην αρχική υπερεπιφάνεια, τότε οι λύσεις που προκύπτουν από τις εξισώσεις εξέλιξης, με αυτά ως αρχικά δεδομένα, συνεχίζουν να ικανοποιούν τις εξισώσεις περιορισμού σε κάθε υπερεπιφάνεια.

Σύμμορφοι Μετασχηματισμοί

Σύμμορφος μετασχηματισμός της χωρικής μετρικής

$$\bar{\gamma}_{ij} = \psi^{-4} \gamma_{ij} \quad (0.36)$$

Ισχύει ότι

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - 4\psi^{-1}(\delta_i^k \partial_j \phi + \delta_j^k \partial_i \phi - \gamma_{ij} \gamma^{k\sigma} \partial_\sigma \psi) \quad (0.37)$$

Από την παραπάνω σχέση καταλήγουμε στην

$$R_{ij} = \bar{R}_{ij} - 2\bar{D}_i \bar{D}_j \phi - 2\bar{\gamma}_{ij} \bar{D}_\mu \bar{D}^\mu \phi + 4(\bar{D}_i \phi)(\bar{D}_j \phi) - 4\bar{\gamma}_{ij}(\bar{D}^\mu \phi)(\bar{D}_\mu \phi) \quad (0.38)$$

και στη συνέχεια στην

$$R = \psi^{-4} \bar{R} + \underbrace{\psi^{-5} \bar{D}_\mu \bar{D}^\mu}_{\bar{D}^2} \psi \quad (0.39)$$

Σύμμορφη Διάσπαση York-Lichnerowicz

- Θεωρούμε αρχικά έναν σύμμορφο μετασχηματισμό της χωρικής μετρικής

$$\bar{\gamma}_{ij} = \psi^{-4} \gamma_{ij} \quad (0.40)$$

- Εισάγουμε τις μεταβλητές

$$A^{ij} = K^{ij} - \frac{1}{3} \gamma^{ij} K \quad (0.41)$$

οι οποίες αποτελούν το άιχνο τμήμα της εξωγενούς καμπυλότητας.

- Ο Χαμιλτονιανός περιορισμός γράφεται ως

$$8\bar{D}\psi - \psi\bar{R} + \psi^5(A_{ij}A^{ij} - \frac{2}{3}K^2) + 16\pi\psi^5\rho = 0 \quad (0.42)$$

- Οι περιορισμοί της ορμής γράφονται ως

$$D_j A^{ij} - \frac{2}{3} D^i K - 8\pi j^i = 0 \quad (0.43)$$

Σύμμορφη Διάσπαση York-Lichnerowicz

Κάθε συμμετρικός, με μηδενικό ίχνος, τανυστής S^{ij} μπορεί να διαχωριστεί ως

$$S^{ij} = S_*^{ij} + (\mathbf{L}W)^{ij} \quad (0.44)$$

- ▶ S_*^{ij} είναι ένας συμμετρικός, άιχνος και εγκάρσιος τανυστής ($D_j S_*^{ij} = 0$).
- ▶ W^i είναι ένα διάνυσμα.
- ▶ $\mathbf{L}$ είναι ένας τελεστής που ορίζεται ως

$$(\mathbf{L}W)^{ij} \equiv D^i W^j + D^j W^i - \frac{2}{3} \gamma^{ij} D_k W^k \quad (0.45)$$

Σύμμορφη Εγκάρσια Διάσπαση

- Θεωρούμε αρχικά ένα σύμμορφο μετασχηματισμό του A^{ij}

$$\bar{A}^{ij} = \psi^{10} A^{ij} \quad (0.46)$$

- Κάνουμε τη διάσπαση

$$\bar{A}^{ij} = \bar{A}_*^{ij} + (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{W}})^{ij} \quad (0.47)$$

- Θεωρούμε τυχαίο συμμετρικό και άιχνο τανυστή M^{ij} . Ο τανυστής

$$\bar{M}_*^{ij} = \bar{M}^{ij} - (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{Y}})^{ij}$$

όπου Y^i είναι ένα κατάλληλο διάνυσμα, είναι εγκάρσιος.

