

Ανάπτυξη σε Αρμονικές Συνιστώσες (Σειρές - Ολοκληρώματα Fourier)

Αναφέρθηκε ήδη ότι μια συνάρτηση $f(t)$ μπορεί να παραταθεί εάν υπέρθε-
ση αρμονικών όρων της μορφής

$$D \cos(\omega t + \varphi)$$

με διάφορες συχνότητες ω , φάσεις φ
και πλάτη D . (Στις εξαναγκασμένες τα-
λαντώσεις με τυχαία δύναμη $f(t)$)

Τι σημαίνει υπέρθεση;

α) Η συνάρτηση $f(t)$ είναι περιοδική

$$\text{δηλ. } f(t+T) = f(t) \quad (1)$$

Υπάρχει ένα μαθηματικό θεώρημα, που
λέει ότι αν η περιοδική συνάρτηση $f(t)$
είναι αρκετά ομαλή (π.χ. έχει πεπερασμένη
αριθμό σημείων ασυνέχειας στο διάστημα μίας
περιόδου) τότε μπορεί να παραταθεί με
μια σειρά όρων της μορφής:

$$f(t) = B_0 + D_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + D_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \dots \quad (2)$$

$$= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (2)$$

οπότε $\omega_1 = 2\pi/T$, $\omega_n = n\omega_1$ με $n = 1, 2, 3, \dots$ (3)

Βασικό χαρακτηριστικό της (2) είναι ότι εμφανίζονται μόνο όροι με ακέραιες συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια της βασικής συχνότητας $2\pi/T$.

Αν ονομάσουμε

$$D_n \cos \phi_n \equiv B_n$$

$$-D_n \sin \phi_n \equiv A_n$$

$$\Rightarrow f(t) = B_0 + B_1 \cos\left(\overbrace{\frac{2\pi}{T}}^{\omega_1} t\right) + \dots + B_n \cos\left(n \overbrace{\frac{2\pi}{T}}^{\omega_n} t\right) + \dots$$

$$+ A_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \dots + A_n \sin\left(n \frac{2\pi t}{T}\right) + \dots \quad (5)$$

Αυτή η σειρά ημιτόνων + συνημιτόνων λέγεται ανάπτυγμα κατά Fourier της $f(t)$.

Αν μας δώσει η $f(t)$, βρίσκουμε τους αντίστοιχους συντελεστές A_n, B_n κάνοντας τα εξομνηρώματα:

$$B_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

το t_0 είναι
αυθαίρετο

(3)

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad (6)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

Τα B_n, A_n βρίσκονται αν αντικαταστήσω
με την $f(t)$ με τη σειρά (5) και λά-
βουμε τις ομοιομρφίες όρο με όρο παίρνουμε
την όση μας:

$$\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \cos\left(n' \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \delta_{nn'}$$

$$\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \cos\left(n' \frac{2\pi}{T} t\right) dt = 0 \quad (7)$$

$$\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \sin\left(n' \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \delta_{nn'}$$

• Αν $f(-t) = f(t)$ δηλ. $f(t)$ άρτια

⇒ $f(t)$ έχει μόνο cos όρους

• Αν $f(-t) = -f(t)$ δηλ. $f(t)$ περιττή

⇒ $f(t)$ έχει μόνο sin όρους

(7)

Η μαθηματική ανάλυση δεν μπορεί να διακρίνει τη μεταβλητή $\theta = \omega, t$ από τη μεταβλητή $\theta = \kappa, z$ με $\kappa_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$

⇒ Έτσι οι τύποι (6) δίνουν κατευθείαν και τους συντελεστές μιας οποιαδήποτε περιοδικής συνάρτησης $f(z)$ με περίοδο λ_1 .

$$f(z) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n \kappa_1 z) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n \kappa_1 z) \quad (8)$$

με
$$B_0 = \frac{1}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1 + \lambda_1} f(z) dz$$

$$B_n = \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1 + \lambda_1} f(z) \cos(n \kappa_1 z) dz \quad (9)$$

$$A_n = \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1 + \lambda_1} f(z) \sin(n \kappa_1 z) dz$$

Το z_1 είναι μία οποιαδήποτε τιμή του z .

Σημειώσεις:

Στή περίπτωση της χορδής με σταθερά άκρα βρήκαμε

$$\psi(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n \frac{\pi z}{L}\right) \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (10)$$

Ας θεωρήσουμε ένα φωτογραφικό στιχμιότυπο κάποια χρονική στιγμή t_0 . Τότε η απομάκρυνση της χορδής είναι:

$$\begin{aligned} \psi(z, t_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n \cos(\omega_n t_0 + \phi_n)}_{B_n} \sin\left(n \frac{\pi z}{L}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(n \frac{\pi z}{L}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

Δηλ. Ανάλυση Fourier στο χώρο

Ας θεωρήσουμε τώρα μία ιδιαίτερη τιμή του z , z_1 . Τότε η απομάκρυνση τη χορδής στο σημείο z_1 είναι θα συνάρτηση του χρόνου:

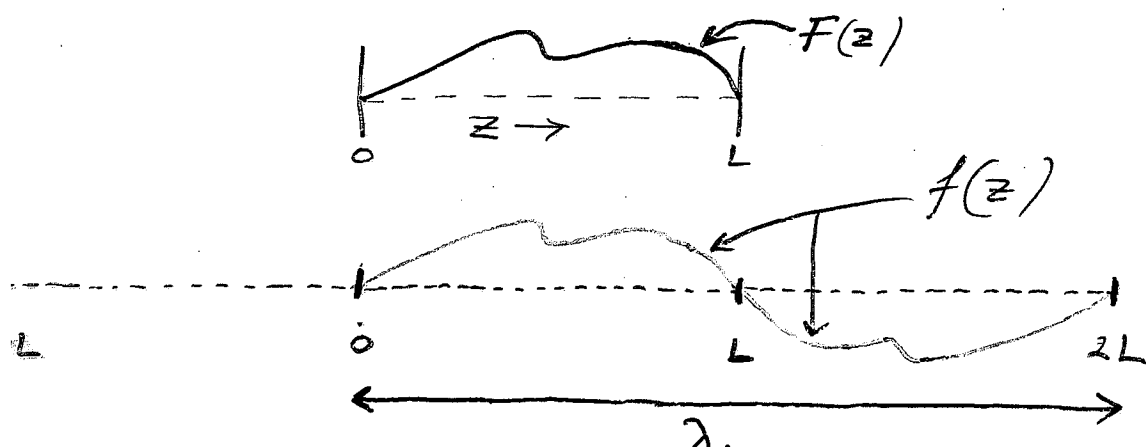
$$\begin{aligned} \psi(z_1, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n \sin\left(n \frac{\pi z_1}{L}\right)}_{C_n} \cos(\omega_n t + \phi_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \end{aligned} \quad (12)$$

Αντι Ανάλυση Fourier στο χρόνο

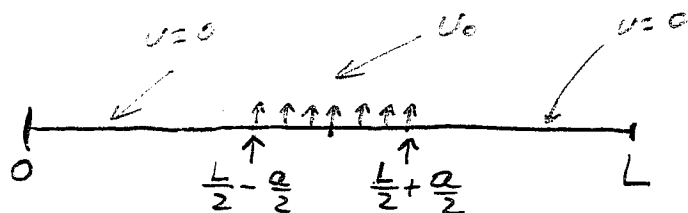
Παρατηρούμε διαφορές στις (11) και (12)

Όχι μόνο η μία είναι ημιτονοειδής και η
άλλη ευημιτονοειδής αλλά αν παύσουμε
στο διάστημα των μεταβλητών το $\eta \frac{\pi z}{L}$
αλλάζει κατά αιεραίο πολλαπλό του π
ενώ το πz αλλάζει κατά αιεραίο πολλαπλό
του 2π

Ετσι για να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους
(8) και (9) αν μας δώσει μια συνάρτηση $F(z)$,
που ορίζεται μόνο μεταξύ $z=0$ και $z=L$
(και μηδενίζεται ε' αυτές τις θέσεις) και περι-
γράφει κάποιο σχηματικό ms γορδής
κατασκευάσουμε μία περιοδική συνάρτηση
 $f(z)$ που έχει το ίδιο ανάπτυγμα Fourier
με τη $F(z)$ στο διάστημα $0 - L$.



