

Αυθόρμητο Σπάσιμο Συμμετρίας

"Κρυμμένη" Συμμετρία

Ας θεωρήσουμε το απρό ούστημα που περιγράφεται από

$$\mathcal{L} \equiv T - V = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \left(\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right)$$

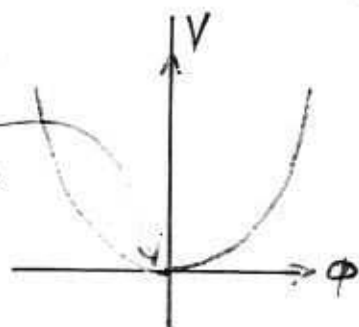
$$\text{με } \lambda > 0$$

Η $\mathcal{L}$ είναι αναλλοίωτη κάτω από

$$\phi \rightarrow -\phi$$

$$\mu^2 > 0$$

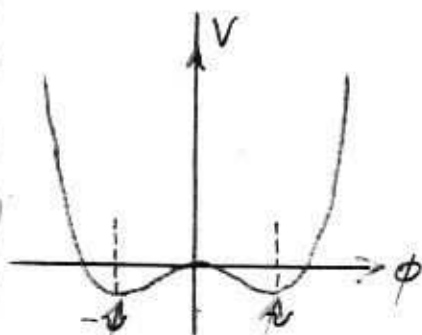
Θεμελιώδης
κατάσταση
(το κενό)
αντιστοιχεί
σε $\phi = 0$



$$\mu^2 < 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi(\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0$$

$$\phi = \pm v$$

$$\text{με } v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$



ελάχιστη ενέργεια (κενό)

Το $\phi=0$, όταν $\mu^2 < 0$, δεν ^②
αντιστοιχεί σε ελάχιστο ενέργειας.

Οι διαταρακτικοί υπολογισμοί πρέπει να περιέχουν αναπτύξεις γύρω από τα γραμμικά ελάχιστα: $\phi=v$ ή $\phi=-v$
Επομένως γράφουμε

$$\phi(x) = v + \eta(x)$$

↑
εθνητικές διακυμάνσεις
γύρω από το ελάχιστο

Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να είχαμε
διαλέξει το $\phi=-v$. Καί η φύση πρέπει να διαλέξει!

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} (c\mu\eta)^2 - \underbrace{\gamma v^2 \eta^2}_{\text{έχει μάζα με το σωστό πρόσημο!}} - \gamma v \eta^3 - \frac{1}{4} \gamma \eta^4$$

αλληλεπιδράσεις
των η με τον
εαυτό του

$$m_\eta = \sqrt{2\gamma v} = \sqrt{2} \frac{m_\phi}{2}$$

Υπάρχει κάποιο θέμα εδώ. ③

Γιατί οι L, L' είναι τερείς ισοδύναμοι

Ο μετασχηματισμός $\phi(x) = v + u(x)$

δεν μπορεί να αλλάξει τη φύση!

Αν μπορούσαμε να γύρουμε ακριβώς
τις L, L' θα έδιναν την ίδια φύση.

Αλλά εμείς κάνουμε τερεία διαταραχών

και υπολογίζουμε διακυμάνσεις γύρω από

την ελάχιστη ενέργεια. Χρησιμοποιώντας

την L θα βρούσαμε ότι u διαταρακ

μη είναι δεν συμβαίνει γιατί προπαδίζ

να αναπτύξουμε γύρω από το σταθερό $\phi=0$

Το σωστό είναι να χρησιμοποιούμε την

L' και να αναπτύξουμε ως προς η γύρω

από το σταθερό μέσο $\phi=v$

4
⇒ το βαθμωτό πεδίο έχει μόδα!

Εντός ο τρόπος γέννησης η απομείν
για τις μάζας ονομάζεται
ανδρόμυτο σπάσιμο συμμετρίας.

Αυθόρμητο Σπάσιμο Συμμετριών (5) Βαθμίδας

π.χ... $\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}$

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ig A_\mu) \phi, \quad f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

1 $\mathcal{L}$ είναι αναλλοίωτο σε

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-i\alpha(x)} \phi(x) \quad \text{τοπικώς}$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x) \quad U(1)$$

Για $\mu^2 > 0$ το $V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \frac{1}{2} (\phi^\dagger \phi)^2$

έχει ελάχιστο στο $|\phi| = v/\sqrt{2}$, $v = (\mu^2/g)^{1/2}$

Αν $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i \phi_2)$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha(x) & \sin \alpha(x) \\ -\sin \alpha(x) & \cos \alpha(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Υπάρχουν άπειρα ευθυγραμμμένα κενά