- Αν $\bar{M}_*^{ij} = \bar{A}_*^{ij}$ τότε

$$\bar{A}^{ij} = \bar{M}_*^{ij} + (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{W}})^{ij} = \bar{M}^{ij} + (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{V}})^{ij}, \quad \bar{V}^i \equiv \bar{W}^i - \bar{Y}^i \quad (0.48)$$

Σύμμορφη Εγκάρσια Διάσπαση

Οι εξισώσεις του χαμιλτονιανού περιορισμού και των περιορισμών της ορμής γράφονται ως

$$8\bar{D}^2\psi - \bar{R}\psi + \psi^{-7}\bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} - \frac{2}{3}\psi^5 K^2 + 16\pi\psi^5\rho = 0 \quad (0.49)$$

$$\bar{\Delta}_{\bar{\mathbf{L}}}\bar{V}^i + \bar{D}_j\bar{M}^{ij} - \frac{2}{3}\psi^6\bar{D}^i K - 8\pi\psi^{10}j^i = 0 \quad (0.50)$$

Οι φυσικές ποσότητες δίνονται στη συνέχεια από τις σχέσεις

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \bar{\gamma}_{ij} \quad (0.51)$$

$$K^{ij} = \psi^{-10} \bar{A}^{ij} + \frac{1}{3} \gamma^{ij} K, \quad \bar{A}^{ij} = (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{V}})^{ij} + \bar{M}^{ij} \quad (0.52)$$

Ασυμπτωτικά Επίπεδος Χωροχρόνος

Ένας χωροχρόνος είναι ασυμπτωτικά επίπεδος αν και μόνο αν σε κάθε υπερεπιφάνεια Σ_t υπάρχει μια Riemannian μετρική f_{ij} (μετρική υποβάθρου) τέτοια ώστε

- ▶ Να είναι επίπεδη, εκτός ίσως από μια συμπαγή δομή B της Σ_t (περιοχή ισχυρού πεδίου).
- ▶ Υπάρχει ένα σύστημα συντεταγμένων $(x)^i = (x, y, z)$ στην Σ_t τέτοιο ώστε $f_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$.
- ▶ Όταν $r \rightarrow \infty$

$$\gamma_{ij} = f_{ij} + O(r^{-1}) \quad (0.53)$$

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} = O(r^{-2}) \quad (0.54)$$

$$K_{ij} = O(r^{-2}) \quad (0.55)$$

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial x^k} = O(r^{-3}) \quad (0.56)$$

Σύστημα σωμάτων τα οποία είναι μόνα τους σε ένα κατά τα άλλα άδειο σύμπαν

Στιγμαία Στατικά Αρχικά Δεδομένα

Στιγμαία στατικά αρχικά δεδομένα (γ_{ij}, K_{ij}) ορισμένα σε κάποια υπερεπιφάνεια Σ_0

$$K_{ij} = 0 \quad (0.57)$$

Τι σημαίνει αυτό όμως;

Αν επιλέξουμε $\alpha = 1$, $\beta^i = 0$ (geodesic slicing, σύστημα συντεταγμένων κανονικού παρατηρητή) στη γειτονιά της αρχικής υπερεπιφάνειας Σ_0 προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}_{\vec{m}} g_{ij} = 0 \quad (0.58)$$

Αν σ_0 ένα σημείο της Σ_0 , σ_t το σημείο τομής της ολοκληρωτικής καμπύλης του m^i που διέρχεται από το σ_0 με την υπερεπιφάνεια Σ_t , τότε ισχύει

$$\mathcal{L}_{\vec{m}} g_{ij}|_{\sigma_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^*(g_{ij}|_{\sigma_t}) - g_{ij}|_{\sigma_0}) \quad (0.59)$$

όπου $\phi_t^* g_{ij}$ το pullback της μετρικής μέσω του diffeomorphism που ορίζεται από τις ολοκληρωτικές καμπύλες του m^i . Άρα

$$\phi_t^*(g_{ij}|_{\sigma_t}) = g_{ij}|_{\sigma_0} \Rightarrow \phi_t^*(\gamma_{ij}|_{\sigma_t}) = \gamma_{ij}|_{\sigma_0} \Leftrightarrow (\phi_t)_*(\gamma_{ij}|_{\sigma_0}) = \gamma_{ij}|_{\sigma_t} \quad (0.60)$$

όταν $t \rightarrow 0$ δηλαδή σε γειτονικές υπερεπιφάνειες.