Ήρωνα: Χορδή με μηδενική αρχική απομάκρυνση
αλλά με αρχική ταχύτητα (αυτή 6)



$$\frac{L, T, \rho, u_0, a}{\psi(z, t);}$$

Η γενική λύση χορδής με σταθερά άκρα:

$$\psi(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n \frac{\pi z}{L}\right) \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (1)$$

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$$

$$\omega_n = v k_n = n v k_1 = n \frac{\pi v}{L} = n \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

↑
συχνότητες κανονικών τρόπων
ταλάντωσης

$$\text{Συνοριακές συνθήκες: } \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 \quad (2)$$

(Έχον ήδη χρησιμοποιήσει την (1)). Ας θυμηθούμε
ότι από εξίσωση χορδής

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

αναζητώντας ελεύθερες ταλαντώσεις $\psi = A(z) \cos(\omega t + \phi)$

$$\Rightarrow \frac{d^2 A(z)}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} A(z) \quad \text{με λύση } A(z) = A \sin\left(\underbrace{kz + \beta}_{\omega/v}\right)$$

Οι συνοριακές συνθήκες δίνουν $\beta = 0$ και $k \cdot L = n\pi$
 $\Rightarrow k = n \frac{\pi}{L}$

Αρχικές συνθήκες:

$$t=0$$

$$\psi(z, 0) = 0$$

$$\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \begin{cases} v_0 & \text{αν } z \in \overbrace{\left(\frac{L}{2} - \frac{a}{2}, \frac{L}{2} + \frac{a}{2}\right)}^{\delta} \\ 0 & \text{για τα υπόλοιπα } z. \end{cases} \quad (3)$$

$$\Rightarrow A_n \cos \phi_n = \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_0}^{z_0 + \lambda_1} f(z) \sin(n \kappa_1 z) dz = 0$$

$$\leadsto \cos \phi_n = 0, \quad \phi_n = \frac{\pi}{2}$$

Άρα

$$\Rightarrow \psi(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi n z}{\lambda_1}\right) \cos\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \sin\left(\frac{2\pi n z}{\lambda_1}\right) = \begin{cases} v_0 & \text{αν } z \in \delta \\ 0 & \text{αν } z \notin \delta \end{cases} \quad (5)$$

Οι $A_n \omega_n$ είναι οι συντελεστές Fourier της σειράς (5) στην οποία αναπτύσσεται η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \text{ ως αρχικές ταχύτητας (} f(z) \text{-περίοδος)}$$

Άρα θα δίνονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} -A_n \omega_n &= \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_0}^{z_0 + \lambda_1} f(z) \sin(n \kappa_1 z) dz \\ &= \frac{2 v_0}{\lambda_1} \int_{\frac{L}{2} - \frac{a}{2}}^{\frac{L}{2} + \frac{a}{2}} \sin(n \kappa_1 z) dz \end{aligned}$$

(9)

$$\Rightarrow A_n = -\frac{4 U_0}{\lambda_1 \omega_n} \underbrace{\frac{\lambda_1}{n(2\pi)}}_{K_1} \left\{ \cos \left[\frac{n\pi}{\lambda_1} (L + \alpha) \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{\lambda_1} (L - \alpha) \right] \right\}$$

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{4 U_0 L}{\pi^2 n^2} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \left\{ \cos \left[\frac{n\pi}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{L} \right) \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{L} \right) \right] \right\}$$

uoi

$$\psi(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4 U_0 L}{\pi^2 n^2} \right) \sqrt{\frac{\rho}{T}} \left\{ \cos \left[\frac{n\pi}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{L} \right) \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{L} \right) \right] \right\}$$

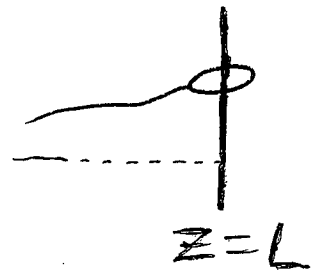
$$\sin \left(\frac{2\pi n z}{\lambda_1} \right) \cdot \cos \left(\omega_n t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Υποδείξεις για τις αβιήσεις

Άλλες οριακές συνθήκες:

π.χ. Ελεύθερο άκρο

(άσκηση 2.29 Berkeley)



$z=L$

Η υγία της χορδής ϕ ένα ελεύθερο άκρο είναι κάθε χρονική στιγμή ίση με μηδέν.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{στο } z=L$$

Γίνεται κατανοητό αν κοιτάξουμε τη διαφορική εξίσωση της χορδής (2^{ος} Νόμος Νεύτωνα).

$$\rho \Delta z \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \approx - \underbrace{T \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_z + T \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{z+\Delta z}}_{\text{επιστρέφοντα δύναμη}}$$

$$\text{Έτσι μηδενική δύναμη} \leadsto \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{z=L} = 0$$

η-ελαστικότητα με $\kappa \neq 0$ (ή χορδή με $u \neq 0$
στο συνεχές)

$$m \frac{d^2 \psi_6}{dt^2} = -T \frac{\psi_6 - \psi_{6-1}}{a} - T \frac{\psi_6 - \psi_{6+1}}{a} - \kappa \psi_6$$

ο συνεχές
όριο $\rightarrow$

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - u \psi$$

$\uparrow$ m/a $\uparrow$ κ/a

Αναζητούμε $\psi = A(z) \cos(\omega t + \phi)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \cos(\omega t + \phi) A(z)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \cos(\omega t + \phi) \frac{d^2 A(z)}{dz^2}$$

$$\Rightarrow -\rho \omega^2 \cos(\omega t + \phi) A(z) = T \cos(\omega t + \phi) \frac{d^2 A(z)}{dz^2} - u A(z) \cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 A(z)}{dz^2} = - \underbrace{\left(\frac{\rho \omega^2}{T} - \frac{u}{T} \right)}_{K^2} A(z)$$

$$\Rightarrow A(z) = C \sin(\kappa z + \phi)$$

οπότε $\kappa^2 = \frac{\rho \omega^2}{T} - \frac{u}{T}$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{u}{\rho} + \frac{T}{\rho} \kappa^2}$$

Σχέση διασποράς

Τι θα γίνει αν διεξάγουμε εσωτερικά
με $\omega < \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$;

Τότε βέβαια θα έχουμε

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = \overbrace{\left(\frac{\mu}{T} - \frac{\rho}{T} \omega^2 \right)}^{1^0} A(z)$$

μ
 k^2

$$\Rightarrow (C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\mu \quad k = \sqrt{\frac{\mu}{T} - \frac{\rho}{T} \omega^2} = \sqrt{\left(\frac{\mu}{\rho} \right) - \omega^2} \sqrt{\frac{\rho}{T}}$$

or $\frac{k/\alpha}{m/\alpha} = \omega_0^2$

(13)

6) Η δεύτερη περίπτωση αφορά συναρτήσεις $f(t)$ που ορίζονται για $-\infty < t < +\infty$ αλλά δεν είναι περιοδικές.

Η περίπτωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί σαν οριακή περίπτωση της προηγούμενης στο όριο $T \rightarrow \infty$.

Πραγματικά στο διάστημα $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ μπορούμε να παραστήσουμε τη (μη περιοδική) $f(t)$ με βειρά και οι συντελεστές A_n, B_n δίνονται από τους γενικούς τύπους με $t_0 = -\frac{T}{2}$.

Φυσικά έτσι η βειρά δεν θα παριστάνει την $f(t)$ έξω από το διάστημα $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, αλλά αν πάρουμε το όριο $T \rightarrow \infty$ θα έχουμε μια έκφραση για την $f(t)$, που θα ισχύει σε όλο το πραγματικό άξονα.

Για να βρούμε σε τι μετατρέπεται η βειρά

$$f(t) = B_0 + B_1 \cos(\omega_1 t) + \dots + B_n \cos(n \omega_1 t) + \dots \\ + A_1 \sin(\omega_1 t) + \dots + A_n \sin(n \omega_1 t) + \dots$$

για $T \rightarrow \infty$, παρατηρούμε ότι η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών συχνοτήτων

$$\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

Έτσι περιμένουμε ότι για $T = \infty$ έχουμε ένα συνεχές φάσμα συχνοτήτων από $\omega = 0 - \infty$ και έτσι η σειρά Fourier μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα.

