

Μη σχετικιστική Κβαντομηχανική

Υπερδιμάζουμε την συνταγή που δίνει την εξίσωση Schrödinger σε αντιστοιχία με τη μη-σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής

$$E = \vec{p}^2 / 2m \quad (1)$$

μέσω της αντιστοιχίας των E , $\vec{p}$ με διαφορικούς τελεστές

$$E \rightarrow i\hbar \partial / \partial t, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \quad (2)$$

Η εξίσωση τελεστών που προκύπτει εκφράζεται ότι δρά πάνω στη (μικροδυναμική) κυματοσυνάρτηση $\psi(\vec{x}, t)$. Δηλ (με $\hbar \equiv 1$)

$$i \partial \psi / \partial t + 1/2m \vec{\nabla}^2 \psi = 0, \quad (3)$$

όπου ερμηνεύουμε την ποσότητα

$$\rho = |\psi|^2$$

ως την πυκνότητα πιθανότητας

($|\psi|^2 d^3x$ - πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο σε στοιχείο όγκου d^3x)

Συνά μερετάμε κινούμενα σωματίδια, π.χ. στη σύγχρονη σωματιδίων. Έτσι χρειάζεται να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την πυκνότητα ροής $\equiv$ "ρεύμα πιθανότητας" $\vec{J}$ μιας δέσμης σωματιδίων.

Απο τη διατήρηση της πιθανότητας, ο ρυθμός ελάττωσης του αριθμού των σωματιδίων σε δεδομένο όγκο ισούται με την αλλαγή στο σωματίδια που βγαίνουν.

(3)

από αυτό τον όγκο, δηλ.

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

$\vec{n}$ μοναδιαίο διάνυσμα
 κάθετο στο στοιχείο dS
 της επιφάνειας

Θεώρημα
Gauss

Έτσι οι πυκνότητες πιθανότητας και ροής
 συνδέονται με την εξίσωση συνέχειας

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad (4)$$

όπου το ρεύμα πιθανότητας είναι

$$\vec{j} = -\frac{i}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \quad (5)$$

(άσκηση)

Για παράδειγμα μια γύση της (3)

$$\psi = N e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - iEt} \quad (6)$$

που περιγράφει ένα ελεύθερο σωματίδιο με
 ενέργεια E και ορμή $\vec{p}$, έχει

$$\rho = |N|^2, \quad \vec{j} = \vec{p}/m |N|^2 \quad (7)$$

Συναρροίωτο Lorentz, 4-διαυήματα

Ενας αμροχωνιαίος γίδος της ούρχορης
Φυβινίς είναι οτι οι Θεμελιώδεις Νόμοι
έχουν την ίδια μορφή σε όλα τα συστή-
ματα Lorentz, δηλ. σε συστήματα αναφο-
ρας που έχουν μία ομοιόμορφη σχετική
ταχύτητα. Οι βασικές εξισώσεις γράφεται
ότι είναι Lorentz συναρροίωτες.

Ουμίζουμε οτι η Ειδική Σχετικώτητα
βασίζεται στην υπόθεση οτι η ταχύτητα
τον φωτός, c , είναι ίδια σε όλα τα συστή-
ματα Lorentz.

Ενας μετασχηματισμός Lorentz

(5)

σχετίζει τις ευτεταχμένες δύο τέτοιων
 συστημάτων αναφοράς. Το βασικό εργαλείο
 το δε μετασχηματισμός Lorentz
 είναι η σχέση $c^2 t^2 - \vec{x}^2$.

(Ας ορίσουμε $x^0 = ct$, $c \equiv 1$)

$$X \equiv X^\mu \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

Γενικός μετασχηματισμός Lorentz $\Lambda = (\Lambda^\mu_\nu)$

$$X^\mu \rightarrow X^{\mu'} = \Lambda^\mu_\nu X^\nu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_\nu X^\nu$$

• π.χ. 1 οι συνιστώσες στρωφές στον χώρο

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array} \right), \quad \begin{array}{l} R - \text{γενικός ορθογώνιος} \\ 3 \times 3 \text{ πίνακας} \\ R^T R = 1 \end{array}$$

π.χ. 1' στροφή στο επίπεδο $X^1 - X^2$

$$\begin{pmatrix} X^0' \\ X^1' \\ X^2' \\ X^3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}$$

• π.χ. 2 μετασχηματισμός σε νέο σύστημα που κινείται με ταχύτητα v (boost = ω boost)

π.χ. 2' στα μετασχηματισμό Lorentz, όπου

το νέο σύστημα κινείται με ταχύτητα v

κατά μήκος του άξονα X^1

$$\begin{pmatrix} X^0' \\ X^1' \\ X^2' \\ X^3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}$$

όπου $\beta = v/c$, $\cosh\omega = (1 - \beta^2)^{-1/2} \rightarrow \tanh\omega = \beta$

επειδή $\cos(i\omega) = \cosh(\omega)$, $\sin(i\omega) = i \sinh(\omega)$

= είναι ανάστροφη στροφή κατά μιγαδικό γωνία $i\omega$ (όχι ω)

Κάθε διάνυσμα τεσσάρων ποσοτήτων που μετασχηματίζεται όπως τα x^μ κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz λέγεται 4-διάνυσμα.

Εσωτερικά γινόμενα και ο μετρικός тензор

Για δύο 4-διανύσματα $A^\mu \equiv (A^0, \vec{A})$

$B^\mu \equiv (B^0, \vec{B})$ ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο

$$A \cdot B \equiv A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$$

το οποίο παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz.

Πόσω του αρνητικού προσήμου, είναι χρήσιμο να εισάγουμε ένα νέο είδος 4-διανύσματος

$$A_\mu \equiv (A^0, -\vec{A})$$

που συνδέεται με το A^μ μέσω του

μετρικοί τανυστές

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, (g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})^{-1}$$

ως εξής $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$

Οπότε το εσωτερικό γινόμενο γράφεται

$$\begin{aligned} A \cdot B &= A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\nu B^\mu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu \\ &= A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \end{aligned}$$

Εννοείται άθροιση πάνω σε επαλληλουμενούς δείκτες.

- π.χ. 1 Σύμφωνα με την Ειδική Σχετικότητα, η ορμή ενέργεια E και η ορμή $\vec{p}$ ενός απομονωμένου συστήματος μετασχηματίζονται ως συνιστώσες ενός 4-διανύσματος.

$$P^\mu \equiv \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \equiv (P^0, P^1, P^2, P^3)$$

• π.χ. 2 Το εσωτερικό γινόμενο

$$P^\mu P_\mu \equiv P \cdot P \equiv P^2 = E^2 - p^2$$

είναι αναλλοίωτο

Το απλούστερο σύστημα είναι ένα ελεύθερο σωματίδιο για το οποίο ισχύει

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

$\uparrow$
 μάζα ηρεμίας

• π.χ. 3 $P^\mu X_\mu \equiv P \cdot X = E t - \vec{p} \cdot \vec{x}$ αναλλοίωτο

• π.χ. 4 $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial X_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right), \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

(Δ'Alembert)

D'Alembertian αναλλοίωτος τελεστής

{ Διανύσματα με μάζα (άνω) τέλει

σωματίδια αναλλοίωτα αλληλεπιδρά

Λέμμα

Ο διαφορικώς τελεστής 4 συνιστωσών
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3} \right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$$

μετασχηματίζεται κατά από μετασχηματισμός Lorentz όπως το 4-διάνυσμα

(t, x^1, x^2, x^3) . Συνεπώς μπορούμε να το συμβολίσουμε ως $\partial^\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$

Χρησιμοποιώντας τον $g_{\mu\nu}$, που αντιστρέφει τα πρόσημα των χωρικών συνιστωσών, το

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

Αντίστοιχα τα $\left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$ μετασχηματίζονται όπως το $(t, -x^1, -x^2, -x^3)$

και συνεπώς το συμβολίζουμε ως ∂_μ .

Εξίσωση Klein - Gordon

Η εξ. Schr (3) παραβιάζει το
εναρμόνιστο Lorentz και έτσι δεν είναι
κατάλληλη για σχετικιστικό σωματίδιο.

Θα επαναλάβουμε τα ίδια βήματα όπως στη
μη σχετικιστική κβαντομηχανική αλλά
αρχίζοντας από τη σχετικιστική σχέση
ε너ργειας - ορμής

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (1)$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις τελεστών

$$\leadsto -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \phi = m^2 \phi \quad (2)$$

$$\gamma \quad (\square + m^2) \phi = 0 \quad (3) \quad \text{K-G}$$

Πηλώντας τον K-G επί $-i\phi^*$ και τη συζυγή
της επί $-i\phi$ και αφαιρώντας

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left[i \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \right]}_{\rho} + \underbrace{\vec{\nabla} \left[-i \left(\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^* \right) \right]}_{\vec{j}} = 0 \quad (4)$$

ή $j^\mu = (\rho, \vec{j}) = i (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$ ^(άσκηση) (5)

οπότε $\xrightarrow{(4)} \partial_\mu j^\mu = 0$ (6)

Για παράδειγμα για ελεύθερο σωματίδιο με ενέργεια E και ορμή $\vec{p}$ που περιγράφεται από τη γύση $K-G$

$$\phi = N e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - iEt} \quad (7)$$

$$\xrightarrow{(4)} \rho = i (-2iE) |N|^2 = 2E |N|^2 \quad (8)$$

$$\vec{j} = -i (2i\vec{p}) |N|^2 = 2\vec{p} |N|^2 \quad (9)$$

$$\text{ή } \xrightarrow{(7)} \phi = N e^{-ip \cdot x} \quad (10)$$

$$\text{και } \xrightarrow{(8), (9)} j^\mu = 2 p^\mu |N|^2 \quad (11)$$

(12)

Αλλά αντιπαριστάμε την (10) στην (3)

$$\Rightarrow E = \pm (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2} \quad (12)$$

που είναι εξαιρετικά δυσάρεστο γιατί δείχνει
ότι είναι δυνατόν να γίνουν μεταπτώσεις
σε όλο και χαμηρότερες (αρνητικές) ενέργειες.

Ένα δεύτερο πρόβλημα είναι ότι οι λύσεις
με $E < 0$ είναι συχνησιμένες (μέσω της (8))
με αρνητική πυκνότητα πιθανότητας.

Αρα οι δυσκολίες είναι

Λύσεις με $E < 0$ και $p < 0$!!!

- Η εξ. $K-G$ είναι αναλλοίωτη κάτω
από μετασχηματισμούς Lorentz.
(άκουσε)

Εξίσωση Dirac

Στη περίπτωση της ε.κ.κ. είναι
 βαφές από πού προήλθε το πρόβλημα.

(α) Κατασκευάζοντας μια κυματική εξίσωση
 που αντιστοιχεί στη σχέση $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$
 αμέσως επιτρέπουμε λύσεις με αρνητική ενέργεια.

(β) Η ε.κ.κ. έχει έναν όρο $\partial^2/\partial t^2$ με
 συνέπεια να οδηγούμαστε σε εξίσωση ενέργειας
 με πυκνότητα πιθανότητας που περιέχει $\partial/\partial t$
 και επομένως σε αρνητικές πιθανότητες
 για $E < 0$.

Ο Dirac προκειμένου να πάρει $p \geq 0$
 απαιτούσε μία εξίσωση γραμμική στο $\partial/\partial t$,
 και για να είναι εναρμονισμένη, γραμμική και στο $\vec{\nabla}$.

Συνεπώς απαιτείται την εξής γενική μορφή

$$\left[i \hbar \frac{\partial}{\partial x} - \alpha \right] \psi(x) = 0, \quad (13)$$

όπου η φύση των συντελεστών $\hbar$ και α σταθεράς α πρέπει να προσδιοριστούν.

Βέβαια, σύμφωνα με την Ειδική Σχετικότητα ισχύει η $E^2 - \vec{p}^2 = m^2$ για ελεύθερο σχετικιστικό σωματίδιο (ηλεκτρόνιο). Οπότε ο

Diras απαιτείται συγχρόνως η ψ να ικανοποιεί την ε.κ.κ. Προφανώς ανοίξαμε πάλι την πόρτα στις λύσεις με $E < 0$.

Η επιτυχία του Dirac ήταν να μετατρέψει αυτό το προφανές πρόβλημα σε έναν από τους μεγαλύτερους δριάμβλους της Θεωρητικής Φυσικής!