Στιγμιαία Στατικά Αρχικά Δεδομένα

- ▶ m^i Χρονοειδές $\rightarrow$ Στάσιμο σύστημα
Υπάρχει κάποιος παρατηρητής ο οποίος σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα(στιγμιαία) δεν θα αντιληφθεί κάποια αλλαγή στη γεωμετρία.
- ▶ m^i ορθογώνιο σε υπερεπιφάνεια $\rightarrow$ Στατικό σύστημα
- ▶ $K_{ij} = 0$ θα ισχύει μόνο στην Σ_0
- ▶ Θα χαρακτηρίζαν ένα φυσικό σύστημα το οποίο θα ήταν αρχικά «ακίνητο».

Εξισώσεις Περιορισμού σε Ασυμπτωτικά Επίπεδο Χωροχρόνο

Σύμμορφη εγκάρσια διάσπαση(ελεύθερα δεδομένα)

- ▶ $\bar{\gamma}_{ij} = f_{ij}$
- ▶ $\bar{M}^{ij} = 0$
- ▶ $K = 0$ (τοπικά μέγιστη υπερεπιφάνεια)
- ▶ $\bar{\rho} = 0, \bar{j}^i = 0$ (κενός χωροχρόνος)

Οι εξισώσεις περιορισμού ενέργειας, ορμής γίνονται($\bar{D} = D_{flat} = \nabla$)

$$\bar{D}^2\psi + \frac{1}{8}\psi^{-7}(\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{V}})_{ij}(\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{V}})^{ij} = 0 \quad (0.61)$$

$$\bar{\Delta}_{\bar{\mathbf{L}}} \bar{V}^i = 0 \rightarrow \bar{D}^2 \bar{V}^i + \frac{1}{3} \bar{D}^i \bar{D}_j \bar{V}^j + \underbrace{\bar{R}_j^i}_{=0} \bar{V}^j = 0 \quad (0.62)$$

Συνοριακές συνθήκες στο άπειρο

$$\begin{aligned} \psi &= 1 \quad \text{όταν} \quad r \rightarrow \infty \\ \bar{V}^i &= 0 \quad \text{όταν} \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (0.63)$$

Τοπολογία της $\Sigma_0 \rightarrow$ μπορεί να εισάγει και επιπλέον εσωτερικές συνοριακές συνθήκες.

Μαύρη Τρύπα Schwarzschild

Τοπολογία $\Sigma_0 = \mathbb{R}^3 - B$

Συνοριακές συνθήκες πάνω στη σφαίρα

$$\bar{V} = 0 \quad (0.64)$$

$$K = 0 \rightarrow D_i s^i = 0 \quad \text{τοπικά ελάχιστη επιφάνεια της } (\Sigma_0, \gamma_{ij}) \quad (0.65)$$

Σε ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων γράφεται

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{2r} \right) \Big|_{r=a} = 0 \quad (0.66)$$

Μοναδική λύση $\bar{V}^i = 0 \rightarrow$ Χαμιλτονιανός περιορισμός=Εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \psi = 0$$

Μοναδική λύση

$$\psi = 1 + \frac{m}{2r}, \quad r \geq a = \frac{m}{2}, \quad m = M_{ADM} = -\frac{1}{2\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} s^i \left(\tilde{D}_i \psi - \frac{1}{8} \tilde{D}^j \bar{\gamma}_{ij} \right) \sqrt{q} d^2 y = \\ -\frac{1}{2\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} s^i \bar{D}_i \psi \sqrt{q} d^2 y$$

Μαύρη Τρύπα Schwarzschild

Μετρική

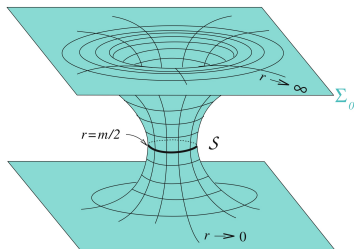
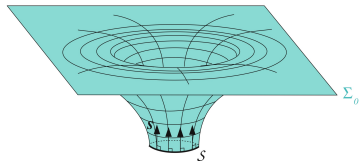
$$\gamma_{ij} = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin \theta) \quad (0.67)$$

Αντιστοιχεί σε μια υπερεπιφάνεια κάποιου χρόνου t ενός χωροχρόνου Schwarzschild σε ισοτροπικές συντεταγμένες

$$(t, r, \theta, \phi) \quad \text{με} \quad R = r \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 \quad (0.68)$$

Επικτείνουμε την πολλαπλότητα $(\Sigma_0, \gamma_{ij}) \rightarrow (\Sigma'_0, \gamma'_{ij})$