Πραγματικά αν βάζουμε

$$A_n = \frac{\Delta\omega}{\pi} \left[\begin{matrix} B(\omega_n) \\ A(\omega_n) \end{matrix} \right] \xrightarrow{\text{συνεχής}}$$

η σειρά γράφεται:

$$f(t) = \frac{\Delta\omega}{\pi} B_0 + \frac{1}{\pi} \sum_n B(\omega_n) \cos(\omega_n t) \Delta\omega + \frac{1}{\pi} \sum_n A(\omega_n) \sin(\omega_n t) \Delta\omega$$

$$-T/2 < t < T/2$$

Για $T \rightarrow \infty$ δηλ. $\Delta\omega \rightarrow 0$ τα αθροίσματα τείνουν στα αντίστοιχα ολοκληρώματα:

$$\rightarrow f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty B(\omega) \cos(\omega t) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A(\omega) \sin(\omega t) d\omega$$

$$-\infty < t < +\infty$$

Με δεδομένη την $f(t)$ τις συναρτήσεις $B(\omega), A(\omega)$
 τις παίρνουμε από τις σχέσεις που είχαμε φέρει

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$$

Γάfortas

$$t_0 = -\frac{T}{2}, \quad n \left(\frac{2\pi}{T} \right) = \omega, \quad B_n = \frac{\Delta\omega}{\pi} B(\omega_n) = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{\pi} B(\omega)$$

$$A_n = \frac{2}{T} A(\omega)$$

$$\left. \begin{matrix} T \\ 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} \frac{1}{2} T \\ -\frac{1}{2} T \end{matrix} \right\}$$

$$\frac{2}{\pi} B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(\omega t) dt$$

Ολοκληρώματα

Fourier

$$\rightarrow \frac{2}{\pi} A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(\omega t) dt$$

και παίρνοντας το όριο $T \rightarrow \infty$.

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

(16)

Βέβαια για να συζήτουμε τα σπουδαία
 πρέπει η $f(t)$ να έχει περιορισμούς. Μια ικανή
 συνθήκη για τη σύγκλιση των σπουδαίων
 είναι να συζήσει το σπουδαίο των $|f(t)|$ δηλ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Σημειώνουμε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις
 οι σειρές + σπουδαία Fourier είναι πιο
 βολικό να γράφονται με τη βοήθεια των
 $e^{\pm i\omega t}$ αντί των $\cos \omega t$ και $\sin \omega t$

Η ευδετική μορφή της σειράς Fourier είναι

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t}$$

↑
μικαδισοί

όπου

άσκηση

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

$$\omega_n = n \frac{2\pi}{T}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Αντίστοιχα η ευδετική μορφή των σπουδ/των four.

$$f(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

όπου

άσκηση

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

(17)

Μία δοσμένη περιοδική συνάρτηση $f(z)$ μπορεί να αναπτυχθεί ή ως προς $\sin + \cos$ ή ως προς $e^{\pm i\omega z}$

Άσκηση: Να δείχτεί ότι η αντιστοιχία μεταξύ των συντελεστών B_n, A_n και των C_n είναι

$$C_0 = B_0$$

$$C_{\pm n} = \frac{B_n \mp i A_n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Απόμα να δείχτεί ότι η αντιστοιχία μεταξύ των συναρτήσεων $B(\omega), A(\omega)$ και της $C(\omega)$ είναι

$$C(\pm\omega) = B(\omega) \mp i A(\omega) \quad \text{για } \omega > 0$$

• Όπως είχαμε παρατηρήσει ξανά η μαθηματική ανάγκη δεν διακρίνει τη μεταβλητή $\theta = \omega t$ από τη $\theta = k z$ έτσι αν θέσουμε να αναλύσουμε μια (μη περιοδική) συνάρτηση χωρικά κατά Fourier:

$$f(z) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{i k z} dk$$

όπου

$$C(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i k z} dz$$

(Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν προφανώς για τις μη ευθετικές μορφές)

Παραδείγματα Ομοιοτήτων Fourier ⁽¹⁾

Βρήκαμε ότι

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \cos(\omega t) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \sin(\omega t) d\omega$$

Για δοσμένη $\psi(t)$ οι συναρτήσεις $A(\omega)$, $B(\omega)$ είναι

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \cos(\omega t) dt$$

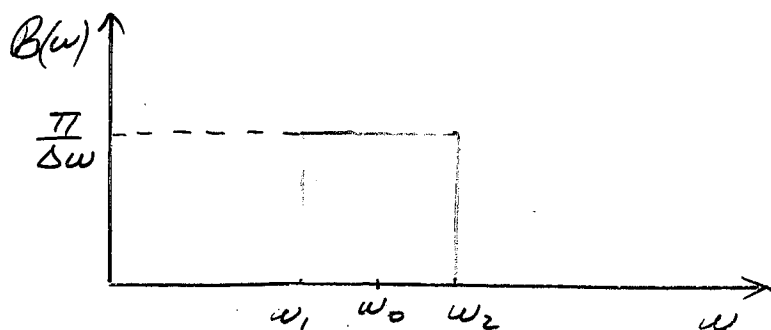
$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \sin(\omega t) dt$$

Παράδειγμα: Τετραγωνικό φάσμα συχνοτήτων

$$B(\omega) = \frac{\pi}{\Delta\omega} \quad \text{για} \quad \omega_1 < \omega < \omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$$

$$B(\omega) = 0 \quad \text{για} \quad \omega < \omega_1, \quad \omega > \omega_2$$

$$A(\omega) = 0 \quad \forall \omega$$



$$\begin{aligned} \leadsto \psi(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \cos(\omega t) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \sin(\omega t) d\omega \\ &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\Delta\omega} \cos(\omega t) d\omega = \frac{1}{\Delta\omega} \frac{\sin(\omega t)}{t} \Big|_{\omega_1}^{\omega_2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi(t) = \frac{\sin(\omega_2 t) - \sin(\omega_1 t)}{(\Delta\omega)t}$$

$$\sin a \pm \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a \pm b) \cdot \cos \frac{1}{2}(a \mp b)$$

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) \quad , \quad \frac{1}{2} \Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \omega_0 + \frac{1}{2} \Delta\omega \quad , \quad \omega_1 = \omega_0 - \frac{1}{2} \Delta\omega$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \psi(t) &= \frac{\sin[(\omega_0 + \frac{1}{2} \Delta\omega)t] - \sin[(\omega_0 - \frac{1}{2} \Delta\omega)t]}{(\Delta\omega)t} \\ &= \underbrace{\frac{\sin(\frac{1}{2} \Delta\omega \cdot t)}{\frac{1}{2} \Delta\omega \cdot t}}_{A(t)} \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

Η $A(t) = 0$ για $t = \pm \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ άρα η διάρκεια

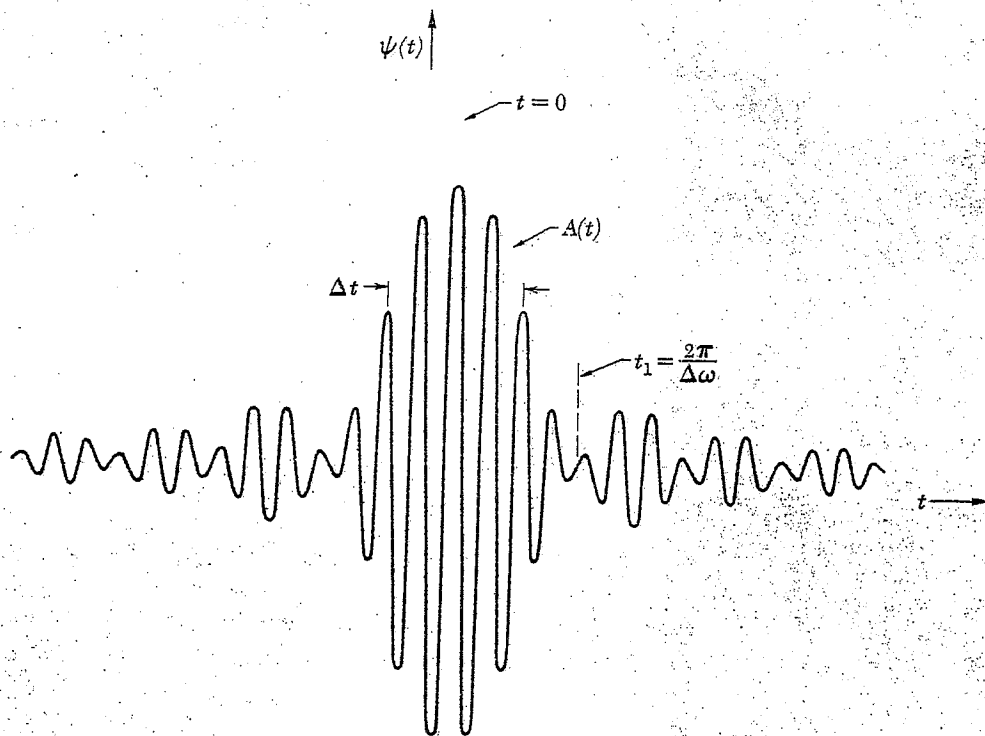
του παλμού είναι:

$$\Delta t = 2 \cdot \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad \text{πολύ μεγάλο}$$

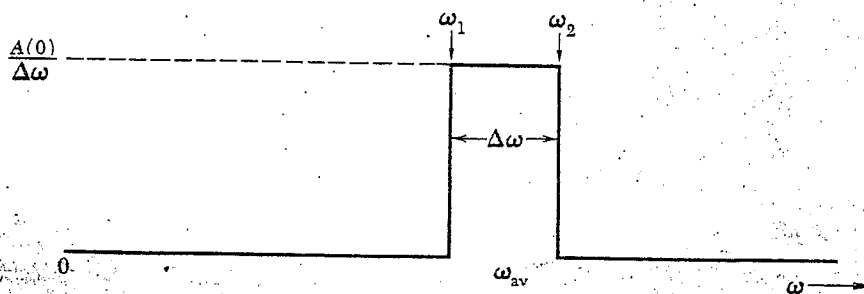
Πιο ροζιμό:

$$\begin{aligned} \Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad & \text{Το πρώτος της } \psi(t) \text{ ποτέ δεν} \\ & \text{θα ξαναγίνει 0.} \\ & A\left(\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right) = A(0) \frac{1}{\pi/2} \approx \frac{2}{3} A(0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega \cdot \Delta t \approx 2\pi$$



(a)

 $B(\omega)$


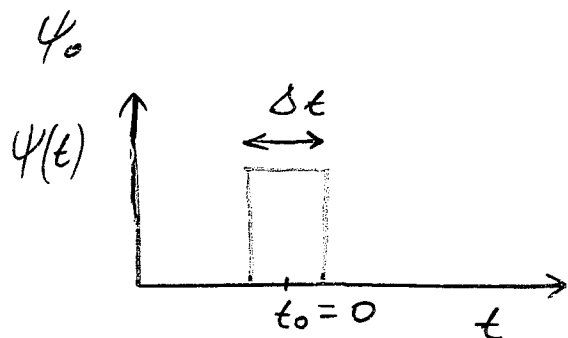
(b)

Σχ. 6.6. Ανάλυση Fourier μιας μη περιοδικής συνάρτησης. (α) Παλμός $\psi(t)$ ο οποίος αντιστοιχεί στις 'Εξ. (57) και (58). (β) Συνεχές φάσμα συχνότητας των συντελεστών Fourier όπως δίνονται από την 'Εξ. (63). ('Επειδή ο παλμός $\psi(t)$ είναι άρτια συνάρτηση του t , ο συντελεστής Fourier $A(\omega)$ είναι μηδέν για όλα τα ω .)

Παραδειγμα: Τετραγωνικός παλμός στο χρόνο (5)

Ας θεωρήσουμε μία αντίστροφη περίπτωση:

Ένα παλμό διάρκειας Δt και σταθερού πλάτους



$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t < -\frac{1}{2} \Delta t \\ 1/\Delta t & \text{" } -\frac{1}{2} \Delta t < t < \frac{1}{2} \Delta t \\ 0 & \text{" } t > \frac{1}{2} \Delta t \end{cases}$$

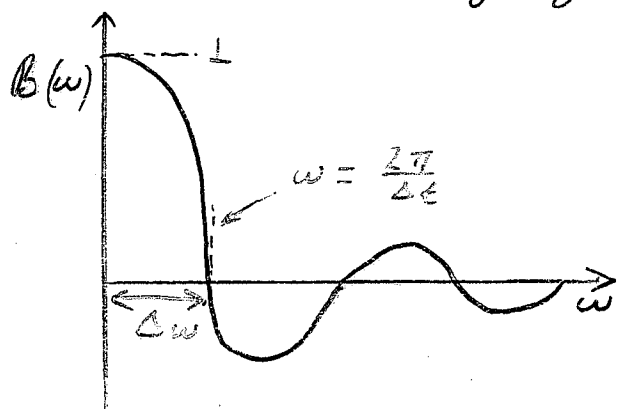
$$\psi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \cos(\omega t) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \sin(\omega t) d\omega$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \cos(\omega t) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{1}{2} \Delta t}^{\frac{1}{2} \Delta t} \cos(\omega t) dt$$

$$= 2 \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\frac{1}{2} \Delta t} \cos(\omega t) dt = \frac{2}{\Delta t} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \Big|_0^{\frac{1}{2} \Delta t}$$

$$\rightarrow B(\omega) = \frac{2}{\omega \cdot \Delta t} \sin\left(\frac{1}{2} \omega \Delta t\right) = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2} \cdot \Delta t\right)}{\frac{\omega}{2} \Delta t}$$

ενώ $A(\omega) = 0$ ομοιόγραμμα άρτιας συνάρτησης



$$\rightarrow \Delta \omega \Delta t = 2 \pi$$

(7)