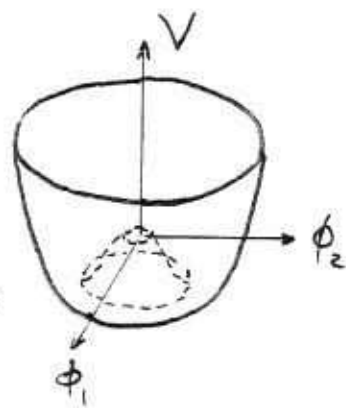
Μπορούμε να διαλέξουμε

$$\langle \phi_1 \rangle = v, \quad \langle \phi_2 \rangle = 0$$

Θεωρούμε μικρές ταλαντώσεις

γύρω από το ελάχιστο ορίζοντας

$$\phi'_1 = \phi_1 - v, \quad \phi'_2 = \phi_2$$



• Για $g \rightarrow 0$

$$\leadsto \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi'_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi'_2)^2 - \mu^2 \phi'^2_1 - g v \phi'_1 (\phi'^2_1 + \phi'^2_2) - \frac{\lambda}{4} (\phi'^2_1 + \phi'^2_2)^2$$

Δεν υπάρχει όρος μάζας για το ϕ'_2

Το ϕ'_2 είναι το άμαζο Goldstone μποσόν

•• Για πεπερασμένο g

$$\begin{aligned} |D_\mu \phi|^2 &= |(\partial_\mu - i g A_\mu) \phi|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi'_1 + g A_\mu \phi'_2)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi'_2 - g A_\mu \phi'_1)^2 \\ &\quad - g v A^\mu (\partial_\mu \phi'_2 - g A_\mu \phi'_1) + \frac{g^2 v^2}{2} A^\mu A_\mu \end{aligned}$$

↑
μάζα του A

(Στη Unitary gauge εξαφανίζεται τελείως)
το Goldstone boson

• Τα παραπάνω γενικεύονται χωρίς πρόβλημα
σε μη αβελιανές θεωρίες

Unitary gauge

±

Παρατηρούμε ότι

$$\phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \phi_1' + i \phi_2')$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \phi_1') e^{i \phi_2' / v}$$

σε κατώτερη τάξη στα πεδία ϕ_1', ϕ_2'

→ κάνουμε έναν κατάλληλο μετασχηματισμό βαθμίδας

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = \exp(-i \xi(x)/v) \phi(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta(x)) \end{aligned}$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{g v} \partial_\mu \xi(x)$$

Αυτή είναι μία ιδιαίτερη επιλογή της βαθμίδας, με το $\xi(x)$ τέτοιο ώστε το $\eta(x)$ να είναι πραγματικό.

Ετσι προβέπουμε ότι η θερμοκρασία θα είναι ανεξάρτητη του ξ

Πράγματι (δουλειά)

$$\mathcal{L}_0'' = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (g\nu)^2 A_\mu A^\mu$$

$$\mathcal{L}_I'' = \frac{1}{2} g^2 A_\mu A^\mu \eta (2\nu + \eta) - \frac{1}{4} g^2 \eta^3 - \frac{1}{4} g^2 \eta$$

Η $\mathcal{L}_0''$ είναι η ελεύθερη Lagrangian για ένα διασπαστικό μποζόνιο με μάζα $M = g\nu$ και για ένα βαθμωτό μεσόνιο με μάζα $m = \sqrt{2}\mu$.

Το μποζόνιο Goldstone εξαφανίστηκε από την $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}_0'' + \mathcal{L}_I''$. Ο φαινομενικός βαθμός ελευθερίας είναι γεύτηκες, γιατί αντιστοιχεί μόνο στην ελευθερία να κάνουμε μετασχηματισμό βαθμίδας

άμα A_μ (2 βαθμοί ελευθ.) + ξ (1 βαθμ. ελευθ.)
↓
 A_μ με μάζα (3 βαθμοί ελευθ.)

Πριν το αυθόρμητο επάβιμο της
συμμετρίας, είχαμε:

2 βαθμωτά πεδία ϕ_1, ϕ_2 (2 βαθ. ελευθ.
και ένα άμαφο μποζονιο βαθμίδας
 A_μ (2 βαθμοί ελευθ.). Σύνολο 4

Μετά το επάβιμο της συμμετρίας
έχουμε:

1 βαθμωτό πεδίο η και ένα πεδίο
βαθμίδας με μάζα A_μ (με 3 κατα-
στάσεις πόρωσης)

Αυτός είναι ο μηχανισμός Higgs
Το πεδίο $\xi(x)$ παίζει ένα would
be Goldstone boson.