- ▶ $\gamma'_{ij}|_{\Sigma_0} = \gamma_{ij}$
- ▶ γ'_{ij} ομαλή στην S



Μαύρη Τρύπα Schwarzschild

Η μετρική θα έχει την ίδια μορφή όπως πριν

$$\gamma'_{ij} = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad r > 0 \quad (0.69)$$

Μετασχηματισμός αντιστροφής $r' = \frac{m^2}{4r}$. Προκύπτει

$$\gamma'_{ij} = \left(1 + \frac{m}{2r'}\right)^4 (dr'^2 + r'^2 d\theta^2 + r'^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (0.70)$$

- ▶ Ισομετρία της γ'_{ij}
- ▶ Περιοχή $r \rightarrow 0 (r' \rightarrow \infty) \rightarrow$ δεύτερη ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή
- ▶ Η περιοχή γύρω από την S είναι μια γέφυρα Einstein-Rosen.

Αρχικά Δεδομένα τύπου Brill-Lindquist

Μία μαύρη τρύπα Schwarzschild

$$\Sigma'_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \quad \text{σημείο } O : \text{ιδιομορφία} \quad (0.71)$$

Τοπολογία της $\Sigma'_0 = : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Θεωρούμε μια υπερεπιφάνεια Σ_0 με N ιδιομορφίες

Η εξίσωση Laplace είναι γραμμική $\rightarrow$ θεωρούμε γραμμικό συνδυασμό λύσεων

$$\psi = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (0.72)$$

Αν τα σημεία $\vec{r}_i$ είναι αρκετά μακριά μεταξύ τους $\rightarrow N$ μαύρες τρύπες (αλλιώς έχουμε συγχώνευση οριζόντων).

Κοντά στην ιδιομορφία $\vec{r}_i$

$$\psi \approx 1 + c + \frac{a_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \approx \frac{a_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad \text{όταν } \vec{r} \rightarrow \vec{r}_i \quad (0.73)$$

Ιδια με τη γεωμετρία Schwarzschild μίας μόνο μαύρης τρύπας κοντά στο κέντρο της.

Αρχικά Δεδομένα τύπου Brill-Lindquist

Μετασχηματισμός αντιστροφής

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}_i + \frac{a_i^2(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \quad (0.74)$$

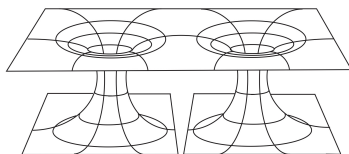
Κοντά στην ιδιομορφία $\vec{r}_i \rightarrow$ ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή

- ▶ Κάθε ιδιομορφία αναπαριστά το άπειρο σε μια διαφορετική ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή.
- ▶ Το σύμπαν συνδέεται με N διαφορετικά σύμπαντα μέσα από γέφυρες Einstein-Rosen.

Όταν οι ιδιομορφίες $\vec{r}_i$ είναι αρκετά μακριά μεταξύ τους, τότε ισχύει

$$\psi \approx 1 + \frac{a_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad \text{όταν } |\vec{r} - \vec{r}_i| \leq 2a_i \quad (0.75)$$

Brill-Lindquist type data



Αρχικά Δεδομένα τύπου Misner

Κατασκευή λύσης $\psi \rightarrow N$ μαύρες τρύπες η οποία όμως αντιστοιχεί σε 2 ισομετρικά(πανομοιότυπα) σύμπαντα

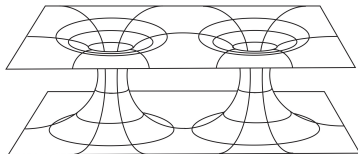
- ▶ Έστω ο χώρος $\mathbb{R}^3$ με N ιδιομορφίες στα σημεία $\vec{r}_i$ και N σφαίρες με κέντρα $\vec{r}_i$ και ακτίνες $a_i (|\vec{r} - \vec{r}_i| = a_i)$ οι οποίες δεν τέμνονται.
- ▶ Τελεστής αντιστροφής

$$\vec{r} \rightarrow J_k \vec{r} = \vec{r}_k + \frac{a_k^2}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2} (\vec{r} - \vec{r}_k) \quad (0.76)$$

- ▶ Τελεστής αντιστροφής(εδώ δράει σε συναρτήσεις)

$$J[f](\vec{r}) = \frac{a}{r} f\left(\frac{a\vec{r}}{r^2}\right) = \frac{a}{r} f(J\vec{r}) \quad (0.77)$$

Misner type data



Αρχικά Δεδομένα τύπου Misner

Αντιστοιχούμε κάθε σημείο $\vec{r}$ στο πάνω μισό με ένα σημείο $\vec{r}' = J_k \vec{r} \quad \forall k$ στο κάτω μισό.