Την απτή σχέση μεταξύ δύο μιγαδικών (15)
αριθμών u και v

$$u^2 + v^2 = (-iu - v)(iu - v) \quad (14)$$

τη χρησιμοποιούμε για να γραμμικοποιήσουμε
την εβ. Κ-Γ. Βοηθάουμε

$$\left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right) \left(i\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - m\right) \psi(x) = 0 \quad (15)$$

Κάνουμε τους πολλαπλασιάζοντας τη
μεταθετικότητα των $\partial/\partial x^\mu, \partial/\partial x^\nu$ αλλά
βεβόματε τη σειρά των εντερρετών γ^μ, γ^ν
(ώστε να μην απομείνουμε την πιθανότητα
να είναι πίνακες) (αβυσσος)

$$\rightarrow \left[\frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + m^2 \right] \psi(x) = 0 \quad (16)$$

Η (16) είναι ίδια με την Κ-Γ αν επιμεύουμε
να ισχύει

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad (16)$$

Πως μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι οι (17) ισχύουν;

Δοκιμάσαμε (1) μιγαδικούς αριθμούς
(2) 2×2 πίνακες και καταλήξαμε ότι δεν μπορούν να ικανοποιήσουν τις (17).

Αλλά η επόμενη δυνατότητα, όπως έδειξε ο Dirac, δηλ να είναι 4×4 πίνακες δουλεύει!

Μια δόκιμη επιλογή των πινάκων Dirac είναι η εξής

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (18)$$

όπου κάθε όρος είναι 2×2 πίνακες.
(άσκηση)

Σημειώνουμε ότι ο γ^0 είναι Ερμιτιανός
πίνακας ($\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ και $\gamma^{0^2} = I$) ενώ
οι $\gamma^{i\dagger}$ αντι-Ερμιτιανοί ($\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$ και $(\gamma^i)^2 = -I$)

Η επιλογή των πινάκων Dirac δεν είναι
μοναδική. Παίρνουμε 16 οδυάμες αναπαράστασ.
των πινάκων Dirac αν μετασχηματίσουμε
τα γ^μ με ένα αυθαίρετο (μη απομείνοντα)
πίνακα S

$$\gamma'^\mu = S^{-1} \gamma^\mu S \quad (19)$$

Τελικά η εξίσωση που έδεσε ως αξίωμα
ο Dirac (1928) ήταν

$$\left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \psi(x) = 0 \quad (20)$$

όπου $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}$

δηλ. ένα πεδίο με
4 συνιστάδες γνωστό ως
6 πίνοντας Dirac
(21)

Μία 160δύναμη μορφή, επίσης γνωστή, προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την (20) επί γ^0

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = \left(\vec{\alpha} \frac{1}{i} \vec{\nabla} + \beta m \right) \psi(x) \quad (22)$$

Στην αναπαράσταση (18) που διαλέξαμε τα $\vec{\alpha}$ και β είναι Ερμιτιανοί πίνακες

$$\vec{\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \vec{\sigma} \\ \hline \vec{\sigma} & 0 \end{array} \right), \quad \beta = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right) \quad (23)$$

$$\left(\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}, \quad \beta = \gamma^0 \right)$$

Διατηρούμενα ρεύματα

Για να κατασκευάσουμε τα ρεύματα προχωράμε όπως στην εξ. K-G, εφόσον τον ότι επειδή τώρα έχουμε εξίσωση πινάκων, πρέπει να θεωρήσουμε την Ερμιτιανή, αντί της μη ερμιτιανής, συζυγή εξίσωση.

Η Ερμιτιανή συζυγής της εξ. Dirac,

$$i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\gamma^j \frac{\partial \psi}{\partial x^j} - m\psi = 0, \quad j=1,2,3$$

είναι η

$$-i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 - i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^j} (-\gamma^j) - m\psi^\dagger = 0 \quad (24)$$

Για να έχουμε συναρροϊστή μορφή πρέπει να φύγει το $-$ στο $(-\gamma^j)$ και να μείνει στον πρώτο όρο. Επειδή

$$\gamma^0 \gamma^j = -\gamma^j \gamma^0$$

(20)

αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας την (24) από δεξιά
επί γ^0 . Εισάγοντας τον adjoint (γραμμή)
επίνορα

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0 \quad (25)$$

παιρνουμε την (24) στη μορφή

$$i \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + m \bar{\Psi} = 0 \quad (26)$$

Τώρα μπορούμε να πάρουμε την εξίσωση συνέ-
χειας πολλαπλασιάζοντας την εξ. Dirac (20) από
αριστερά επί $\bar{\Psi}$ και την (26) από δεξιά
επί Ψ και τις προσθέτουμε.

$$\leadsto \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi = 0$$

$$\leadsto \partial_\mu (\underbrace{\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi}_{\text{III}}) = 0 \quad (27)$$

$$\text{III} \\ \mathcal{J}^\mu = (\rho, \vec{j})$$

(άδεια)

1 δαιτέρα η πυκνότητα πιθανότητας (2)

$$\rho \equiv j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{i=1}^4 |\psi_i|^2 \text{ θετικώς ορισμένο!}$$

Μη αναμενόμενο δώρο ότι η εξ.

Dirac περιγράφει σωματίδια με spin $\frac{1}{2}$!!!