Μη αβελιανή περίπτωση

$SU(2)$ - θεωρία βαθμίδας

με μία μιγαδική δυνάδα από

βαθμωτά πεδία: $\phi = \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

$$\text{όπου } D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - i g \frac{\vec{T}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \right) \phi$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$V(\phi) = -\mu^2 (\phi^\dagger \phi) + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i \phi_2 \\ \phi_3 + i \phi_4 \end{pmatrix}$$

για $g \rightarrow 0$, $\mathcal{L}$ αναρριώνται κάτω από

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i \alpha_a T_a / 2} \phi$$

αν απαιτήσουμε $\alpha_a \rightarrow \alpha_a(x)$

παίρνουμε την πηγή $\mathcal{L}$.

11
Για $\mu^2 > 0$, $\lambda > 0$ το $V(\phi)$ έχει
ελάχιστο στο $\phi^\dagger \phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = \frac{\mu^2}{2\lambda}$

$$\rightarrow SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$$

Πρέπει να αναπτύξουμε το $\phi(x)$ γύρω
από ένα ιδιαίτερο ελάχιστο. Μπορούμε

$$\text{να διαλέξουμε } \phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0, \phi_3^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2$$

$\rightarrow$ αυδόρμητο σπάσιμο της $SU(2)$ συμμ.

$$\phi = \phi' + \phi_0, \quad \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \phi = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix}$$

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) \stackrel{\text{αδυναμία}}{=} \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{gv}{2} \right)^2 (A_\mu^1 A^{1\mu} + A_\mu^2 A^{2\mu} + A_\mu^3 A^{3\mu})$$

$\rightarrow M_A = gv/2$, 3 διαποματιικά
μποσόνια με μάζα

Στο βαθμωτό τμήμα της θεωρίας

$$\phi^\dagger \phi = \phi'^\dagger \phi' + \phi_0^\dagger \phi' + \phi'^\dagger \phi_0 + \phi_0^\dagger \phi_0$$

$$|\phi^\dagger \phi|^2 = v^2 \phi'^\dagger \phi' + (\phi_0^\dagger \phi' + \phi'^\dagger \phi_0)^2 + \dots$$

Ην $\phi' \equiv \begin{pmatrix} \phi'_\alpha \\ \phi'_\beta \end{pmatrix}$, ο τετραγωνικός όρος

στο $\phi' \leadsto \frac{\lambda v^2}{2} (\phi'_\beta + \phi'^{\dagger}_\beta)^2$ δίνει

συρ. μόνο ο συνδυασμός $(\phi'_\beta + \phi'^{\dagger}_\beta)/\sqrt{2}$ έχει μάζα. Είναι το φυσικό σωματίδιο Higgs.

Οι μεταβάσεις $\phi'_\alpha, \phi'^{\dagger}_\alpha, (\phi'_\beta - \phi'^{\dagger}_\beta)/\sqrt{2}$ είναι τα would-be-Goldstone μποσόνια.

Unitary gauge

Γράφοντας το $\phi(x) = e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}(x)/v} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + \eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

και κάνοντας μικρές διαταραχές

$$\Rightarrow \phi(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + i\theta_3/v & i(\theta_1 - i\theta_2)/v \\ i(\theta_1 + i\theta_2)/v & 1 - i\theta_3/v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix}$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_2 + i\theta_1 \\ v + \eta - i\theta_3 \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι τα 4 πεδία είναι πραγματικά

τι ανεξάρτητα και παραμετροποιούν πλήρως

απουσίες από το κενό ϕ_0

Μπορούμε λοιπόν να κάνουμε ένα
μετασχηματισμό βαθμίδας

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U(x) \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\vec{T}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \rightarrow U(x) \frac{\vec{T}}{2} \cdot \vec{A}_\mu U^{-1}(x)$$

$$- \frac{i}{g} [\partial_\mu U(x)] U^{-1}(x)$$

όπου $U(x) = \exp \left\{ -i \frac{\vec{T}}{2} \cdot \vec{\Theta}(x) \right\}$

Από τις ιδιότητες των μετασχηματι-
σμών βαθμίδας έχουμε

$$D_\mu \phi = U^{-1}(x) D'_\mu \phi'$$

$F_{\mu\nu}^a$ $F_{\mu\nu}^a$ - αναφοίωτος

$$\rightarrow \mathcal{L} = (D'_\mu \phi')^\dagger (D'_\mu \phi') + \frac{\mu^2}{2} (v + \eta)^2$$

$$- \frac{\lambda}{4} (v + \eta)^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$$

$$(D'_\mu \phi')^\dagger (D'_\mu \phi') = \dots + \frac{g^2}{8} (0, v) (\vec{T} \cdot \vec{A}'_\mu \vec{T} \cdot \vec{A}'^\mu) \Big|_{\phi} \Big|_v$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{gv}{2} \right)^2 A'_\mu A'^\mu \rightarrow M_{A'} = gv/2$$