Θέλουμε η μετρική

$$ds^2 = \psi^4(\vec{r}) dx^i dx^i \quad (0.78)$$

να δίνεται και από τη σχέση

$$ds^2 = \psi^4 \left(\frac{a^2 \vec{r}}{r^2} \right) d \left(\frac{a^2 x^i}{r^2} \right) d \left(\frac{a^2 x^i}{r^2} \right) = \left[\frac{a}{r} \psi \left(\frac{a^2 \vec{r}}{r^2} \right) \right]^4 dx^i dx^i \quad (0.79)$$

Ισοδύναμα

$$J[\psi] = \psi \quad (0.80)$$

Το ίδιο πρέπει να ισχύει ως προς κάθε άλλη σφαίρα.

Δράση του J_k στις εξής συναρτήσεις

$$J_k[1] = \frac{a_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \quad (0.81)$$

$$J_k \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right] = \frac{a_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \frac{1}{|\vec{r} - J_k \vec{r}_i|} \quad (0.82)$$

Αρχικά Δεδομένα τύπου Misner

Αν $\psi = \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$, τότε για να ισχύει $J_k[\psi] = \psi$ θα πρέπει να τοποθετήσουμε έναν πόλο στη θέση $\vec{r}_k + \frac{a_k^2(\vec{r}_i - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^2}$ με βάρος $\frac{q_i a_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$, δηλαδή πρέπει προσθέσουμε έναν όρο

$$J_k \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right] \quad (0.83)$$

Άρα λοιπόν πρέπει να θεωρήσουμε την απειροσειρά

$$S = I + \sum J_{i_1} J_{i_2} \dots J_{i_n}, \quad i_{k+1} \neq i_k \quad \text{διότι} \quad J_k^2[1] = I[1] = 1 \quad (0.84)$$

Έστω R μια ανοιχτή περιοχή της υπερεπιφάνειας με πεπερασμένη απόσταση από όλες τις ιδιομορφίες. Η συνάρτηση $\psi = S[1]$

- ▶ Συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα σε μια συνάρτηση $\psi > 1$, στο R , δεδομένου ότι οι σφαίρες απέχουν αρκετά μεταξύ τους.
- ▶ Ικανοποιεί την εξίσωση Laplace($J_k S = S$, ομοιόμορφη σύγκλιση)

Αρχικά Δεδομένα τύπου Misner

- ▶ E_X^3 : 3-διάστατη τοπολογικά ευκλείδεια πολλαπλότητα (σημεία της E_X^3 : x)
- ▶ $x^i : E_X^3 \rightarrow \mathbb{R}$ - σύστημα συντεταγμένων $\vec{x}(x) = (x^1(x), x^2(x), x^3(x))$
- ▶ E_Y^3 : 3-διάστατη τοπολογικά ευκλείδεια πολλαπλότητα (σημεία της E_Y^3 : y)
- ▶ Ορίζουμε τα υποσύνολα

$$\bar{U} = \{x \in E_X^3 : |\vec{x}(x) - \vec{r}_k| \geq a_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, N\} \cong \text{πάνω μέρος της } \Sigma_0$$

$$L = \{y \in E_Y^3 : |\vec{y}(y) - \vec{r}_k| > a_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, N\} \cong \text{κάτω μέρος της } \Sigma_0$$

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= M = \bar{U} \cup L \\ \Sigma_0 &= M = \{z : z = x \in \bar{U} \quad \text{or} \quad z = y \in L\}\end{aligned}\tag{0.85}$$

Πρέπει να δώσουμε στο M τη δομή διαφορίσιμης πολλαπλότητας $\rightarrow$ κάθε σημείο $z \in M$ θα πρέπει να βρίσκεται στο εσωτερικό ενός chart $(u, \chi)(\chi : M \rightarrow \mathbb{R}^3)$

Αν το z δεν βρίσκεται στο σύνορο του $\bar{U}$

- ▶ $\chi(z) \equiv \vec{x}(z) = \vec{x}(x)$ αν $z = x$ (δηλαδή $z \in U$)
- ▶ $\chi(z) \equiv \vec{y}(z) = \vec{y}(y)$ αν $z = y$ (δηλαδή $z \in L$)

Αν το z βρίσκεται στο σύνορο του $\bar{U}$;