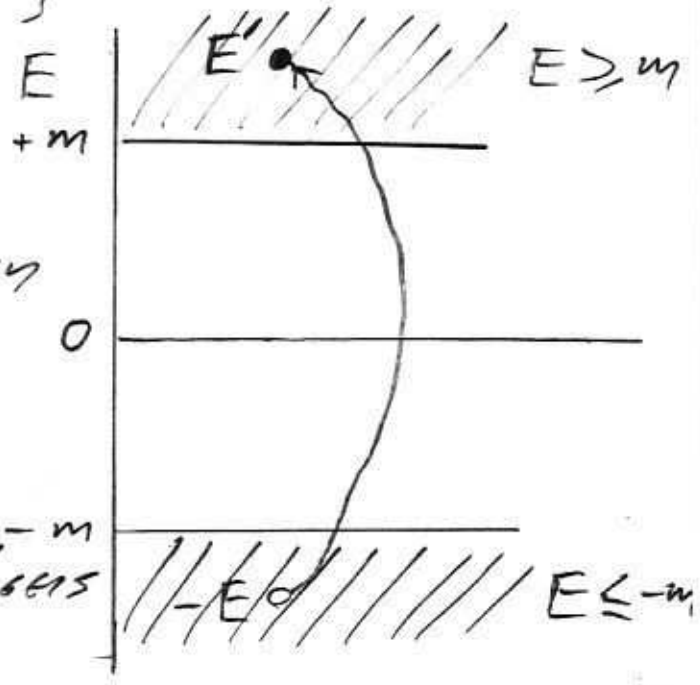
~~~~~  
Η ιστορία μας μέχρι τώρα συνοψίζεται  
ως εξής

Εξ. Klein-Gordon { αρνητικές πιθανότητες  
αρνητικές ενέργειες

Εξ. Dirac { θετικές πιθανότητες  
αρνητικές ενέργειες

Ο Dirac ξεπέρασε το πρόβλημα των αρνητικών ενεργειών ως εξής.

Έδεξε το αξίωμα ότι



στο κενό, δηλ στην κατάσταση

όπου δεν υπάρχουν  $E > 0$

ηλεκτρόνια, όγες οι καταστάσεις

με  $E < 0$  είναι γεμάτες με ηλεκτρόνια!

δηλ. υπάρχει μία άπειρη θάλασσα ηλεκτρονίων.

Έτσι η αρχή Pauli απαγορεύει σε ένα ηλεκτρόνιο με  $E > 0$  να πέσει σε κατώτερο ενεργειακό επίπεδο.

Όπως θα μπορούσαμε να δημιουργήσουμε οπή στη θάλασσα των ηλεκτρονίων με  $E < 0$  διεγείροντας ένα ηλεκτρόνιο από μια

κατάσταση αρνητικής ενέργειας  $-E$  σε μία  
κατάσταση με θετική ενέργεια  $E'$ . Τότε  
η απουσία ενός ηλετρονίου με φορτίο  $-e$   
και ενέργεια  $-E$  ερμηνεύεται ως παρουσία  
ενός αντισωματιδίου! (ποζιτρονίου) φορτίου  
 $+e$  και ενέργειας  $E$ . Συνεπώς το τελικό  
αποτέλεσμα αυτής της διέγερσης είναι η παραγωγή  
ενός ζευγαριού σωματιδίων

$$e^-(E') + e^+(E) \leftarrow \begin{matrix} \text{οδηγεί στην απαίτηση} \\ \text{μιας θετικής ενέργειας} \end{matrix}$$

$$\text{ενέργεια σπής} = -(-E) = E > 0$$

$$\text{φορτίο σπής} = -(-e) = e > 0$$

το οποίο προφανώς απαιτεί ενέργεια

$$E + E' \geq 2m$$

Η πρόβλεψη των αντισωματιδίων αποτελεί μία  
από τις μεγαλύτερες προβλέψεις... "Anderson Nobel '32"

Τι γίνεται όμως με τις αρνητικές γέσεις της ελ.  $K-G$ ; Είναι σαφές ότι η ίδια ιδέα δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε δοματίδια με μηδενικό spin, που δεν υπακούουν την απαγορευτική αρχή του Pauli. Συνεπώς ειδικά προκύπτει από την ελκτική θεωρία πεδίου. Εδώ περιοριζόμαστε ακόμα στη ελκτική θεωρία.

Οι Pauli - Weisskopf ('34) αναβίωσαν την ελ.  $K-G$  εισάγοντας το φορτίο  $-e$  στο  $j^\mu$  και ερμηνεύοντας το ως πυκνότητα φορτίου-ρεύματος του αρνητικά φορτισμένου δοματιδίου

$$j^\mu = -ie (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$$

Τώρα το  $\rho = j^0$  παριστάνει πυκνότητα φορτίου

έχει πικρότητα πιθανότητας τι ετεροαίρονται  
οι ενστάσεις. Με μια έννοια, που θα γίνει  
βαφέστερη, οι ζύξεις με  $E < 0$  μπορούν να  
θεωρηθούν ως σωματίδια με αντίθετο φορτίο  
δηλ. αντισωματίδια. Αντίθετα με τη θεωρία  
των οποίων αυτή η ερμηνεία μπορεί να εφαρ-  
μοστεί και στα μποζόνια και στα φερμιόνια.

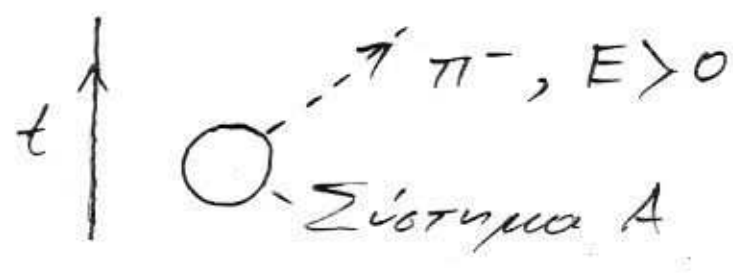
Η συνταγή για το πως να χειρίζεσθε  
τις αρνητικές ενεργειακές καταστάσεις προτά-  
θηκε από τους Stückelberg ('41) και Feynman ('48)

Η ιδέα είναι ότι μία ζύξη με αρνητική  
ενέργεια περιγράφει ένα σωματίδιο, που  
διαδίδεται προς τα πίσω στο χρόνο, ή  
ισοδύναμα, ένα αντισωματίδιο που διαδίδεται



$\pi^+$  αλλά με αρνητική 4-ορμή.

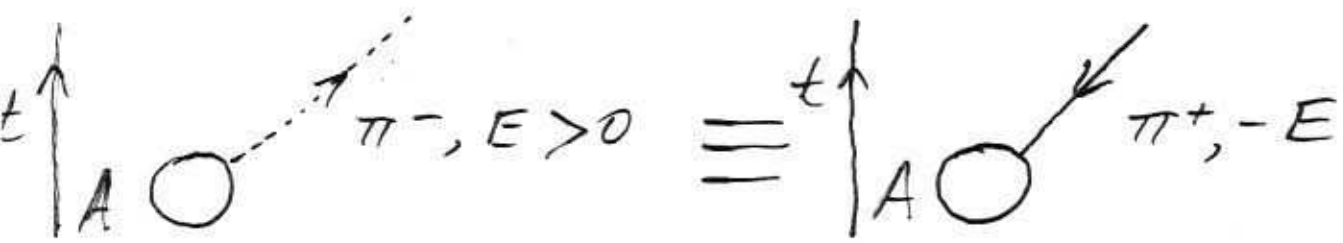
Ας δούμε τι συμβαίνει με το ογκώδες φορτίο και την ενέργεια ενός συστήματος  $A$  που επιπέμπει ένα  $\pi^-$  δετιμής ενέργειας.

Η ενέργεια του  $A$    $\pi^-, E > 0$   
ελαττώνεται κατά  $E$

και το φορτίο του ελαττώνεται κατά  $(-e)$ ,  
που ισοδυναμεί με αύξηση κατά  $e$ .

Αυτή η αύξηση φορτίου θα μπορούσε ισοδύναμα να δημιουργηθεί από απορρόφηση ενός  $\pi^+$ ,  
αλλά για να γίνει αυτή η διαδικασία απορρόφησης πηχώς ισοδύναμη με την διαδικασία επιπομπής το  $\pi^+$  θα πρέπει να έχει αρνητική ενέργεια (γιατί το  $A$  έχασε ενέργεια με την επιπομπή).

ΕΤΟΙ ΦΘΑΝΟΥΜΕ ΣΤΗΝ ΕΞΗΣ 160 ΔΥΝΑΜΙΑ



δηλ. η εμπομπή (απορρόφηση) αντισωματιδίου με 4-ορμή  $p^\mu$  είναι φυσικά 160 δυνάμει με την απορρόφηση (εμπομπή) βωματιδίου με 4-ορμή  $-p^\mu$  (γενίκευση του παραδείγματος του 1)

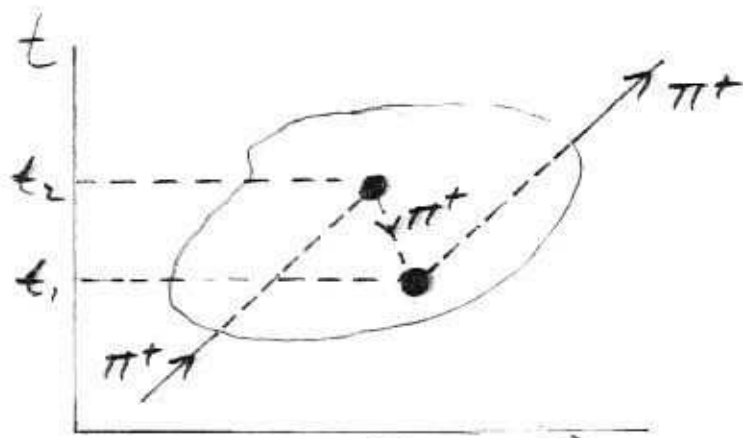
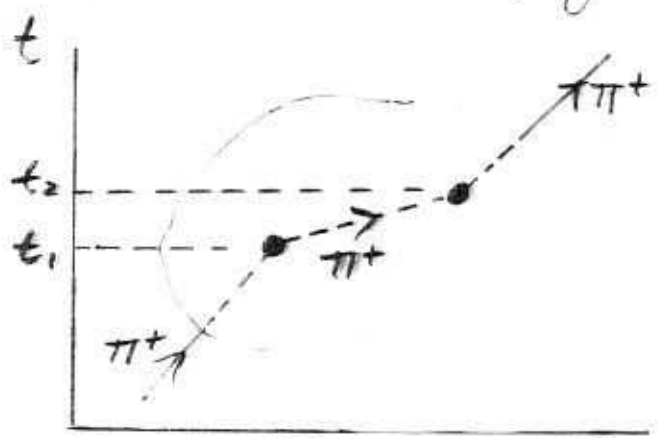
Με άλλα λόγια γύβεις αρνητικής ενέργειας που πηγαίνουν προς τα πίσω στο χρόνο περιχραύουν γύβεις αντισωματιδίων θετικής ενέργειας που πηγαίνουν προς τα μπρός στο χρόνο.

Ο λόγος που μπορεί να γίνει η παραπάνω ταυτοποίηση είναι απλά γιατί

$$e^{-i(-E)(-t)} = e^{-iEt}!$$

Υπάρχει μία διαφορά μεταξύ περιπτώσεων  
 V-G και Dirac. Η περίπτωση Dirac  
 είχε φτιαχτεί έτσι ώστε να εξασφαλίσει  
 θετική πυκνότητα πιθανότητας ανεξάρτητα  
 από το πρόσημο της ενέργειας. Για να  
 κρατήσουμε την ισοδυναμία θα πρέπει  
 να βάλουμε ένα επι πλέον αρνητικό σημείο  
με το χέρι κάθε φορά που έχουμε  
 ένα φερμιόνιο αρνητικής ενέργειας στην  
 τελική κατάσταση (τε οποίο γίνεται  
 αυτόματα στην αντιμετώπιση του  
 θέματος με θεωρία πεδίου).

Ο φορμαλισμός περιγραφής σωματιδίων  
 ενάρτησης ενός σωματιδίου χερίζεται όχι  
 μόνο τα αντισωματίδια αλλά είναι σε  
 θέση να περιγράψει και καταστάσεις πολλών  
 σωματιδίων. Για παράδειγμα ας δούμε τη  
 διπλή σκέδαση ενός σωματιδίου (ας πούμε  
 του  $\pi^+$ ) από ένα δυναμικό σε 2<sup>η</sup> τάξη στη  
Θεωρία Διαταραχών. Στη Νη-Σχετικιστική  
 Κλασική μηχανική (ΜΣΚ) μπορούμε να ζωγρα-  
 φίσουμε ένα χωρο-χρονικό διάγραμμα  
 Τεκμήριω της τροχιάς του σωματιδίου.



Σύμφωνα με τον θεώρημα στην Σ.Κ.  
πρέπει να επιτρέψουμε την πιθανότητα τα σωμα-  
τίδια να μπορούν να διεδαστούν και προς  
τα πίσω στο χρόνο. Έτσι το σημαντικό νέο  
στοιχείο είναι ότι υπάρχουν δύο διαγράμματα  
που αντιστοιχούν στην ίδια παρατήρηση.

Υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι διάταξης  
του χρόνου των δύο αλληλεπιδράσεων που αντι-  
στοιχούν στο ίδιο παρατηρήσιμο γεγονός.

Εκινεύνουμε το δεύτερο διάγραμμα, γονι-  
μοποιώντας την ονταχί του θεώρημα, επιτοέ-  
ποντας μύδεις δετινή: ενέργειας των  $\pi^+$  να τα-  
ξιδεύουν μόνο προς τα μπρός στο χρόνο και  
μύδεις αντιστινή: ενέργειας να ταξιδεύουν μόνο



αρχικές και τελικές καταστάσεις. Έτσι καταστά-  
σεις πολλών σωματιδίων (όπως η διαδικασία δημιουργίας ζευγαριού  $\pi^+\pi^-$ ) μπορούν να αντιμετωπιστούν  
με το φορμαλισμό σκατοανάλυσης ενός σωματι-  
δίου, αποφεύχοντας την πολυπλοκότητα της  
Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου. Έγες οι δυνα-  
τές διαδικασίες είναι δυνατόν να περιγραφούν  
είτε χρησιμοποιώντας σωματίδια είτε αντισωμα-  
τίδια (και κατά ευήγη προτιμάμε τα σωματίδια).

- Το κενό είναι ένα πολύ σύνθετο περιβάλλον!

Ζευγάρια από  $\pi^+\pi^-$  δημιουργούνται και καταστρέ-  
φονται ως αποτέλεσμα της συνταγής για το  
αντισωματίδιο.

• • Το τεχνικό αίτημα για σύγκριση με το πείραμα είναι να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε ρυθμούς μεταβάσης και ενεργούς διατομές. Για την ώρα όμως έχουμε στη διαθεσί- μας μόνο πηματοεναρτήσεις ελεύθε-ρων βηματιδίων.

Τώς θα συμπεριλάβουμε τις αλληλεπιδράσεις; Όπως προκύπτει από την προηγούμενη συζη-τηση ("απή" και "διπή" βιέδαση) η θεωρία Διαταραχών θα είναι η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε για να υπολογί-σουμε πράτη βιέδασης. Έτσι πρέπει να υπενθυμίσουμε τα κυριότερα αποτελέσματα της θεωρίας Διαταραχών.

# Σύντομη αναβωότητα της μη σχετικιστικής χρονικά εξαρτημένης Θεωρίας Διαταραγών

Ας θεωρήσουμε ότι γνωρίζουμε τις λύσεις της  
εξ. Schrödinger για το ελεύθερο σωματίδιο

$$H_0 \phi_n = E_n \phi_n \quad (1)$$

$$\text{με } \int_V \phi_m^* \phi_n d^3x = \delta_{mn} \quad (2)$$

όπου  $H_0$  είναι ανεξάρτητη του χρόνου, ενώ για  
απρότητα θεωρούμε το σωματίδιο σε όγκο  $V$ .

Το ζητούμενο είναι να λύσουμε την εξ. Schr.  
για ένα σωματίδιο κυνούμενο μέσα σε ένα δυνα-  
μικό αλληλεπίδρασης  $V(\vec{x}, t)$ ,

$$(H_0 + V(\vec{x}, t)) \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3)$$

Και η λύση της (3) μπορεί να εκφραστεί χρησι-

μολοιότας το πρώτο σύστημα (2), ως

$$\psi = \sum_n a_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t} \quad (4)$$

Για να βρούμε τους άγνωστους συντελεστές  $a_n(t)$ , αντικαθιστούμε την (4) στην (3)

$$\Rightarrow i \sum_n \frac{da_n}{dt} \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t} = \sum_n V(\vec{x}, t) a_n \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t} \quad (5)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (5) επί  $\phi_f^*$ , ολοκληρώνουμε πάνω

στον όγκο, και χρησιμοποιώντας την (2)

$$\Rightarrow \frac{da_f}{dt} = -i \sum_n a_n(t) \int \phi_f^* V \phi_n d^3x e^{i(E_f - E_n)t} \quad (6)$$

δηλ έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα συσχετισμένων γραμμικών εξισώσεων 1<sup>ης</sup> τάξης.

Ας υποθέσουμε ότι πριν τη δράση του  $V(\vec{x}, t)$

το σωματίδιο βρίσκεται σε μία ιδιοκατάσταση  $i$

της αδιατάραχτης  $H_0$ , δηλ σε χρόνο  $t = -\frac{T}{2}$

έχουμε τις κανονικές συνθήκες

$$\begin{aligned} a_i(-T/2) &= 1, \\ a_n(-T/2) &= 0 \quad \forall n \neq i. \end{aligned} \quad (7) \quad (37)$$

Τότε  $\Rightarrow \frac{da_f}{dt} = -i \int d^3x \phi_f^* V \phi_i e^{i(E_f - E_i)t}$ , (8)  
 δηλ. υποθέτουμε ότι το  $V(\vec{x}, t)$  είναι μικρό και  
 παροδικό, μπορούμε σε πρώτη προσέγγιση να  
 θεωρήσουμε ότι οι αρχικές συνθήκες ισχύουν για  
όλους τους χρόνους. Οπότε

$$(8) \Rightarrow a_f(t) = -i \int_{-\frac{T}{2}}^t dt' \int d^3x \phi_f^* V \phi_i e^{i(E_f - E_i)t'} \quad (9)$$