Ηρώδης Fourier οδευότος υψματοποιέτον.

~~~~~

Μιζήσαμε πριν για αναγωγή Fourier μιας συνάρτησης του χρόνου. Πιο παλιά είχαμε μιζήσει για γωρινή αναγωγή Fourier όταν περιγράφαμε τη κίνηση μίας χορδής με σταθερά άκρα.

Τα αποτελέσματά μας μπορούν να γενικευτούν έτσι που να περιλάβουν (μη περιοδικούς) παλμούς που εξελίσσονται γωρινά και χρονικά.

Υποθέτουμε ότι ένας πομπός, στη θέση  $z=0$ , διεγείρει κάποιο ανοικτό μονοδιάστατο συνεχές μέσο, έτσι ώστε η υψματική συνάρτηση  $\psi(z,t)$  για  $z=0$  λάχει μία ορισμένη μορφή:

$$\psi(0,t) = f(t)$$

Η  $f(t)$  δράφεται σαν υπέρδεση

$$\psi(0,t) = f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega [B(\omega) \cos \omega t + A(\omega) \sin \omega t]$$

Κάθε όρος της υπέρδεσης διαδίδεται σαν αρμονικό κύμα με ταχύτητα φάσης:

$$v_{\psi} = \frac{\omega}{k(\omega)} \leftarrow \begin{array}{l} \text{συνάρτηση} \\ \text{γενικά} \end{array}$$

που είναι γενικά διαφορετική για κάθε ανι-  
στάδα. Το ορθό οδόν κύμα είναι υπέρθεση  
όλων των οδόντων κυμάτων.

$$\omega t \longrightarrow \omega t - k(\omega) z$$

$$\Rightarrow \psi(z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \left\{ B(\omega) \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v_p(\omega)} \right) \right] + A(\omega) \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v_p(\omega)} \right) \right] \right\}$$

Είναι φανερό ότι ο παλμός γενικά δε διατη-  
ρεί το σχήμα του. Αν  $v_p = \text{const}$ , τότε όλες οι  
αρμονικές συστατικές διαδίδονται με την ίδια ταχύ-  
τητα και ο παλμός διατηρεί το σχήμα του.

Με τι ταχύτητα τρέχει το κυματοπακέτο;

Θα μπορούσαμε να κάνουμε και γενική  
ανάπτυξη Fourier

$$\psi(z, 0) = \psi_0 e^{-z^2/L^2} \cos(k_0 z)$$

$$\stackrel{\text{άσκηση}}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{4} L \psi_0 \int_0^{\infty} e^{-(k-k_0)^2 L^2/4} \cos(k z) dk$$

αρτιωδιστύτητας

$$\cos(k z) \longrightarrow \cos(\omega(k) t - k z)$$

$$\Rightarrow \psi(z, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} L \psi_0 \int_0^{\infty} e^{-(k-k_0)^2 L^2/4} \cos(\omega t - k z) dk$$

Πράγματι ικανοποιεί τη κυμ. εξ.  $\forall k$

## Παρατηρήσεις

- Επειδή τα  $\omega, k$  συνδέονται μέσα από τη σχέση διασποράς  $k(\omega)$ , η ύπαρξη χαρακτηριστικών εύρους  $\Delta\omega$  στις συχνότητες του παλμού που εκπέμπεται εξυπακούει την ύπαρξη αντίστοιχου εύρους  $\Delta k$  χωρητηρικών

$$\Delta k = \left( \frac{dk}{d\omega} \right) \Delta\omega = \frac{\Delta\omega}{v_g}$$

Επίσης η σχέση

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \simeq 2\pi$$

στον παλμό που εκπέμπεται οδηγεί στην ύπαρξη αντίστοιχου χαρακτηριστικού μήκους  $\Delta z$  στο χωροπαιέτο

$$\Delta z \simeq v_g \cdot \Delta t$$

$$\rightarrow \Delta k \cdot \Delta z \simeq \Delta \omega \cdot \Delta t \simeq 2\pi$$

- Το χαρακτηριστικό μήκος  $\Delta z$  ενός ημιτοπακέτου δεν παραμένει σταθερό καθώς αυτό διαδίδεται σ' ένα μέσο που παρουσιάζει διασπορά. Το ημιτοπακέτο απλώνει καθώς προχωράει.

Ο λόγος είναι ότι η  $v_g = d\omega/dk$  εξαρτάται από το  $k$  (ή το  $\omega$ ). Επομένως το εύρος  $\Delta k$  αντιστοιχεί σε εύρος ταχυτήτων ομάδας  $\Delta v_g$

$$\Delta v_g = \left( \frac{dv_g}{dk} \right)_0 \Delta k = \left( \frac{d\omega}{dk^2} \right)_0 \Delta k$$

Μια ομάδα ημιόντων με εύρος  $(\Delta z)_0$  για  $t=0$  μετά χρόνο  $t$  θα έχει εύρος  $(\Delta z)_t$ ,

$$(\Delta z)_t \simeq (\Delta z)_0 + (\Delta v_g) t$$

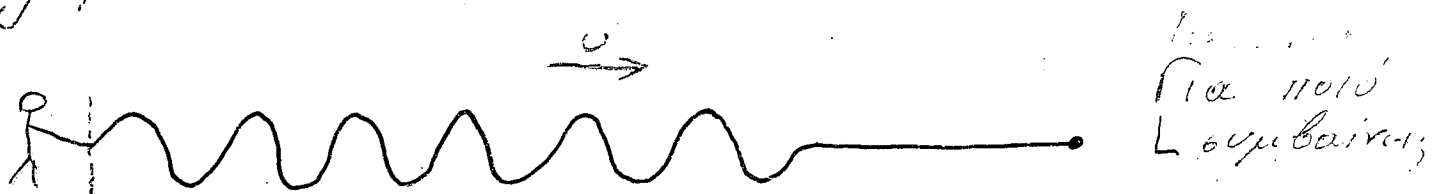
Έτσι  $\Delta k \cdot \Delta z \simeq \Delta \omega \cdot \Delta t > 2\pi$  για  $t > 0$

(1)

Κατασκευές καταστάσεις και οδεύοντα κύματα

~~~~~

- Για να φτιάξουμε μια ιδιαίτερη κατασκευή κατάστασης από μία τεταμένη χορδή, θα πρέπει να φτιάξουμε ένα «καρούπι» στο μέγιστο πλάτος της και να προσαρμόσουμε τη χορδή σε αυτό. Έπειτα μία απότομη απομάκρυνση αυτού του «συνδέσμου» από τη χορδή οδηγεί σε ταλάντωση σε αυτή τη κατάσταση μόνο.
- Αλλά θα μπορούσε κάποιος να φτιάξει αυτή τη κατάσταση ταλαντώντας το ένα άκρο της πάνω κάτω σε αρμονική κίνηση στη συχνότητα που θέλουμε



Τι γίνεται πραγματικά σε αυτή τη περίπτωση? Ένα οδεύον κύμα αρχίζει να κινείται κατά μήκος της χορδής. Όταν το κύμα φθάσει στο στερεωμένο άκρο ($z=L$) γίνεται ανάκλαση

και η κίνηση σε κάθε σημείο της χορδής⁽²⁾
είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει από δύο
αντίθετα οδεύουσες διαταραχές. Και αφού το
αταυρώμενο κύμα φθάσει στο πρώτο άκρο θα
ανακλωθεί ένα στάσιμο κύμα που είναι
η μακρινή κατάσταση που θέλουμε.

Έπειτα κάθε σημείο συνεχίζει να ταλαντώ-
νεται με τρόπο χαρακτηριστικό της μακρινής
κατάστασης (π.χ. αιχμηρά κορυφικά σημεία)

Τέλος αφού φτιαχτεί η μακρινή κατάσταση
και έχει δοθεί η απαραίτητη ενέργεια το άκρο
 $z=0$ κρατιέται σταθερό.

$$\psi_n(z, t) = A_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} z\right) \cos \omega_n t \quad (1)$$

όπου

$$\omega_n = \frac{n \pi}{L} \left(\frac{T}{\rho} \right)^{1/2}, \quad T: \text{τάση} \quad (2)$$

ρ : γραμ. πυκν.
 n : ακεραίος

$$\sin(\theta + \phi) + \sin(\theta - \phi) = 2 \sin \theta \cos \phi$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \phi = \frac{1}{2} [\sin(\theta + \phi) + \sin(\theta - \phi)]$$

Εφαρμόζοντας αυτό το αποτέλεσμα στην (1) έχουμε

$$\sin\left(\frac{n\pi}{L} z\right) \cos \omega_n t = \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{L} z - \omega_n t\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L} z + \omega_n t\right) \right]$$

Επομένως η η-κατοική κατάσταση των ελαστικών ταλαντώσεων ως προς είναι:

$$\psi_n(z, t) = \frac{1}{2} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} z - \omega_n t\right) + \frac{1}{2} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} z + \omega_n t\right) \quad (3)$$

και χρησιμοποιώντας την (2) για τα ω_n

$$\psi_n(z, t) = \frac{1}{2} A_n \sin\left[\frac{n\pi}{L} \left(z - \sqrt{\frac{T}{\rho}} t\right)\right] + \frac{1}{2} A_n \sin\left[\frac{n\pi}{L} \left(z + \sqrt{\frac{T}{\rho}} t\right)\right] \quad (4)$$

$$\text{Θυμίζουμε ότι } v = \left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2} \quad (5)$$

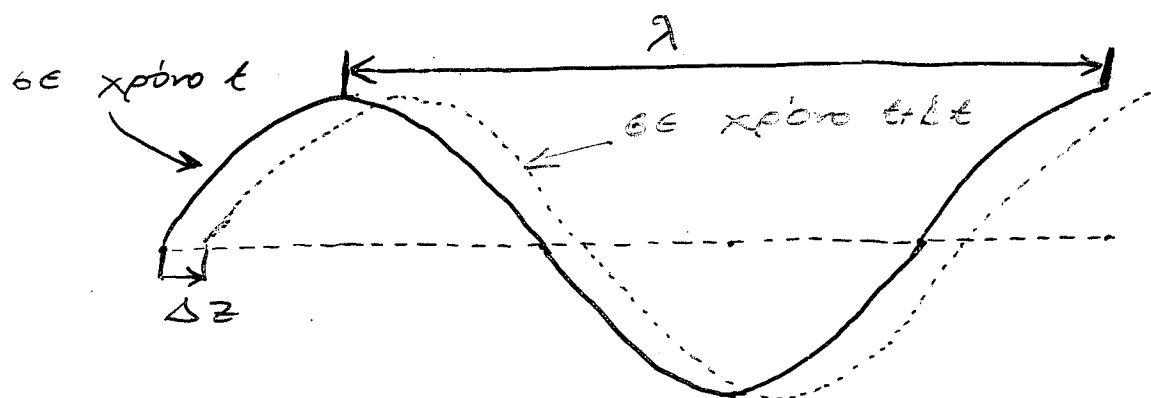
Θα δείξουμε ότι η (4) είναι η μαθηματική περιγραφή δύο οδεύοντων κυμάτων σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Ας συγκεντρωθούμε στο πρώτο όρο:

$$\psi(z, t) = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - vt)\right] \quad (6)$$

$$\text{όπου } \lambda = 2L/n$$

Ας φανταστούμε ένα «φωτογραφικό» επιχημίδιο



λ : μήκος κύματος της ιδιαίτερης διαταραχής

Ας θεωρήσουμε μια τιμή του ψ που αντιστοιχεί σε κάποιες τιμές του z και του t .