Αρχικά Δεδομένα τύπου Misner

Νέο σύστημα συντεταγμένων $\vec{y}(z) = \vec{y}(x)$ για σημεία $x \in \bar{U}$ κοντά ή πάνω στην σφαίρα 1

$$\vec{y}(x) = J_1 \vec{x}(x) \quad (0.86)$$

Ταυτοποιούμε σημεία $x \in \bar{U}$ κοντά στη σφαίρα 1 με σημεία $y \in E_Y^3$ που είναι μέσα στη σφαίρα 1_Y (δηλαδή εκτός του L) ως

$$y \equiv x \quad \text{όταν} \quad \vec{y}(y) = \vec{y}(x) \quad (0.87)$$

$\vec{y} = J_1 \vec{x}$, $\vec{x} = J_1^{-1} \vec{y} = J_1 \vec{y} \rightarrow$ αναλυτικές συναρτήσεις

Ορίζουμε ένα chart : $(P, \vec{y}(z)) = L(\text{εκεί ορίζουμε } \vec{y}(z) = \vec{y}(y)) + \text{γειτονιά της σφαίρας 1 στο } \bar{U}(\text{εκεί ορίζουμε } \vec{y}(z) = \vec{y}(x)).$

Προϋποθέσεις

- ▶ Αλλαγές συντεταγμένων στα $P \cap U$, $P \cap L$ αναλυτικές(ισχύει).
- ▶ Η συνάρτηση $\vec{y}(z)$ θα πρέπει να απεικονίζει ανοιχτά σύνολα του P σε ανοιχτά σύνολα του $\mathbb{R}^3$ σε 1 – 1 αντιστοιχία.
Ικανοποιείται αν ορίσουμε το P ως την ένωση του L με το σύνολο που περιλαμβάνει τα σημεία του $\bar{U}$ για τα οποία ισχύει

$$a_1 - \epsilon < |\vec{y}(x) - \vec{r}_1| \leq a_1 \quad (0.88)$$

$P = L$ αν ελατώσουμε κατά ϵ την ακτίνα της σφαίρας 1 (αν οι σφαίρες δεν τέμνονται)

Αρχικά Δεδομένα τύπου Misner

- ▶ Επεκτείνουμε το $(P, \vec{y}(z))$ με τέτοιο τρόπο ώστε να συμπεριλάβουμε αντίστοιχες ϵ -γειτονιές όλων των υπόλοιπων σφαιρών του $\bar{U}$, οι οποίες θα αντιστοιχούν σε ϵ -περιοχές των αντίστοιχων σφαιρών του E_Y^3 , μέσω των εικόνων $\vec{y}(x) = J_k \vec{x}(x)$
- ▶ Θεωρούμε αρκετά μικρό ϵ ώστε $P \subseteq$ χωρίο του E_Y^3 αντίστοιχο του R

Η δομή του M ορίζεται από 2 chart

- ▶ $(P, \vec{y}(z))$
- ▶ $(\bar{U}, \vec{x}(z))$

Ορίζουμε την εξής μετρική στο M

$$ds^2 = \psi^4(\vec{y})(dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2) \text{ στο } (P, \vec{y}(z)) \quad (0.89)$$

$$ds^2 = \psi^4(\vec{x})(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \text{ στο } (\bar{U}, \vec{x}(z)) \quad (0.90)$$

όπου $\psi = S[1]$

Πρέπει να είναι συνεπής στην τομή $P \cap \bar{U}$.

$$\vec{y} = J_k \vec{x} \quad (0.91)$$

Πρέπει

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \delta_{kl} \psi^4(\vec{x}) &= \psi^4(\vec{y}) \delta_{ij} \Rightarrow \psi(\vec{x}) = \frac{a_k}{|\vec{x} - \vec{r}_k|} \psi(J_k \vec{x}) \\ \Rightarrow J_k[\psi](\vec{x}) &= \psi(\vec{x}) \quad \text{για κάθε } \vec{x} \text{ τέτοιο ώστε } J_k \vec{x} \in P \subseteq R \end{aligned}$$

Ισχύει

Αρχικά Δεδομένα Bowen-York

Σύμμορφη εγκάρσια διάσπαση(ελεύθερα δεδομένα)

- ▶ $\bar{\gamma}_{ij} = f_{ij}$
- ▶ $\bar{M}^{\bar{j}} = 0$
- ▶ $K = 0$ (τοπικά μέγιστη υπερεπιφάνεια)
- ▶ $\bar{\rho} = 0, \bar{j}^i = 0$ (κενός χωροχρόνος)