και ιδιαίτερα μετά χρόνο  $t = \frac{T}{2}$ , που υποθέ-

τούμε ότι η αλληλεπίδραση έχει τελειώσει, έχουμε

$$a_f(t) = -i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d^3x \left[ \phi_f(\vec{x}) e^{-iE_f t} \right]^* \cdot V(\vec{x}, t)$$

$$\cdot \left[ \phi_i(\vec{x}) e^{-iE_i t} \right] \equiv T_{fi} \quad (10)$$

που μπορεί να γραφτεί στη συναρτησιακή μορφή

$$T_{fi} = -i \int d^4x \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) \quad (11)$$

4-διάστατο ολοκλήρωμα

τελεστής

διαταρακτικό αρχικό

## Αξιοσημείωτα παραδείγματα

(38)

π.χ. 1.  $V(\vec{x}, t) = V(\vec{x})$  δηλ ανεξάρτητο χρόνου

$$\begin{aligned} (10) \rightarrow T_{fi} &= -i V_{fi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E_f - E_i)t} \\ &= -2\pi i V_{fi} \delta(E_f - E_i) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{οπov } V_{fi} = \int d^3x \phi_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}) \phi_i(\vec{x}) \quad (13)$$

Η συνάρτηση  $\delta$  ευφράζει το γεγονός ότι η ενέργεια του σωματιδίου διατηρείται κατά τη μετάβαση από  $i \rightarrow f$ .

$$\text{π.χ. 2 } V(\vec{x}, t) = V(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

το σκουλήρισμα χρόνου του  $T_{fi}$  στην (10)

$$\rightarrow \int dt e^{iE_f t} e^{-i\omega t} e^{-iE_i t} = 2\pi \delta(E_f - E_i - \omega)$$

δηλ το σύστημα απορροφά ενέργεια από το δυναμικό.

$$\text{π.χ. 3 } V(\vec{x}, t) = V(\vec{x}) e^{i\omega t}$$

$$(10) \rightarrow T_{fi} \propto \int dt e^{iE_f t} e^{i\omega t} e^{-iE_i t} = 2\pi \delta(E_f + \omega - E_i)$$

δηλ το δυναμικό απορροφά ενέργεια από το σύστημα.

Προφανώς μπορούμε να βελτιώσουμε την παραπάνω προσέγγιση βάζοντας το αποτελεσματικό

(9) για το  $a_n(t)$  στο δεξί μέρος της (6),

$$\rightarrow \frac{da_f}{dt} = \dots + (-i)^2 \left[ \sum_{n \neq i} V_{ni} \int_{-\frac{T}{2}}^t dt' e^{i(E_n - E_i)t'} \right] \cdot V_{fn} e^{i(E_f - E_n)t} \quad (14)$$

Η διόρθωση στο  $T_{fi}$  είναι

$$T_{fi} = \dots - \sum_{n \neq i} V_{fn} V_{ni} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E_f - E_n)t} \int_{-\infty}^t dt' e^{i(E_n - E_i)t'}$$

που για να έχει νόημα (και σε συμφωνία με με την αρχή α προσδιοριστικότητας)

πρέπει να συμπεριλάβουμε στο εκθετικό των ολο-

κληρώματος στο  $dt'$  μια μικρή δετική ποσότητα

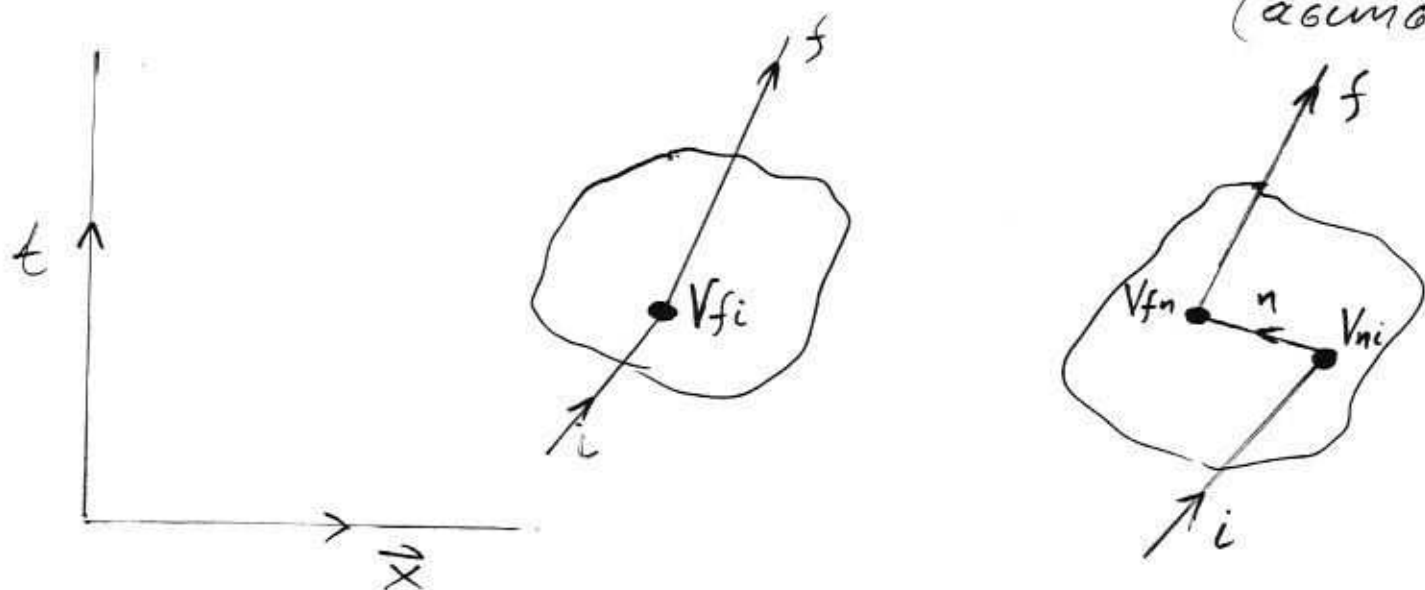
$\epsilon$  που θα την αφαιρούμε τα τείνει στο μηδέν

μετά την ολοκλήρωση

$$\int_{-\infty}^t dt' e^{i(E_n - E_i - i\epsilon)t'} = i \frac{e^{i(E_n - E_i - i\epsilon)t}}{E_n - E_i - i\epsilon}$$

Ετσι η διόρθωση 2<sup>ης</sup> τάξης στο  $T_{fi}$  είναι

$$T_{fi} = \dots - 2\pi i \sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{ni}}{E_i - E_n + i\epsilon} \delta(E_f - E_i) \quad (\text{όμοιον})$$



Διαγράμματα Feynman που παριστάνουν τους πρώτους δύο όρους στη μη σχετικιστική διαταρακτική σειρά, που ανεισφέρουν στη μετάβαση  $i \rightarrow f$ .

Τελικά για κάθε αλληλεπίδραση έχουμε έναν παράγοντα όπως τον  $V_{ni}$  και για τη διόρθωση κάθε ενδιαμέσης καταστάσης έχουμε έναν διαδότη όπως τον  $1/(E_i - E_n)$ .

Οι ενδιαμέσες καταστάσεις ταυτοποιούνται

ως "εν δυνάμει" με την έννοια ότι η  
 ενέργεια δεν διατηρείται ( $E_f \neq E_i$ ), αλλά  
 βέβαια υπάρχει διατήρηση της ενέργειας  
 μεταξύ της αρχικής και τελικής κατάστασης  
 όπως υποδεικνύεται από την  $\delta(E_f - E_i)$ .

Στη συνέχεια θα χειριστούμε τα παραπάνω  
 ώστε να μπορέσουμε να χειριστούμε τόσο σχε-  
 τιστικά σωματίδια όσο και τα αντισωμα-  
 τίδια τους.

# Εξισώσεις Maxwell - διατήρηση ρεύματος αναφορικά βαθμίδας

Οι εξ. Maxwell της Κλασικής Ηλεκτρικής στο κενό

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho, & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{j} \end{aligned} \quad (a)$$

Ισχύουν τα εξής

(i) Οι εξ. (a) είναι ισοδύναμες με την παρακάτω συναρτησιακή εξίσωση για το  $A^\mu$

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \quad (b)$$

όπου  $j^\mu = (\rho, \vec{j})$  (c) είναι το 4-διάνυσμα ρεύματος ενώ το 4-διάνυσμα δυναμικού

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A}) \quad (d)$$

σχετίζεται με το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο με τις σχέσεις

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\epsilon) \quad (4)$$

(ii) Εισάγοντας τον αντισυμμετρικό τανυστή έντασης πεδίου (field strength)

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

οι εξ. Maxwell (α) παίρνουν τη μορφή

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (6)$$

$$(iii) \quad \partial_\nu j^\nu = 0 \quad (7)$$

(iv) Τα  $\vec{E}, \vec{B}$  είναι αναλλοίωτα κάτω από το μετασχηματισμό (βαθμίδας)

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \quad (i)$$

όπου  $\chi$  αυθαίρετη συνάρτηση του  $x$ .

Με βάση αυτή την ελευθερία οι  
εξ. Maxwell (α) γράφονται στη μορφή

$$\square A^\mu = j^\mu \quad \text{με} \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\kappa)$$

Η απαίτηση  $\partial_\mu A^\mu = 0$  είναι γνωστή ως συν-  
θήκη Lorentz. Αλλά ακόμα και αφού  
επιβάσουμε αυτή τη συνθήκη έχουμε παραμέ-  
νονα ελευθερία στην επιλογή του δυναμικού  
 $A_\mu$ , δηλ. μπορούμε ακόμα να κάνουμε το  
μετασχηματισμό (βυθμίδας)

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (2)$$

όπου το  $\Lambda$  είναι οποιαδήποτε συνάρτηση που  
ικανοποιεί τη σχέση

$$\square \Lambda = 0 \quad (\mu)$$

Η (μ) εξασφαλίζει ότι η συνθήκη Lorentz  
συνεχίζει να ικανοποιείται.

(72)

# Κβαντική Ηλεκτροδυναμική

## Σωματιδίων χωρίς spin.

Αποφεύγουμε την προηγουμένη που  
εισάγει το spin των quarks και leptons.

Στόχος είναι η χρήση της θεωρίας  
διαταραχών με αναλλοίωτο τρόπο.

Ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο χωρίς spin  
ικανοποιεί την εξ. K-E

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0 \quad (1)$$

Στη γραμμική  $\hbar/\omega$  η κίνηση σωματι-  
δίων με φορτίο  $-e$  σε ένα ηλεκτρομαγνητι-  
κό δυναμικό  $A^\mu = (A^0, \vec{A})$  εξετάζεται  
υπό την αντικατάσταση

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + e A^\mu \quad (2)$$

Συνεπώς η αντίστοιχη υβαντομηχανική  
αντικατάσταση ( $p^\mu \rightarrow i\partial^\mu$ ) είναι

$$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu + e A^\mu \quad (3)$$

οπότε η εξ. K-G γίνεται

$$(i\partial_\mu i\partial^\mu + m^2)\phi = -V\phi, \quad (4)$$

↑ για συμφωνία με εξ Schr.

όπου η ηλ/μή διαταραχή είναι

$$V = -ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) - e^2 A^2 \quad (5)$$

Το  $V$  χαρακτηρίζεται από την παράμετρο  $e$

$$\left( \text{σε φυσικές μονάδες } \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} \right)$$

οπότε το μικρό μέγεθός της συνιστά ότι

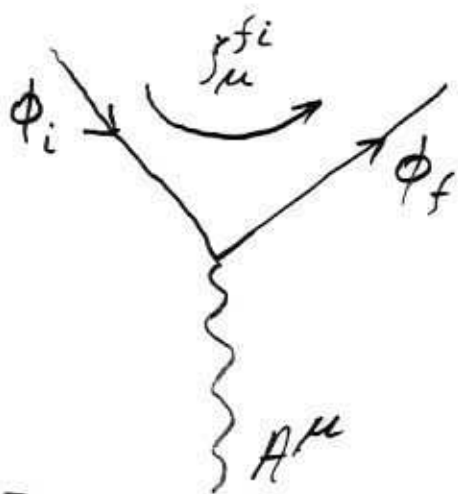
μπορούμε να κάνουμε διαταρακτική ανάπτυ-

ξη του  $V$  σε δυνάμεις του  $\alpha$ . Έδω η συνε-

ξιστά χαμηλότερης τάξης σε πράτη σκέδασης

είναι μαζί προέχουσιν και θα παραμείνουν  
 με τον όρο  $e^2 A^2$  (αργότερα θα δούμε  
 πιο διεξοδικά γόχο)

Δουλεύοντας σε κατώτερη τάξη στη θεωρία  
 διαταραχών το πρώτος  $T_{fi}$  (εξ. (11)) για τη  
 διεύθυνση ενός ηλετρονίου χωρίς σπιν από  
 μία κατάσταση  $\phi_i$  σε μία  $\phi_f$  από ένα ηλ.  
 δυναμικό  $A^\mu$  είναι



$$T_{fi} = -i \int \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) d^4x$$

$$= i \int \phi_f^* i e (A^\mu \partial_\mu + \partial_\mu A^\mu) \phi_i d^4x \quad (6)$$

η παραγωγός δρα και στα  
 δύο πεδία  $A^\mu, \phi_i$

$$\int \phi_f^* \partial_\mu (A^\mu \phi_i) d^4x = - \int \partial_\mu \phi_f^* A^\mu \phi_i d^4x$$

οργανώνω κατά παράγοντες ανεξάρτητα  
 τον επιφανειακό όρο δεδομένου ότι το δυναμικό  
 μηδενίζεται γύρω  $t, |\vec{x}| \rightarrow \pm \infty$

(6)  $\Rightarrow T_{fi} = -i \int j_{\mu}^{fi} A^{\mu} d^4x$  (7)

όπου

$$j_{\mu}^{fi}(x) \equiv -ie \left( \phi_f^* (\partial_{\mu} \phi_i) - (\partial_{\mu} \phi_f^*) \phi_i \right) \quad (8)$$

το οποίο, σύμφωνα με την προηγούμενη  
εξήγηση, μπορεί να θεωρηθεί ως το ηλεκτρο-  
μαγνητικό ρεύμα για τη μετάβαση του  
ηλεκτρονίου από την κατάσταση  $i$  στην  $f$ .

Αν το εισερχόμενο ηλεκτρόνιο χωρίς spin  
έχει 4-ορμή  $P_i$ , έχουμε

$$\phi_i(x) = N_i e^{-i P_i \cdot x} \quad (9)$$

↖ σταθερά κανονικοποίησης

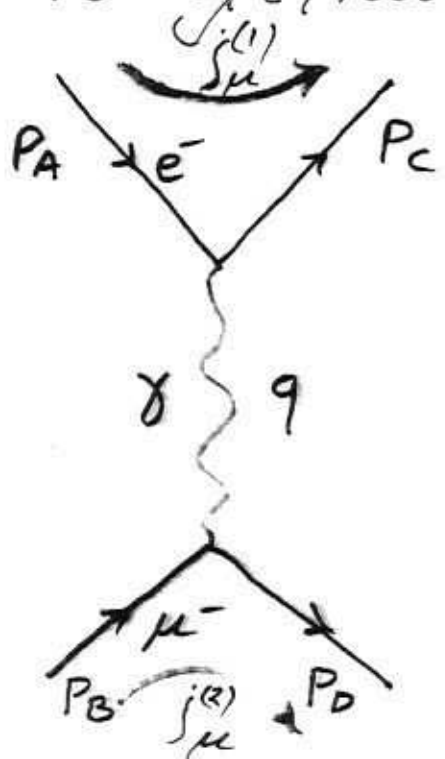
Χρησιμοποιώντας αντίστοιχη έκφραση και για  
την  $\phi_f$

9)  $\rightarrow$  (8)  $\Rightarrow j_{\mu}^{fi}(x) = -e N_i N_f (P_i + P_f)_{\mu} e^{i(P_f - P_i) \cdot x}$  (10)

# Σκέδαση ηλεκτρονίου - μιονίου (χωρίς spin)

Θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της σκέδασης ηλεκτρονίου (χωρίς spin) από η/μύ δυναμικό  $A^\mu$  γιά να υπολογίσουμε τη σκέδαση του από άλλο φορτισμένο σωματίδιο. Ας μερετήσουμε τη σκέδαση ηλεκτρονίου - μιονίου ώστε να αποφύγουμε ταυτόσημεί σωματίδια.

Το σχετικό διάγραμμα Feynman είναι:



Για τον υπολογισμό απλά πρέπει να συνδέσουμε το  $A^\mu$  με την πηγή του που εδώ είναι το ρεύμα  $j_\mu^{(2)}$  του μιονίου. Τα  $A^\mu j_\mu^{(2)}$

συνεχίζονται μέσω των ε. Maxwell,

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j_{(2)}^\mu \quad (11)$$

που στη βαθμίδα Lorentz,  $\partial_\mu A^\mu = 0$  (12)

γίνεται  $\square A^\mu = j_{(2)}^\mu \quad (13)$

Το  $j_{(2)}^\mu$  του μιονίου έχει βέβαια την ίδια μορφή με εκείνη του ηλεκτρονίου (ε. (10)),

$$j_{(2)}^\mu = -e N_B N_D (P_D + P_B)^\mu e^{i(P_D - P_B) \cdot x}, \quad (14)$$

όπου οι ορμές δίνονται στο σχήμα.

Δεδομένου ότι

$$\square e^{iq \cdot x} = -q^2 e^{iq \cdot x} \quad (15)$$

η λύση της (13) είναι

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j_{(2)}^\mu \quad \text{με } q = P_D - P_B \quad (16)$$

Έτσι το πλάτος της διεύαυτης ηλεκτρονίου-μιονίου

$$\xrightarrow{(16) \rightarrow (7)} T_{fi} = -i \int j_{(2)}^\mu(x) \left( -\frac{1}{q^2} \right) j_{(2)}^\mu(x) d^4x \quad (17)$$

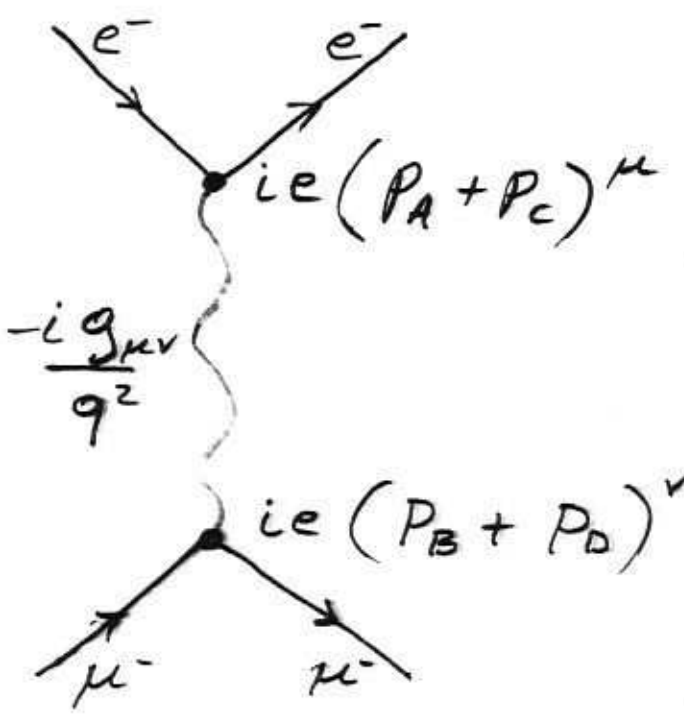
$(10), (14) \rightarrow (17) \Rightarrow T_{fi} = -i N_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \mathcal{M}$

$\cdot \delta^{(4)}(P_D + P_C - P_B - P_A) (19)$

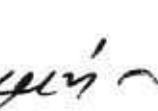
όπου  $-i \mathcal{M} = (ie(P_A + P_C)^\mu) \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) (ie(P_B + P_D)^\nu)$  (άσκηση)

- $\mathcal{M}$  - αναλλοίωτο πρώτος
- η  $\delta$  εκφράζει τη διατήρηση ενέργειας - ορμής στη διαδικασία διεύθυνσης.

Σε αντίστοιχία με τα διαγράμματα Feynman της μη σχετικιστικής θεωρίας διαταραχών έχουμε τα συσχετισμένα με τη συλλογιστική μορφή της



Για παράδειγμα το σχήμα αναπαριστάει τη διεύθυνση ηλεκτρονίων - μιονίων χωρίς σπιν σε τάξη  $e^2$  (ή  $\alpha$ ) και το πρώτος δίνεται

από τις (18), (19). Αυτό είναι το διάγραμμα Feynman κατώτερης τάξης. Η γραμμή  παριστάνει ένα φωτόνιο που ανταλλάσσεται μεταξύ των λεπτονίων και ο συσχετισμένος παράγοντας  $-i g_{\mu\nu} / q^2$  ονομάζεται διαδότης του φωτονίου (εμπεριέχει δείκτες Lorentz  $\mu, \nu$  στην 6πιν). Το 4-διάνημα ορμής  $q$  του φωτονίου προορίζεται από τη διατήρηση της 4-ορμής στις κορυφές. Παρατηρούμε ότι το  $q^2 \neq 0$  και συνεπώς ονομάζουμε το φωτόνιο εν δυνάμει (virtual) ή off-mass shell. Με κάθε κορυφή του διαγράμματος συσχετίζουμε τους παράγοντες του σχήματος, δηλ. περιέχει την ηλ' μμ "σταθερά"  $e$  και ένα δείκτη 4-δια-

(52)  
νυκτατος που εξαφανίζει τη σύνδεση με το  
δίκτυο του φωτογόνου. Τα διάφορα - και  
έχουν μπει ώστε να δίνουν σωστή διαγράμμιση  
τα ανώτερης τάξης. Αξιοσημείωτο είναι ότι  
το γινόμενο των 3 παραγόντων δίνει - i M.

# Ενεργός Διατομή και Απαιτούμενο Πρώτος

Ενα βασικό αίτημα της όλης διαδικασίας που απαιτούμε είναι να συσχετιστούν τα θεωρητικά μοντέλα και οι υπολογιστικές τεχνικές με πειραματικά μετρήσιμες ποσότητες.

Αρχίζουμε προσδιορίζοντας το  $N$  στη  
σηματοδότηση ελεύθερου σωματιδίου (K-G)

$$\phi = N e^{-i p \cdot x} \quad (20)$$

Υπονοούμε την αντίστοιχη πυκνότητα πιθανότητας  $\rho = 2 E |N|^2$ . Το ότι  $\rho \sim E$  εξισορροπεί τη σύστοιχότητά του  $d^3x$  ώστε να παραμένει

Συνεπώς αντί να κάνουμε αναγωγή στη μονάδα

$$\int_V \rho dV = \int 2E |N|^2 dV = 1 \leadsto N = (1/2EV)^{1/2}$$

κάνουμε αναγωγή σε  $2E$  φωματίδια

$$\int_V \rho dV = 2E \leadsto N = 1/V^{1/2} \quad (21)$$

ώστε το  $N$  να μην εξαρτάται από το  $E$ .

Επίσης σημειώνουμε ότι η συνάρτηση  $\delta$

στην (12) εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας

στη μετάβαση  $i \rightarrow f$ . Πόσω της αρχής

της αβεβαιότητας, αυτό σημαίνει ότι οι

καταστάσεις  $i$  και  $f$  χωρίζονται από άπειρο

χρόνο και η ποσότητα  $|T_{fi}|^2$  δεν έχει αρι-

βες ρόημα. Ετσι είναι πιο γοητικό να ορί-

σουμε την ποσότητα  $W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T} \quad (22)$

η ρυθμό μετάβασης. Υψώνοντας στο τετράγωνο την (12) έχουμε

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{T} \delta(E_f - E_i) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt e^{i(E_f - E_i)t}$$

$\uparrow$   
 αυτή τη  $\delta$  την κρατάμε όπως είναι

$-\frac{T}{2}$  σε αυτήν δε παίρνουμε το όριο αμέσως αλλά  $E_f = E_i$  λόγω της προηγούμενης  $\delta$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{T} \delta(E_f - E_i) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt$$

$$= 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \quad (22)$$

Η (22) παίρνει φυσικό νόημα ύστερα από οριοθέτηση πάνω σε ένα εύρος αρχικών και τελικών καταστάσεων. Στα στοιχειώδη συματιδια συστήματα αρχίζουμε με προσδιορισμένη αρχική κατάσταση και τελειώνουμε με ένα εύρος τελικών καταστάσεων. Η  $\rho(E_f)$  είναι η πυκνότητα

ροτήτα των τελικών καταστάσεων τότε

$\rho(E_f)dE_f$  είναι ο αριθμός καταστάσεων στο ενεργειακό διάστημα  $E_f$  μέχρι  $E_f + dE_f$ .

Οργανώνουμε πάνω σε αυτή την πυκνότητα επιβάλλοντας τη διατήρηση της ενέργειας

$$\begin{aligned} \Rightarrow W_{fi} &= 2\pi \int dE_f \rho(E_f) |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \\ &= 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_i) \end{aligned} \quad (23)$$

Αυτός είναι ο χρυσός κανόνας του Fermi.

Συνεπώς στη διαδικασία  $A+B \rightarrow C+D$

ο ρυθμός μετάβασης στη μονάδα όγκου είναι

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{T V},$$

όπου  $T$  είναι το χρονικό διάστημα της αλλη-

λεπίδρασης, και το πλάτος μετάβασης είναι

$$T_{fi} = -i N_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_C + P_D - P_A - P_B) \mathcal{M}_{124}$$

Υψώνοντας την (24) στο τετράγωνο μία  
 συν. δ παραμένει και το  $(2\pi)^4$  επί την  
 άρρη δίνει  $TV$  (υπολογισμός ίδιος με αυτό  
 που οδήγησε στη (22)). Με χρήση της (21)

$$\Rightarrow W_{fi} = (2\pi)^4 \frac{\delta^4(P_C + P_D - P_A - P_B) |M|^2}{V^4} \quad (25)$$

Τα πειραματικά αποτελέσματα στη διε-  
 δαση  $AB \rightarrow CD$  συνήθως εκφράζονται στη  
 μορφή ενεργού διατομής ( $E\Delta$ ). Η  $E\Delta$  σχετί-  
 ζεται με το ρυθμό μετάβασης με τη σχέση

$$E\Delta = \frac{W_{fi}}{(\text{αρχική ροή})} (\text{αριθμός τελικών καταστάσεων}) \quad (26)$$

- Για ένα σωματίδιο η κβαντική θεωρία περιο-  
 ρίζει τον αριθμό των τελικών καταστάσεων σε  
 όγκο  $V$  με ορμές σε όγκο  $d^3p$  να είναι  $\frac{V d^3p}{(2\pi)^3}$

Αλλά εδώ έχουμε  $2E$  σωματίδια στον όγκο

$$V \rightarrow \frac{\text{αριθμός τεριών καταστάσεων}}{\text{σωματίδιο}} = \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3 2E} \quad (27)$$

Αρα για σωματίδια C, D που μεσολάβησαν

σε στοιχεία ορμής  $d^3 p_C, d^3 p_D$  έχουμε

$$\frac{\text{αριθμός διαδέσεων}}{\text{τεριών καταστάσεων}} = \frac{V d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{V d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D} \quad (28)$$

•• Την αρχική ροή είναι ευκολότερο να την

υπολογίσουμε στο σύστημα εργαστηρίου. Ο αριθ-

μός των σωματιδίων της δέσμης που διέρχονται

από τη μονάδα επιφάνειας στη μονάδα χρόνου

$$\text{είναι } |\vec{v}_A| 2E_A / V \quad (\text{δηλ. } \frac{\text{σωματ.}}{ST} = \frac{\cancel{X} \text{ σωματ.}}{\cancel{XST} = V})$$

και ο αριθμός των σωματιδίων στόχων στη

μονάδα όγκου είναι  $2E_B / V$ . Για να έχουμε

ένα μέτρο της εισερχόμενης πυκνότητας ανεξάρ-

ΤΗΤΟ ΤΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΑΙΡΝΟΥΜΕ

$$\text{αρχική ροή} = |\vec{V}_A| \frac{2E_A}{V} \frac{2E_B}{V} \quad (29)$$

Συνδυάζοντας όλα αυτά βρίσκουμε τη διαφορική διατομή  $d\phi$  σε διεύθυνση σε  $d^3p_C d^3p_D$

$$d\phi = \frac{\cancel{V^2}}{|\vec{V}_A|^2 2E_A 2E_B} \frac{1}{\cancel{V^4}} |\mathcal{M}|^2 \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \cdot \quad (30)$$

$$\cdot \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3p_C}{2E_C} \frac{d^3p_D}{2E_D} V^2$$

Το  $V$  φεύγει και στο εξής κανονικοποιούμε στη μονάδα όγκου  $\leadsto N=1$  στην (21).

Φυσικό νόημα  $E\Delta$ : Η εμφάνιση του αριθμού των τετριμνών καταστάσεων σε συνδυασμό με τον ρυθμό μετάβασης  $W_{fi}$  παριστάνει τον αριθμό των σκεδαζομένων σωματιδίων  $n_s$

στη μονάδα χρόνου (στην (26))

Η εμφάνιση της ροής (στην (26)) εξασφαλίζει  
 ότι ο ρυθμός μετάβασης είναι ανεξάρτητος  
 από τον αριθμό των σωματιδίων που είναι  
 παρόντα στη δέσμη ή στο στόχο που χρησι-  
 μοποιούνται σε κάποιο πείραμα. Ο λόγος είναι  
 ότι επιθυμούμε η ΕΔ να παριστάει μια εσω-  
 τερική πιθανότητα μετάβασης, δηλ. την εσωτε-  
 ρική ένταση της αλληλεπίδρασης  $AB \rightarrow CD$ .  
 Ετσι διαιρούμε (στην (26)) με τον αριθμό  
 σωματιδίων στο στόχο  $n_E$  και τη ροή της δέσμης  
 $n_B v_B$ , που μετράει τον αριθμό των σωματιδίων  
 της δέσμης που διαπερνούν τη μονάδα επιφάνει-  
 ας κάθετης στη ταχύτητα δέσμης στη μονάδα  
 χρόνου ( $v_B$  είναι η σχετική ταχύτητα δέσμης-

στόχοι εάν ο στόχος δεν είναι σταθερός).

Συνεπώς η (26) γράφεται συμβολικά ως

$$\eta_5 = (\eta_{\delta\nu\delta}) \cdot \eta_{\epsilon} \cdot 6 \quad (31)$$

↑                    ↑                    ↑                    ↗  