Που βρίσκουμε τις ίδιες τιμές του ψ σε μία αργότερη στιγμή $t + \Delta t$; Αν η κατάλληλη θέση είναι $z + \Delta z$, πρέπει να έχουμε

$$\psi(z, t) = \psi(z + \Delta z, t + \Delta t)$$

Επομένως

$$\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - vt)\right] = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}[(z + \Delta z) - v(t + \Delta t)]\right)$$

$$\Rightarrow \Delta z - v \Delta t = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta t} = v$$

Που σημαίνει ότι το κύμα θα εύρογο κινείται στη δεξιά κατεύθυνση με ταχύτητα v .

Με τον ίδιο τρόπο, βλέπουμε ότι ο δεύτερος όρος στη (4) περιγράφει ένα κύμα, ίδιου μήκους κύματος που ταξιδεύει στην αρνητική z διεύθυνση με ταχύτητα v .

• Το στάσιμο κύμα εμφανίζεται λόγω αλληλεπίδρασης δύο κυμάτων με την υπέρθεση αυτών των δύο αντίθετα υποκείμενων κυμάτων τον ίδιο μήκος κύματος και φάσης.

• Η κοπή που περιγράφεται από την (6) και η άλλη με το $(z+vt)$ στην ημιτονοειδή συνάρτηση παριστάνουν ημιτονοειδή κύματα με άπειρη επιταγή.

Αλλά το σύστημά μας είχε μήκος L .

Όσο αφορά τις συνθήκες μεταξύ $0 - L$, η περιγραφή με άπειρα κύματα είναι σωστή.

Η κανονική περιγραφή της ταλαντούμενης χορδής y :

$$-\infty \leq z < 0 : \psi(z, t) = 0$$

$$0 \leq z \leq L : \psi(z, t) = A \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos(\omega_n t)$$

$$L \leq z \leq \infty : \psi(z, t) = 0$$

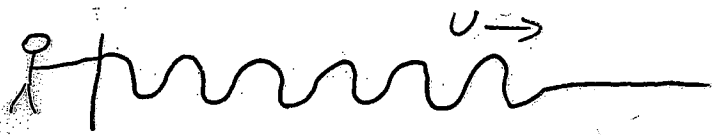
Οδύοντα κύματα σε 1-διάσταση

~ ~ ~ ~ ~

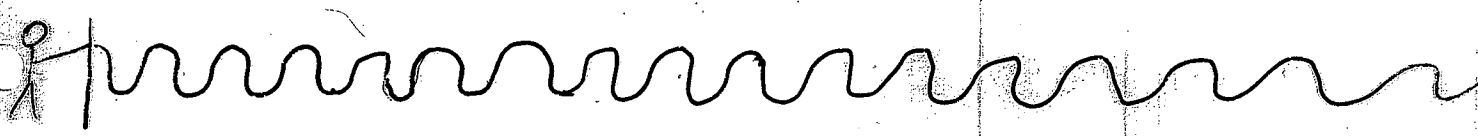
Είδαμε πως μία μαθητική κατάσταση περιγράφεται σαν συνδυασμός αντιθέτων οδύοντων κυμάτων.

Γιατί να μην υποθέσουμε ότι μία μεγάλη χορδή μπορεί να φτιάξει ένα ημιτονοειδές κύμα που ταξιδεύει σε μία κατεύθυνση μόνο;

Ξεχωριστά όπως πριν



Αλλά το στερεωμένο άκρο που μαυριό



έπεται από έναν αρμό κύμων ταξάντωσης το μέγεθος της διατάραξης έξω από την ειότητα

Η περιγραφή του τι συμβαίνει δεξιά των $z=0$

$$\psi(z,t) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - vt) \right]$$

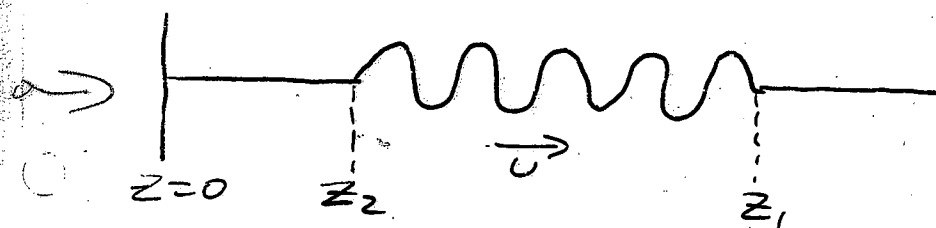
και είναι αποτέλεσμα της ταξάντωσης στο $z=0$

$$\psi(0,t) = -A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} t \right) = -A \sin(\omega t)$$

(7)
Η εμφάνιση της χορδής σε κάθε το δίνεται:

$$\psi(z, t_0) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - vt_0) \right] = A \sin \left(\frac{\pi}{L} z - \phi_0 \right)$$

- Αν η χορδή στο $z=0$ ήταν σε ηρεμία μέχρι $t=t_1$, ταλαντούσα ημιτονοειδώς από $t=t_1$ μέχρι $t=t_2$ και κρατιόταν αμείωτο από το t_2 και πέρα.



ημιτονοειδές κύμα περιορισμένης εμβέλειας

$$z_1 - z_2 = v(t_2 - t_1)$$

Μετάφραση της μεταβολής της απομάκρυνσης με το χρόνο σε μια σταθερή θέση, σε μια αντίστοιχη μεταβολή της απομάκρυνσης με τη θέση σε κάθε προσδιορισμένο χρόνο.

As φτιάξουμε τώρα τη διαφορική εξίσωση που υπακούει η διάδοση του κύματος μιας διάταξης όπως περιγράφεται από την

$$\psi(z, t) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - vt) \right]$$

Θάναί σχέση μεταξύ των μερικών παραγώγων ως απομακρύνου ψ ως προς το z και το t :

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{2\pi}{\lambda} A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - vt) \right]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{2\pi v}{\lambda} A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - vt) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial z} = - \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} ;$$

Δεν υπάρχει τίποτα να μας εμποδίσει, αλλιώς αυτή η εξίσωση εφαρμόζεται μόνο σε κύματα που ταξιδεύουν στη θετική z κατεύθυνση.

Γιαυτό αν πάρουμε την εξίσωση

$$\psi = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z + vt) \right]$$

που περιγράφει κύμα που ταξιδεύει στην αρνητική z κατεύθυνση, δάχαμε

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{2\pi}{\lambda} A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z + vt) \right]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{2\pi}{\lambda} v A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z + vt) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Αλλά παίρνοντας τις δεύτερες παραγώγους, φτάνουμε σε σχέση που ισχύει για ημιτονοειδή κύματα οποιουδήποτε μήκους κύματος που ταξιδεύει στη μία ή στην άλλη κατεύθυνση:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Ιδια εξίσωση από την οποία ξεκινήσαμε όταν αφητούσαμε την κίνηση ως χορδής και μας έδωσε τις κατευθυντικές καταστάσεις μιας τεντωμένης χορδής ή άλλου μονοδιάστατου συστήματος που υπόκειται σε ελαστικές δυνάμεις επαναφοράς.