Τοπολογία $\Sigma_0 = \mathbb{R}^3 - B$

$$\bar{\Delta}_{\bar{L}} \bar{V} = \bar{D}^2 \bar{V}^i + \frac{1}{3} \bar{D}^i \bar{D}_j \bar{V}^j = \nabla^2 \bar{V}^i + \frac{1}{3} \partial^i \partial_j \bar{V}^j = 0 \quad (0.92)$$

$$\bar{V}^i = -\frac{1}{4r} [7P^i + n^i n_j P^j] + \frac{1}{r^2} \epsilon^{ijk} n_j S_k \quad (0.93)$$

όπου

- ▶ P^i, S^i σταθερά διανύσματα
- ▶ $n^i = \frac{x^i}{r} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Άρα

$$\bar{A}_{ij} = (\bar{L}\bar{V})_{ij} = \frac{3}{2r^2} [n_i P_j + n_j P_i + n_k P^k (n_i n_j - \delta_{ij})] - \frac{3}{r^3} (\epsilon_{ilk} n_j + \epsilon_{jlk}) n^l S^k \quad (0.94)$$

Αρχικά Δεδομένα Bowen-York

Προκύπτει ότι

- ▶ $P_i^{ADM} = P_i$
- ▶ $J_i = S_i$
Μαύρη τρύπα με ορμή και στροφορμή
- ▶ Μπορούμε θεωρήσουμε γραμμικό συνδυασμό λύσεων της ίδιας μορφής με διαφορετικά κέντρα $\vec{r} = \vec{r}_i$.

2η Λύση : συμμετρική κάτω από έναν μετασχηματισμό αντιστροφής ως προς μια σφαίρα ακτίνας a

$$\begin{aligned}\bar{A}_{ij} = (\bar{L}\bar{V})_{ij} = & \frac{3}{2r^2} \left[\frac{x_i}{r} P_j + \frac{x_j}{r} P_i + \frac{x_k}{r} P^k \left(\frac{x_i x_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) \right] \\ & \pm \frac{3a^2}{2r^4} \left[\frac{x_i}{r} P_j + \frac{x_j}{r} P_i - \frac{x_k}{r} P^k \left(5 \frac{x_i x_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) \right] \\ & - \frac{3}{r^3} \left(\epsilon_{ilk} \frac{x_j}{r} + \epsilon_{jlk} \frac{x_i}{r} \right) \frac{x_l}{r} S^k \\ & \pm \left[-\frac{3}{r^3} \left(\epsilon_{ilk} \frac{x_j}{r} + \epsilon_{jlk} \frac{x_i}{r} \right) \right] \frac{x_l}{r} S^k\end{aligned}\tag{0.95}$$

- ▶ ADM ορμή στην άλλη πλευρά της σκουληκότρυπας ($r \rightarrow 0$) : P_i ή $-P_i$
ανάλογα με το πρόσημο
- ▶ Πρόσημο — : το S μέρος της λύσης μηδενίζεται

Αρχικά Δεδομένα Bowen-York

Ισομετρία

$$(\phi_* \bar{A}_{ij})(\vec{r}') = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \bar{A}_{kl}(\vec{r}) = \mp \frac{r'^2}{a^2} \bar{A}_{ij}(\vec{r}') \quad (0.96)$$

$$(\phi_* \bar{A}^{ij})(\vec{r}') = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^l} \bar{A}^{kl}(\vec{r}) = \mp \frac{a^2}{r'^2} \bar{A}^{ij}(\vec{r}') \quad (0.97)$$

Χαμιλτονιανός Περιορισμός

$$8\nabla^2\psi + \psi^{-7}\bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} = 0 \quad (0.98)$$

Συνοριακές συνθήκες

- ▶ $\partial_r\psi = \frac{1}{r}(1-\psi)$ για $r \rightarrow \infty$: προσέγγιση ασθενούς πεδίου
- ▶ Χρειαζόμαστε ακόμη μία εσωτερική συνοριακή συνθήκη

Αναμένουμε singularity στο $r = 0 \rightarrow$ εμφανίζονται όλο και μεγαλύτερα σφάλματα