ρυθμός            ροή            αριθμός            σταθερά που  
μετρήσεων       δέσμης σωματιδίων περιέχει τη  
στο στόχο            φύσιμη!

• Η  $E\Delta$  6 εκφράζει πράγματι την εσωτερική πιθανότητα σύεδασης. Έχει διαστάσεις επιφάνειας (από έλεγχο διαστάσεων στην (31))

Συμβολικά γράφουμε την  $d\delta$  στην (30) ως

$$d\delta = \frac{|M|^2}{F} dQ, \quad (32)$$

$$\text{όπου } dQ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_c + P_e - P_A - P_B) \quad (33)$$

$$d^3P_c / (2\pi)^3 2E_c \cdot d^3P_D / (2\pi)^3 2E_D$$

↑  
Lorentz αναλλοίωτα

είναι ο (Lorentz αναλλοίωτος) παράγοντας φάσεων και  $F$  η προβιπτική ροή

στο σύστημα εργαστηρίων,

$$F = |\vec{V}_A| 2E_A \cdot 2E_B \quad (34)$$

με  $\vec{V}_A = \frac{\vec{P}_A}{E_A}$ .

άρα: Τα  $dQ$ , είναι Lorentz αναλλοίωτα

## Ρυθμός Διάσπασης - M

Η απόδειξη του τύπου που δίνει τους ρυθμούς διάσπασης γίνεται σε ανάλογες γραμμές. Ο διαφορικός ρυθμός για τη διάσπαση  $A \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$  σε στοιχεία ορμής  $d^3p_1, \dots, d^3p_n$  των σωματιδίων της τελικής κατάστασης είναι

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_A} |M|^2 \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \dots \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_A - P_1 - \dots - P_n) \quad (35)$$

Ο τύπος είναι της μορφής των (32), (33).

2 ΕΑ είναι ο αριθμός των σωματιδίων που διασπώνται στη μονάδα όγκου και

$M$  είναι το αναγνώσιμο πλάτος που έχει υπολογιστεί από το σχετικό διάγραμμα Feynman.

Ο ρυθμός ρυθμός διάσπασης,  $\Gamma$  είναι το άθροισμα των επί μέρους ρυθμών για όλα τα κανάλια διάσπασης. Προφανώς ο ρυθμός

$$\text{είναι } \Gamma = - \frac{dN_A}{dt} / N_A \quad (36)$$

και οδηγεί στον ευδετικό νόμο διάσπασης

$$\text{των σωματιδίων } A, \quad N_A(t) = N_A(0) e^{-\Gamma t}$$

Το  $\Gamma^{-1}$  λέγεται χρόνος ζωής του σωματιδίου  $A$ .

can be moved as the matrix character is recorded by the component. Thus,  $L$  becomes the trace of the product of four  $4 \times 4$  matrices,

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \text{Tr}((\not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\nu), \quad (6.20)$$

where  $m$  is the mass of the electron. To evaluate  $L$ , we use the trace theorems:

#### 6.4 Trace Theorems and Properties of $\gamma$ -Matrices

Recall that the Dirac  $\gamma$ -matrices satisfy the commutation algebra

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (6.21)$$

As a consequence, it is straightforward to show that the trace of a product of  $\gamma$ -matrices can be evaluated without ever explicitly calculating a matrix product. The trace theorems are (using again the notation  $\not{a} = \gamma_\mu a^\mu$ ):

$$\text{Tr } 1 = 4,$$

Trace of an odd number of  $\gamma_\mu$ 's vanishes,

$$\text{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4a \cdot b, \quad (6.22)$$

$$\text{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)],$$

$$\text{Tr } \gamma_5 = 0,$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \not{a}\not{b}) = 0, \quad (6.23)$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4i\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} a^\mu b^\nu c^\lambda d^\sigma,$$

where  $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = +1$  ( $-1$ ) for  $\mu, \nu, \lambda, \sigma$  an even (odd) permutation of  $0, 1, 2, 3$ ; and  $0$  if two indices are the same.

Other useful results for simplifying trace calculations are:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$$

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a}$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b \quad (6.24)$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2\not{c} \not{b} \not{a}$$

**EXERCISE 6.3** Making use of (6.21), prove the trace theorems and the identities (6.24).

#### 6.5 $e^+e^-$ Scattering and the Process $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

It is straightforward to evaluate the tensor associated with the electron vertex, (6.20), using the trace theorems listed in (6.22). We have

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \text{Tr}(\not{k}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu) + \frac{1}{4} m^2 \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) \\ &= 2(k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - (k' \cdot k - m^2)g^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (6.25)$$

TABLE 6.2  
Feynman Rules for  $-\mathcal{L}_I$

|                                                               |  | Multiplicative Factor                                  |
|---------------------------------------------------------------|--|--------------------------------------------------------|
| • External Lines                                              |  |                                                        |
| Spin 0 boson (or antiboson)                                   |  | 1                                                      |
| Spin $\frac{1}{2}$ fermion (in, out)                          |  | $u, \bar{u}$                                           |
| antifermion (in, out)                                         |  | $\bar{v}, v$                                           |
| Spin 1 photon (in, out)                                       |  | $\epsilon_\mu, \epsilon_\mu^*$                         |
| • Internal Lines—Propagators (need $-i\epsilon$ prescription) |  |                                                        |
| Spin 0 boson                                                  |  | $\frac{i}{p^2 - m^2}$                                  |
| Spin $\frac{1}{2}$ fermion                                    |  | $\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$                     |
| Massive spin 1 boson                                          |  | $-\frac{i(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / M^2)}{p^2 - M^2}$ |
| Massless spin 1 photon (Feynman gauge)                        |  | $-\frac{ig_{\mu\nu}}{p^2}$                             |
| • Vertex Factors                                              |  |                                                        |
| Photon—spin 0 (charge $-e$ )                                  |  | $ie(\not{p} + \not{p}')^0$                             |
| Photon—spin $\frac{1}{2}$ (charge $-e$ )                      |  | $ie\gamma^\mu$                                         |

*Loops:*  $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$  over loop momentum; include  $-1$  if fermion loop and take the trace of associated  $\gamma$ -matrices.

*Identical Fermions:*  $-1$  between diagrams which differ only in  $e^- \leftrightarrow e^-$  or initial  $e^- \leftrightarrow$  final  $e^-$ .

# Useful Formulae

## Kinematics

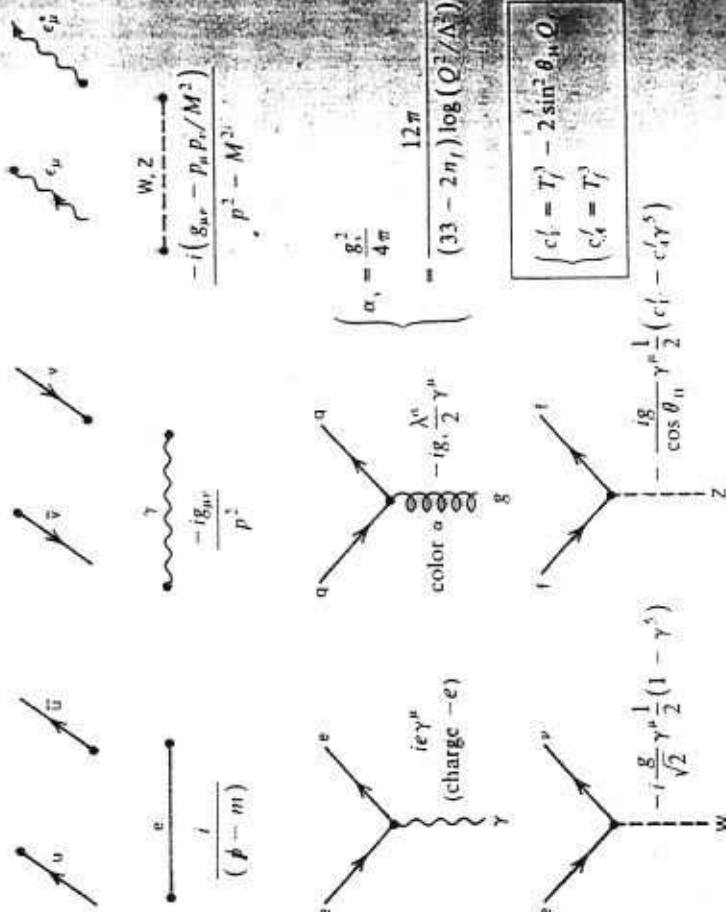
Lorentz invariant phase space ( $P \rightarrow p_1 + \dots + p_n$ )

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - \dots - p_n) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$

Scattering:  $\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{p_f}{p_i} |\mathcal{M}|^2$

Decay:  $d\Gamma(A \rightarrow 1 + \dots + n) = \frac{1}{2m_A} |\mathcal{M}|^2 dQ$

## Feynman Rules for $-i\mathcal{M}$



| $f$                        | $Q_f$          | $(T_f^3)_L$    | $(T_f^3)_R$ |
|----------------------------|----------------|----------------|-------------|
| u, c, t                    | $+\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{6}$  | 0           |
| d, s, b                    | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ | 0           |
| $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ | 0              | $\frac{1}{2}$  | —           |
| $e, \mu, \tau$             | -1             | $-\frac{1}{2}$ | 0           |

$\sin^2 \theta_w = 0.23, g \sin \theta_w = e, G = \frac{\sqrt{2} g^2}{8M_W^2} \approx 1.17 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$

$\hbar = 6.58 \times 10^{-25} \text{ GeV sec} = 1$

$\hbar c = 0.197 \text{ GeV F} = 1$

$(1 \text{ GeV})^{-2} = 0.389 \text{ mb}$

$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$

$p^\mu = (E, \mathbf{p}) = i \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = i \partial^\mu$

$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$

$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$

In an electromagnetic field,  $i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu + eA^\mu$  (charge  $-e$ )

$j^\mu = -ie(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*), \quad j^\mu = -e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

## $\gamma$ -Matrices

$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$