Ταχύτητα κύματος σε ειδικά μέσα μετάδοσης (10)

- Διακρίνουμε κύματα σε χορδή με βραβίδες:

Όπως έχουμε ξαναπεί παίρνουμε αυτή τη περίπτωση από τη χορδή με ελαφρύς μινύδες, αρκεί να αντικαταστήσουμε την τάση T με το γινόμενο της σταθεράς του ελατηρίου K επί την απόσταση των βραβίδων a :

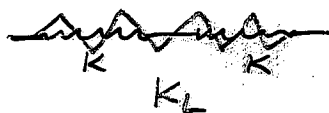
$$m \frac{d^2 \psi}{dt^2} = K(\psi_{i+1} - \psi_i) - K(\psi_i - \psi_{i-1})$$

$$\frac{T}{a} \leftrightarrow K$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \rightarrow \sqrt{\frac{K a}{\rho}} = \sqrt{\frac{K_L \cdot L}{\rho}}$$

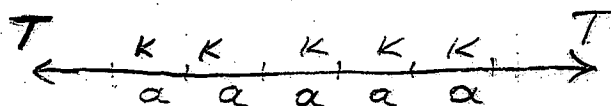
γιατί

$$K \cdot a = K_L \cdot L$$



π.χ. $\frac{1}{2} K = K_L$ για 2 ελατήρια

Γενικά:



φυσικό μήκος: a_0

$$L = N a, \quad L_0 = N a_0$$

$$T = K(a/a_0) = K_L \cdot (L - L_0)$$

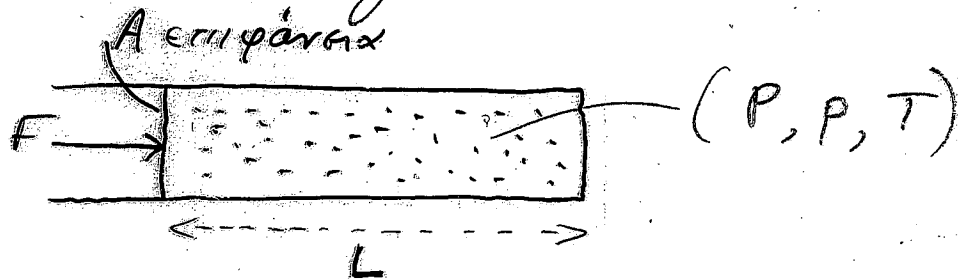
$$K_L \cdot N \cdot (a/a_0)$$

$$\Rightarrow K = N \cdot K_L$$

$$K \cdot a = N \cdot a \cdot K_L = L \cdot K_L$$

Διαμήκη κύματα στον αέρα - Ταχύτητα ήχου

Το τμήμα μας απεικονίζει διαμήκεις ταλαντώσεις με μορφή του αέρα δηλ. ηχητικά κύματα



Η πίεση του αερίου ισορροπείται από την εξωτερική δύναμη F

Μια μεταβολή του μήκους L κατά dL συνεπάγεται αντίστοιχες μεταβολές dF, dV, dP

$dF = -K_L dL$ (-) γιατί μείωση του μήκους αντιστοιχεί σε αύξηση της δύναμης F

$$dF = A \cdot dP = A \cdot \frac{dP}{dV} dV = A \cdot \frac{dP}{dV} A \cdot dL = A^2 \frac{dP}{dV} dL$$

άρα «σταθερά ελατηρίου» για αέριο σε ένα κύλινδρο μήκους L και διατομής A

$$K_L = -A^2 \frac{dP}{dV} > 0$$

Για να βρούμε τη ταχύτητα του ήχου χρειαζόμαστε ακόμα τη γραμμική πυκνότητα

$$\rho_{\text{or}} = \frac{dm}{dL} = \frac{dm}{dV} \frac{dV}{dL} = \frac{dm}{dV} \frac{A \cdot dL}{dL} = A \cdot \rho$$

$$\Rightarrow v_{\text{ήχου}}^2 = \frac{K_L \cdot L}{\rho_{\text{or}}} = \frac{1}{A \cdot \rho} \left(-A^2 \frac{dP}{dV} \right) L > 0$$

$$\Rightarrow v_{ux}^2 = - \frac{v}{\rho} \frac{d\rho}{dv} //$$

Για αδιαβατική μεταβολή

$$P \cdot V^\gamma = \text{σταθ} \quad , \quad \gamma = C_p / C_v \approx 1,4$$

$$d(P \cdot V^\gamma) = P \cdot \gamma V^{\gamma-1} dV + V^\gamma dP = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dV} = - \frac{\gamma \cdot P}{V}$$

$$\Rightarrow v_{ux}^2 = \gamma \cdot \frac{P}{\rho} //$$

Οι μεταβολές είναι πραγματικά αδιαβατικές γιατί η ροή θερμότητας δεν είναι αρκετά χρήσιμη σε σχέση με τη ταχύτητα του κύματος ώστε να αποκαθιστά θερμική ισορροπία μεταξύ θερμότερων και ψυχρότερων περιοχών.

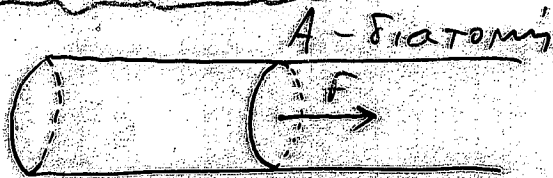
$$(v_{ux} = \sqrt{\gamma} \cdot v_{\text{μέση μορίων}})$$

Για ισόθερμη μεταβολή

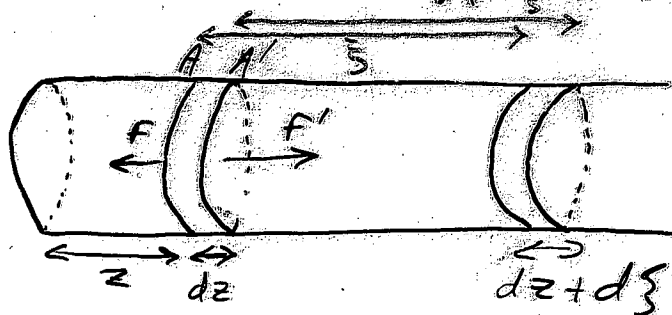
$$v(\text{ροής θερμότητας}) \gg v_{ux})$$

Ελαστικά υλικά σε Στερεή Ράβδο (13)

Διαμήκη υλικά



Ορθή τάση $S \equiv \frac{F}{A} \quad (\text{N/m}^2) \quad (1)$



Κάτω από την επίδραση των δυνάμεων κάθε διατομή υφίσταται μία μετατόπιση ξ παράλληλη προς τον άξονα. Αν $\xi = \text{σταθ.}$ $\rightarrow$ $\nexists$ παραμόρφωση αλλά μετατόπιση. Ενδιαφερόμαστε για $\xi = f(z)$

Θεωρούμε διατομές A, A' που απέχουν dz πριν διαταραχτεί η ράβδος. Όταν εφαρμοστούν οι δυνάμεις η διατομή A μετατοπίζεται κατά ξ και η A' κατά ξ'

$$dz + (\xi' - \xi) = dz + d\xi$$

↑
παραμόρφωση
ράβδου

(17)

$$\text{Ορμή παραμόρφωσης} \equiv \varepsilon \equiv \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (\text{α διάστατο}) \quad (2)$$

(όταν ∇ παραμόρφωση $\varepsilon = 0$)

$$S = Y \varepsilon \quad \text{Νόμος Hooke} \quad (3)$$

$\uparrow$
μέτρο ελαστικότητας Young (N/m^2)

$$\xrightarrow{(1)(2)(3)} F = S \cdot A = Y \cdot A \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (4)$$

Όταν η ράβδος δεν είναι σε ισορροπία, η δύναμη δεν είναι ίδια κατά μήκος της ράβδου

$$F' - F = dF = \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) dz$$

Αν ρ η πυκνότητα

$$dm = \rho dV = \rho A dz$$

Η επιτάχυνση αυτής της μάζας είναι $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

$$\rightarrow \frac{\partial F}{\partial z} dz = (\rho A dz) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad 2^{\text{ος}} \text{ Νόμος Νεύτωνα}$$