Μέθοδος Αντιστροφής

- ▶ Χρησιμοποιούμε τη συμμετρική λύση $\bar{A}_{ij}$
- ▶ Συνοριακή συνθήκη σε σφαίρα S ακτίνας a (τοπικά ελάχιστη επιφάνεια της (Σ_0, γ_{ij}))

$$\partial_r \psi|_{r=a} = - \left. \frac{\psi}{2r} \right|_{r=a} \quad (0.99)$$

- ▶ Λύνουμε το χαμιλτονιανό περιορισμό εκτός της σφαίρας.
- ▶ Λύση εντός της σφαίρας

$$\psi'(\vec{r}) = \frac{a}{r} \psi(\vec{r}') \quad r < a, \quad \vec{r}' = a^2 \frac{\vec{r}}{r^2} \quad (0.100)$$

Ως προς τον σύμμορφο παράγοντα ψ'

$$\begin{aligned} \bar{A}'_{ij} &= \psi'^2 A_{ij} = \frac{a^2}{r^2} \psi^2 A_{ij} = \frac{a^2}{r^2} \bar{A}_{ij} \\ (\bar{A}')^{ij} &= \psi'^{10} \bar{A}^{ij} = \frac{a^{10}}{r^{10}} \bar{A}^{ij} \end{aligned} \quad (0.101)$$

Ισχύει ότι

$$\nabla^2 \psi'(\vec{r}) = \left(\frac{r'}{a} \right)^5 \nabla'^2 \psi(\vec{r}') = \left(\frac{a}{r} \right)^5 \nabla'^2 \psi(\vec{r}') \quad (0.102)$$

Μέθοδος Αντιστροφής

Από την ισομετρία

$$\bar{A}_{ij}(\vec{r})\bar{A}^{ij}(\vec{r}) = \frac{\partial x^\kappa}{\partial y^i} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^j} \bar{A}_{\kappa\lambda}(\vec{r}) \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^j}{\partial x^\nu} \bar{A}^{\mu\nu}(\vec{r}) = \bar{A}_{ij}(\vec{r}')\bar{A}^{ij}(\vec{r}') \quad (0.103)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει

$$8\nabla^2\psi'(\vec{r}) + \frac{a^5}{r^5} \bar{A}_{ij}(\vec{r})\bar{A}^{ij}(\vec{r}) = \frac{a^5}{r^5} \left[(\nabla')^2\psi(\vec{r}') + \left(\psi(\vec{r}')^{-7} \bar{A}_{ij}(\vec{r}')\bar{A}^{ij}(\vec{r}') \right) \right] = 0 \quad (0.104)$$

- ▶ $\psi \in C^2 \rightarrow$ αρκεί για να είναι καλά ορισμένη η μετρική.
- ▶ Γενίκευση των δεδομένων Misner

$$J[\psi] = \psi \quad (0.105)$$

Πάνω,κάτω μέρος(εντός και εκτός της σφαίρας) $\rightarrow$ πανομοιότυπα

Μέθοδος Ιδιομορφιών

- ▶ Απλή, μη συμμετρική λύση Bowen-York
- ▶ Γράφουμε το ψ στην μορφή

$$\psi = \psi_{BL} + u \quad (0.106)$$

όπου

$$\psi_{BL} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (0.107)$$

Προφανώς

$$\nabla^2 \psi_{BL} = 0 \quad \mathbb{R}^3 - \{\vec{r}_i\} \quad (0.108)$$

Άρα η εξίσωση χαμιλτονιανού περιορισμού γίνεται

$$\nabla^2 u + \underbrace{\frac{1}{8\psi_{BL}^7} \bar{A}_{ij} \bar{A}^{ij}}_{\eta} \left(1 + \frac{u}{\psi_{BL}}\right)^{-7} = 0 \quad (0.109)$$

Μέθοδος Ιδιομορφιών

Προκύπτει

- ▶ $\eta \sim |\vec{r} - \vec{r}_i|$, για στροφορμή $S^i \neq 0$
- ▶ $\eta \sim |\vec{r} - \vec{r}_i|^3$, για στροφορμή $S^i = 0$

Άρα, κοντά στις ιδιομορφίες

$$\nabla^2 u = 0 \quad (0.110)$$

Απλά αγνοούμε τις ιδιομορφίες και λύνουμε την εξίσωση σε όλο το $\mathbb{R}^3$

- ▶ Κοντά σε κάποια ιδιομορφία $\rightarrow$ ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή του χωρορόνου (κυριαρχεί ο όρος ψ_{BL})
- ▶ Γενίκευση των δεδομένων Brill-Lindquist

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!