$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{0, \mu=0} = I; \quad \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k, \quad \gamma^k \gamma^k = -I, \quad k = 1, 2, 3$

$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \quad \gamma^\mu \gamma^5 + \gamma^5 \gamma^\mu = 0, \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5$

(Trace theorems on pages 123 and 261)

Standard representation:

$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma = \beta \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$   
 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

## Spinors

$(\not{p} - m)u = 0 \quad \begin{cases} \bar{u} = u^\dagger \gamma^0 \\ \not{p} = \gamma_\mu p^\mu \end{cases}$   
 $\bar{u}(\not{p} - m) = 0$

$u^{(r)\dagger} u^{(s)} = 2E\delta_{rs}, \quad \bar{u}^{(r)} u^{(s)} = 2m\delta_{rs}, \quad \sum_{s=1,2} u^{(s)} \bar{u}^{(s)} = \not{p} + m = 2m\Lambda_+$

$\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u = u_L, \quad \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u = u_R$

$\Lambda_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5), \quad \Lambda_+ \Lambda_- = 0, \quad \Lambda_- \Lambda_+ = 0, \quad \Lambda_+^2 = \Lambda_+, \quad \Lambda_-^2 = \Lambda_-$

# Εξίσωση Dirac (δυνάμεια)

Λύσεις της εξ. Dirac

Ας δούμε την ακριβή μορφή των λύσεων  
ελεύθερου σωματιδίου. Σε αναλογία με τη  
μη σχετικιστική περίπτωση, όπου γράφουμε  
ένα γενικό σπίνωρα για σωματίδια με σπιν  
με παραχρητοποιημένες λύσεις

$$\psi = \chi \cdot (\text{επίπεδο κύμα}), \quad (1)$$

όπου  $\chi$  σπίνωρας 2 συνιστωσών, αναζητούμε  
λύσεις της εξ. Dirac της μορφής

$$\psi = u e^{-i p \cdot x}, \quad (2)$$

όπου  $u$  είναι τώρα σπίνωρας 4 συνιστωσών  
που πρέπει να προσδιοριστεί και  $e^{-i p \cdot x}$  λύση

σπίνωρα. Λύματα όπως στη περίπτωση  $\chi$

Αντικαθιστούμε την (2) στην εξ. Dirac

$$i\partial\psi/\partial t = (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m)\psi \quad (3)$$

χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Για να αξιοποιήσουμε τη μορφή (4) των πινάκων  $\vec{\alpha}$ ,  $\beta$  χωρίζουμε τον σπίνηρα  $\omega$  σε δύο 2-δυνατωδών σπίντορες  $\phi$  και  $\chi$ :

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\leadsto E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m1 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (6)$$

(άδευση)

που παριετάρει δύο συζυγμένες εξ. για τα  $\phi, \chi$

$$(E - m)\phi = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi \quad (7)$$

$$(E + m)\chi = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \phi \quad (8)$$

Το (6) η (7), (8) αποτελούν ομογενές γραμμικό

(3)

σύστημα εξισώσεων ως προς  $\phi$  και  $\chi$  και συνεπώς έχει μη τετριμμένες λύσεις μόνο στην περίπτωση μηδενικής ορίσματος των συντελεστών

$$\begin{vmatrix} (E-m)\mathbb{1} & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & (E+m)\mathbb{1} \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2 \mathbb{1} \quad (10)$$

(που προκύπτει άμεσα από την ταυτότητα

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \mathbb{1} + i \underbrace{\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{αδωκη}})$$

$$\leadsto E = \pm (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2} \equiv p^0 \quad (11)$$

δηλ. έχει λύσεις θετικής και αρνητικής ενέργειας, όπως ήδη γνωρίζουμε.

(4)

Ας θεωρήσουμε πρώτα το σωματίδιο σε ηρεμία, δηλ.  $\vec{p} = 0$ . Τότε η (6) γίνεται

$$E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -m \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (12)$$

που έχει ιδιοτιμές:  $E = m, m, -m, -m$  (13)

και ιδιοδιανύσματα:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14)$

Προφανώς οι δύο πρώτες λύσεις αντιστοιχούν σε  $E > 0$  άρα σύμφωνα με προηγούμενη συζήτηση περιγράφουν ένα σωματίδιο με  $E > 0$  (ηλεκτρόνιο με φορτίο  $-e$ ). Οι άλλες δύο λύσεις με  $E < 0$  ερμηνεύεται ότι περιγράφουν ένα αντισωματίδιο με  $E > 0$  (ποζιτρόνιο με φορτίο  $+e$ ).

5  
Για  $\vec{p} \neq 0$  έχουμε να γράψουμε τη γενική  
εξ. (6), που χωρίζεται στις (7) και (8).

Για τις δύο γύσεις με  $E > 0$  μπορούμε  
να διαλέξουμε  $\phi = \phi^{(s)}$  όπου

$$\phi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

οπότε οι αντίστοιχες χαμηλότερες ενεργίες  
του  $\omega$  προκύπτουν από την (8)

$$\rightarrow \omega^{(1,2)} = \begin{pmatrix} \phi^{(1,2)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \phi^{(1,2)} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Για τις δύο άλλες γύσεις με  $E < 0$  διαλέγουμε

$$\chi = \chi^{(s)} \quad \text{όπου} \quad \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

οπότε από την (7) έχουμε

$$\omega^{(3,4)} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E-m} \chi^{(1,2)} \\ \chi^{(1,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E|+m} \chi^{(1,2)} \\ \chi^{(1,2)} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Έτσι για ένα ηλετρόνιο ορμής  $\vec{P}$ , έχουμε  
4 γύσεις:  $\omega^{(1,2)}$  που αντιστοιχούν σε  $E > 0$   
και  $\omega^{(3,4)}$  που αντιστοιχούν σε  $E < 0$ .

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε την ορθότητα  
τα των 4 γύσεων

$$\omega^{(r)} + \omega^{(s)} = 0 \text{ για } r \neq s \text{ με } r, s = 1, 2, 3, 4$$

(19)  
(άδεια)

Το δώρο που μας προσφέρει η ελ. Δυναμ.  
ας πούμε στη μορφή (6), είναι ο διπλός  
εμφυσιζόμενος. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρ-  
ξει ένα άλλο παρατηρήσιμο μέγεθος του  
οποίου ο αντίστοιχος τελεστής να μετατιθέ-  
ται με τους τελεστές  $H$  και  $\vec{P}$  και τα  
οποία οι ιδιοτιμές να υποστούν να ξεχωρίσουν

τις ευθυγραμμένες καταστάσεις. Μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι ο τελεστής

$$\vec{\Sigma} \cdot \hat{\vec{p}} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}} \end{pmatrix}, \quad \hat{\vec{p}} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (20)$$

μετατίθεται με τα  $H$  και  $\vec{P}$ . Έτσι η συνιστώσα στην κατεύθυνση της κίνησης δηλ το  $\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}$  είναι καλός κβαντικός αριθμός και μπορεί να χαρακτηρίσει τις ευθυγραμμένες καταστάσεις. Ονομάζουμε αυτό το νέο κβαντικό αριθμό ελικιότητα (helicity) της κατάστασης.

Με την επιλογή (15) των επιτόρων  $\phi^{(s)}$  ενδείκνυται να επιλέξουμε το  $\vec{p}$  κατά μήκος του άξονα  $z$ , δηλ.  $\vec{p} = (0, 0, p)$ . Οπότε

$$\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \phi^{(s)} = \frac{1}{2} \sigma_3 \phi^{(s)} = \lambda \phi^{(s)} \quad (21)$$

με  $\lambda = \pm \frac{1}{2}$  που αντιστοιχούν στα  $s=1, 2$

$$\lambda = \begin{cases} 1/2 & \text{για θετική ελκτικότητα} \longrightarrow \\ -1/2 & \text{" αρνητική " } \longleftarrow \end{cases}$$

Τα ίδια ισχύουν για τους επιόρους  $\chi^{(s)}$ .

### Ασκήσεις

1) Να δείξετε ότι πράγματι η εξ. Dirac περιγράφει την εσωτερική στροφορμή δηλ. το spin εξετάζοντας τις σχέσεις μετασχηματισμού της  $H$  του Dirac με τους τελεστές

$$(a) \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, (b) \vec{\Sigma}, (c) \vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\Sigma}$$

2) Στο μη σχετικιστικό όριο, για ηλεκτρόνιο με ταχύτητα  $v$  ισχύει ότι  $\frac{|\chi|}{|\phi|} \sim \frac{v}{c}$

(3) Η εψ. Dirac για ένα φορτισμένο ευκτιδιο με φορτιο  $q$  μέσα σε ηημο δυναμικό  $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$  δίνεται από γενίκευση της χαμρτονιακής Dirac σε

$$H = c \vec{\alpha} \cdot \left( \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) + \beta m c^2 + q \Phi \quad (22)$$

Στο μη σχετιωττικό όριο (σε φυσικές μονάδες) παίρνουμε

$$\left( \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - q \vec{A} \right)^2 - \frac{q}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + q \Phi \right) \phi = E_{\text{MΣ}} \phi \quad (23)$$

όπου το μαγνητικό πεδίο  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  και

$$E_{\text{MΣ}} = E - m \quad (\text{για προχωρημένους})$$

Ηπό τη μορφή (23) για ηνετρόνιο ( $q = -e$ ), βλέπουμε ότι μπορούμε να εσχετίσουμε με το ηνετρόνιο εσωτερική (στην) μαγνητική

διπολική ροπή

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{S} \equiv -g \frac{e}{2m} \vec{S} \quad (24)$$

(γενικά ορίζεται  $\vec{\mu} = -g \frac{e}{2m} \vec{L}$ ,  $\vec{L}$  - στροφορμή)

όπου ο γυρομαγνητικός λόγος  $g=2$  και ο  
τελεστής στροφορμής  $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{S}$ .

Πειραματικά  $g=2.000\dots$ . Η πρόβλεψη  
 $g=2$  είναι ένας θρίαμβος της ελ. Dirac.

### Αντιωματίδια

Οι πρώτες δύο λύσεις της ελ. Dirac,

$$\omega^{(1,2)}(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \quad (25)$$

είναι σαφές ότι περιγράφουν ένα ελεύθερο  
ηλεκτρόνιο ενέργειας  $E$  και ορμής  $\vec{p}$ .

Οι δύο λύσεις αρνητικής ενέργειας



$$\omega^{(3,4)} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^{(1,2)} \\ \chi^{(1,2)} \end{pmatrix} \quad (26)$$

για να περιγράψουμε το αντισωματίδιο.

Υπάρχει ακόμα ένα ζεπτό σημείο.

Σύμφωνα με τα επιχειρήματά μας για ψηφίο και ενέργεια, που ήδη αναπτύξαμε, περιμένουμε η απουσία σπιν (πάνω)  $\uparrow$  (κατά μήκος εὐὸς ἄξονα πᾶν ορίζεται στο σύστημα ηρεμίας) να είναι ισοδύναμο με την παρουσία σπιν (κάτω)  $\downarrow$ . Δηλ

Πύσεις αρνητικῆς ἐνέργειας με σπιν  $\downarrow$

$\equiv$  Πύσεις θετικῆς ἐνέργειας με σπιν  $\uparrow$

Γιαυτό προκειμένου να περιγράψουμε

αντισωματιδίο διατέχουμε

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

αντί της επιλογής (17).

Έτσι οι δείκτες  $E, \vec{p}, 1, 2$  στο επάνω (26) αναφέρονται στις φυσικές τιμές αντι-σωματιδίου.

Αξιοσημείωτο είναι ότι κάτω από τις αλλαγές στην ορμή και το spin που κάναμε για να περιγράψουμε το αντισωματιδίο, η εγγυότητα  $\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p}$  παραμένει αναλλοίωτη.

$$p = (E, \vec{p}), \vec{S}, \lambda \quad \equiv \quad -p, -\vec{S}, \text{αλλά } +\lambda$$

υπερδύμνη  $\vec{S} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$

# Αμφία φερμιόνια

## Αριστερόστοφα νετρίνα 2-συνιστάσι

Ας θεωρήσουμε πάλι την ε}. Dirac

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i \vec{a} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi \quad (1)$$

με λύσεις της μορφής

$$\psi = \omega e^{-i p \cdot x} \quad (2)$$

οπότε

$$E \omega = (\vec{a} \cdot \vec{p} + \beta m) \omega \quad (3)$$

Θα επιλέξουμε διαφορετικές αναπαραστάσεις των πινάκων  $\vec{a}$  και  $\beta$

$$\vec{a} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Ορίζοντας όπως πριν

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (9)$$

η εξ. Dirac (3) γίνεται τώρα

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \phi = \frac{E}{|\vec{p}|} \phi - \frac{m}{|\vec{p}|} \chi \quad (10)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi = \frac{-E}{|\vec{p}|} \chi + \frac{m}{|\vec{p}|} \phi \quad (11)$$

όπου  $\hat{p} = \vec{p}/|\vec{p}|$

Στο όριο  $m=0$ , όπου  $E=|\vec{p}|$ , οι  
(10), (11) απλοποιούνται και τα  
 $\phi$  και  $\chi$  είναι ξεχωριστές λύσεις

υποστηρίζουν τον τελεστή ενέργειας

$$\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}, \text{ όπου } \vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (12)$$

δηλαδή

$$\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \phi = + \frac{1}{2} \phi \quad \text{αριστερή κατάσταση} \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi = - \frac{1}{2} \chi \quad \text{δεξιά κατάσταση} \quad (14)$$

Κάθε μία από τις (13), (14) βασι-  
 ζεται στη σχετιστική σχέση  $E^2 = \vec{p}^2$   
 και επομένως έχει μια λύση με θε-  
 τική ενέργεια και μια με αρνητική!

Σε αντιστοιχία με το προηγμένο φως  
 η θετική ερμηνεία συχνά ονομάζεται  
 δεξιόστροφη και η αρνητική αριστε-  
 ρόστροφη.

Προκειμένου να προβάλουμε την αρι-  
 στερόστροφη συνιστώσα ερὸς σπινόρα  
 Dirac, πρέπει να επιλέξουμε τις

αυτά ενισχύει χ με τη δράση  
πάνω στον πίνακα Dirac ερός  
πίνακα - τελεστή της μορφής

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \quad (15)$$

στη ταρινή αναπαράσταση.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να υπεν-  
θυμόμαστε ότι στις ασθενείς αλληλίες  
είναι παρατηρηθεί διαπιστωμένο ότι  
τα λεπτόνια (παρόμοια με τα quarks)  
εμφανίζονται στο φερμιονικό ρεύμα  
σε ένα ειδικό συνδυασμό. Π.χ. για  
το ηλεκτρόνιο και το αντίστοιχο νεutrino  
έχουμε

$$I_{\mu} = \bar{\Psi}_e \gamma_{\mu} \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \Psi_{\nu} \quad (16)$$

Αυτή τη μορφή του αδρονίου ρεύματος την ονομάζουμε V-A μορφή σε αντίθεση με τη μορφή V του η/μ ρεύματος (που περιέχει μόνο το  $\gamma_{\mu}$ ).

Συνοπώς για νετρίνα χωρίς μάζα, ο συνδυασμός

$$\frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \omega_{\nu}(p) \quad (17)$$

περιέχει μόνο την αριστερόστροφη συνιστώσα, η οποία αλληλεπιδρά με το φορτισμένο ρεπτόνιο στις αδρονικές αλληλ/σεις σύμφωνα με την (16).

Αν πάλι καταλήξουμε σε αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας μία εύχρηστη

επιβολή των πινακίδων  $\chi$ , το οποίο  
είναι ένα διάνυσμα στην επιφάνεια

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η (14) περι-  
γράφει ένα νετρίνο χωρίς μάζα. Η  
γύση νετρίνιο ενέργειας έχει  $E = |\vec{p}|$   
και περιγράφει ένα αριστερόστροφο  
νετρίνο (επιμόρφωσης  $-\frac{1}{2}$ ), ενέργειας  $E$   
και ορμής  $\vec{p}$ . Η απομέρυνση γύση θα  
έχει αρνητική ενέργεια  $(-E)$ . Για να  
της δώσουμε φυσική ερμηνεία, ας θεω-  
ρήσουμε μία γύση νετρίνο ενέργειας  
 $-E$  και ορμής  $-\vec{p}$ . Ισανοποιεί την εξ.

$$\hat{\sigma} \cdot (-\hat{p}) \chi = -\chi \quad (18)$$

με δεξιά επιμόρφωση και επομένως

περιγράφει ένα δεξιόστροφο αντισωμα-  
 νιό ( $\lambda = +\frac{1}{2}$ ) ενέργειας  $E$  και ορμής  $\vec{p}$ .  
 Συμβολικά γράψουμε ότι η (14) περιγρά-  
 φει το  $\psi_L$  και το  $\bar{\psi}_R$ . Η άλλη  
 εξίσωση (13) περιγράφει τις καταστά-  
 σεις με την άλλη ελκτικότητα δηλ.  
 $\psi_R$  και  $\bar{\psi}_L$ .

Για να έσμε άμαφο φερμιόνιο έχουμε

$$\begin{aligned}
 \psi &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi + \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi \quad (19) \\
 &\equiv \psi_R + \psi_L
 \end{aligned}$$

Οι παράγοντες

$$P_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5), \quad P_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5) \quad (20)$$

είναι τα ερμηνεύσιμα προβολικά που ικανο-  
 ποιών τις σχέσεις

$$P_R^2 = P_R, \quad P_L^2 = P_L$$

$$P_R \cdot P_L = P_L \cdot P_R = 0 \quad (21)$$

$$P_L + P_R = 1$$

(άσκηση, υπόδειξη: χρησιμοποιήστε  
το γεγονός ότι  $(\gamma_5)^2 = 1$ )

• π.χ. Η αλληλεπίδραση  $\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$  γράφεται

$$(\Psi_R^\dagger + \Psi_L^\dagger) \gamma_0 \gamma_\mu (\Psi_R + \Psi_L)$$

και επειδή το  $(1 \pm \gamma_5)$  μετατίθεται

με το γινόμενο  $(\gamma_0 \gamma_\mu)$  έχουμε

$$\Psi_R^\dagger (\gamma_0 \gamma_\mu) \Psi_R + \Psi_L^\dagger (\gamma_0 \gamma_\mu) \Psi_L$$

$$= \bar{\Psi}_R \gamma_\mu \Psi_R + \bar{\Psi}_L \gamma_\mu \Psi_L$$

δηλ μία παραμετρική αλληλεπίδραση  
διατηρεί την ερμιότητα.

•• Το ίδιο ισχύει και για την αβή-  
στατιστική αλληλεπίδραση  $\bar{\psi} \gamma_5 \psi$   
(αδυναμία)

••• Αντίθετα θα μπορούσαμε  
αλλάξουν την ερμηνεία

$$\bar{\psi} \psi = \bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L \quad (\text{αδυναμία})$$

Chirality ονομάζουμε την ιδιοτιμή  
του  $\gamma_5$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, \quad \bar{\psi}_R = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 - \gamma_5)$$

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi, \quad \bar{\psi}_L = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 + \gamma_5)$$

$$\gamma_5 \psi_R = \psi_R, \quad \bar{\psi}_R \gamma_5 = -\bar{\psi}_R$$

$$\gamma_5 \psi_L = -\psi_L, \quad \bar{\psi}_L \gamma_5 = \bar{\psi}_L$$

# Διακριτές Συμμετρίες

Επιπλέον των συνεγών Lorentz μετασχηματισμών υπάρχουν δυο χωροχρονικές δράσεις που εν δυνάμει είναι συμμετρίες της Ροχοφασίας:

$$P \quad (t, \vec{x}) \rightarrow (t, -\vec{x})$$

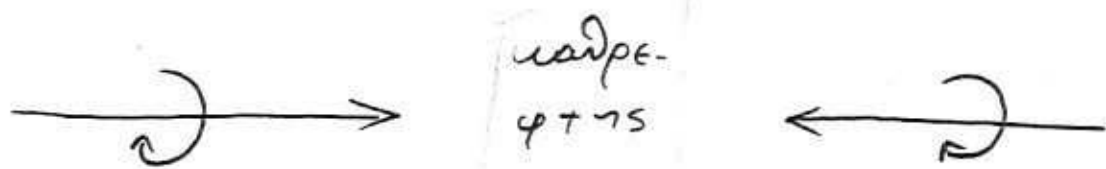
$$T \quad (t, \vec{x}) \rightarrow (-t, \vec{x})$$

- Δεν μπορούν να φτιαχτούν από συνεγούς Lorentz μετασχηματισμούς.
- Διατηρούν το διαότημα Minkowski

$$x^2 = t^2 - \vec{x}^2$$

# Πάριτυ

Ας θυμηθούμε τη δράση των  $P$  πάνω στα πεδία: Ο τελεστής ανταλλάσσει την ορμή προς εσωματιδιακή αψήχοντας αναποίητο το spin.



$$\psi(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} e^{i\phi} \gamma^0 \psi(t, -\vec{x})$$

(άσωση)

$$\Rightarrow \bar{\psi}(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} e^{-i\phi} \bar{\psi}(t, -\vec{x}) \gamma^0$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi &\xrightarrow{P} \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \psi(t, -\vec{x}) \\ &= \begin{cases} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi(t, -\vec{x}), & \mu=0 \\ -\bar{\psi} \gamma^\mu \psi(t, -\vec{x}), & \mu=1,2, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \longrightarrow \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^0 \psi(t, -\vec{x})$$

$$= \begin{cases} -\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi & , \mu = 0 \\ \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi & , \mu = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\bar{\psi} \psi \xrightarrow{P} \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^0 \psi(t, -\vec{x}) = \bar{\psi} \psi(t, -\vec{x})$$

$$i \bar{\psi} \gamma^5 \psi \xrightarrow{P} i \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \psi(t, -\vec{x}) = -i \bar{\psi} \gamma^5 \psi(t, -\vec{x})$$

$$\psi_L = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \psi \xrightarrow{P} e^{i\phi} \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \gamma^0 \psi$$

$$= e^{i\phi} \gamma^0 \psi_R$$