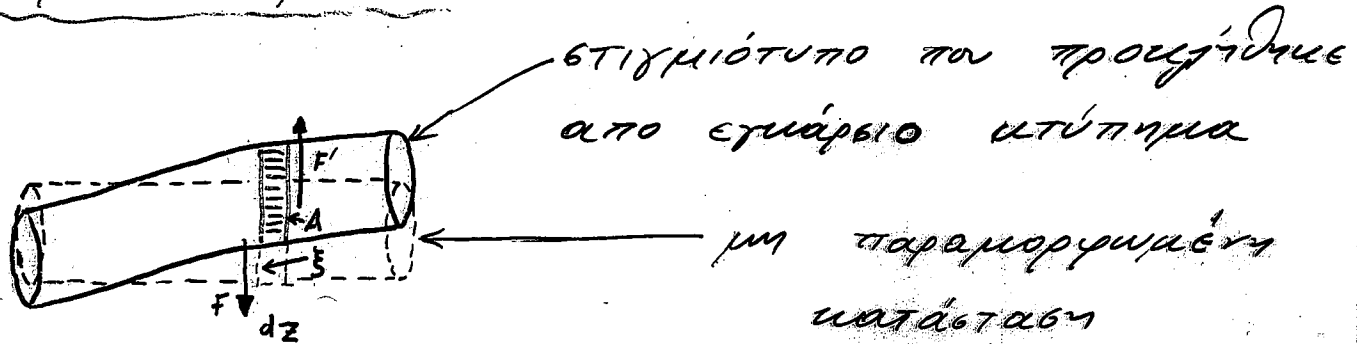
$$\rightarrow \frac{\partial F}{\partial z} = \rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$\xrightarrow{(4)} \frac{\partial F}{\partial z} = Y \cdot A \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \quad (6)$$

$$\xrightarrow{(5)/(6)} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$

$$\rightarrow v^2 = \frac{Y}{\rho} \quad ||$$

Εγκάρσια κίματα



$\xi \equiv$ εγκάρσια μετατόπιση, ενός τμήματος dz σε μια συγκεκριμένη στιγμή.

Η ξ πρέπει να είναι συνάρτηση της θέσης στον οριζόντιο άξονα γιατί διαφορετικά θα αντιστοιχούσε σε παράλληλη μετάδοση της ράβδου.

$\gamma \equiv \frac{\partial \xi}{\partial z} \equiv$ διατμητική παραμόρφωση (= μεταβολή της εγκάρσιας μετατόπισης ανά μονάδα μήκους της ράβδου)

Αποτέλεσμα της παραμόρφωσης είναι ότι σε κάθε τμήμα πάχους dz επιδρούν δύο αντίθετες δυνάμεις F, F' , που εφάπτονται στην επιφάνεια και παράγονται από τα μέρη της ράβδου που βρίσκονται από τη μία και την άλλη πλευρά του τμήματος.

$S \equiv \frac{F}{A} \equiv \text{διατμητική τάση (= εφαπτομενική δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας)}$ (16)

Ισχύει:

$S = G \cdot \delta$ σχέση όμοια με το νόμο του Hooke
όπου $G \equiv \text{δυντελεστής διάτμησης}$

$$\Rightarrow F = A \cdot G \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (1)$$

Η συνισταμένη δύναμη στο τμήμα αυτό της ράβδου είναι

$$F' - F = dF = \left(\partial F / \partial z \right) dz \quad (2)$$

Αν ρ - πυκνότητα υλικού, η μάζα του τμήματος είναι

$$dm = \rho \cdot A \cdot dz$$

και η εξίσωση κινήσεώς του στην ελαρτία
διεύθυνση είναι:

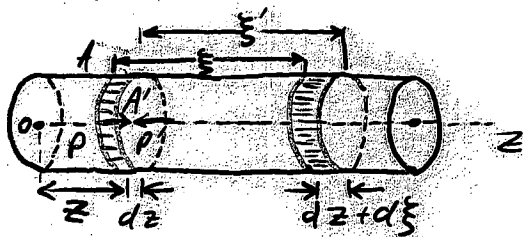
$$\frac{\partial F}{\partial z} dz = (\rho \cdot A \cdot dz) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{\partial F}{\partial z} = A \cdot G \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \quad (4)$$

$$\stackrel{3)(4)}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \parallel \Rightarrow v = \sqrt{G/\rho} \parallel \begin{array}{l} \text{Διατμητική} \\ \text{κύμα} \end{array}$$

10α
 Ας δούμε πάλι τα υμένα σε ένα αέριο
 υμένα σε σχέση με τις διαφορές ως προς τα
 υμένα σε ράβδο.

Τα αέρια είναι πολύ συμπιεστά και όταν
 εμφανίζονται διαμηκόνες πιέσεις σε αέριο, η πυ-
 νότητα του αερίου υφίσταται ίδιες διαμηκόνες
 όπως η πίεση.



Για απρότητα
 υμένα μέσα
 σε κυλινδρικό σωλήνα

p_0 : πίεση ισορροπίας
 ρ_0 : πυκνότητα " } ανεξάρτητες του z

Αν διαταραχτεί η πίεση του αερίου, ένας στοι-
 χειώδης όγκος, όπως ο $A \cdot dz$, αινείται γιατί
 οι πιέσεις p και p' στη μία και στην άλλη
 πλευρά είναι διαφορετικές, προμαγνώντας έτσι μία
 συνισταμένη δύναμη. Το αποτέλεσμα είναι να μετα-
 κινηθεί η διατομή A κατά ξ και η διατομή
 A' κατά ξ' , ώστε το πάχος του στοιχειώδους όγκου
 μετά τη παραμόρφωση γίνει:

$$dz + (\xi' - \xi) = dz + d\xi$$

Ος τώρα όρα φαίνονται εντελώς όμοια με την περίπτωση της στερεής ράβδου. Όμως η μεταβολή του όγκου έχει σαν αποτέλεσμα τη μεταβολή στη πυκνότητα. Η μάζα του αερίου στο αδιατάραχτο στοιχειώδη όγκο είναι:

$$\rho_0 A dz$$

Αν ρ είναι η πυκνότητα στο αέριο που έχει υποστεί διατάραχή, ο αντίστοιχος όγκος είναι:

$$\rho A (dz + d\xi)$$

Για να ισχύει η διατήρηση της ύλης, πρέπει οι δύο μάζες να είναι ίσες, δηλ.

$$\rho A (dz + d\xi) = \rho_0 A dz$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{1 + d\xi/dz}$$

αναπτύσσουμε το $(1 + d\xi/dz)^{-1} = 1 - d\xi/dz + \dots$

$$\Rightarrow \rho = \rho_0 (1 - d\xi/dz)$$

$$\Rightarrow \rho - \rho_0 = -\rho_0 (d\xi/dz)$$

(1)

Η καταστατική εξίσωση συνδέει τη πίεση p

με τη πυκνότητα ρ : $p = f(\rho)$ $\left(p = \rho \frac{RT}{M} \right)$
μάζα γραμ/μολ

Αναπτύσσουμε κατά Taylor τη $p = f(\rho)$:

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0) \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 + \frac{1}{2} (\rho - \rho_0)^2 \left(\frac{d^2 p}{d\rho^2} \right)_0 + \dots$$

και για μικρές μεταβολές:

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0) \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \quad (2)$$

$$\kappa \equiv \rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \equiv \text{μέτρο ελαστικότητας όγκου} \quad (3)$$

$$(3) \rightarrow p = p_0 + \kappa \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \quad \text{Νόμος Hooke για ρευστά} \quad (4)$$

$$(4) \rightarrow p = p_0 - \kappa \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (5)$$

Η (5) συνδέει την πίεση σε κάθε σημείο του αερίου και την παραμόρφωση στο ίδιο σημείο. (Στην ελαστική ράβδο αντιστοιχεί στην $F = Y \cdot A \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z}$)

Η συνιστάμενη δύναμη προς την κατεύθυνση $+z$:

$$F = (p - p') A = -A dp \quad (\text{αφού } dp = p' - p)$$

Εξίσωση κίνησης:

$$-A dp = (\rho_0 A dz) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (6)$$

Έχουμε δύο πεδία ξ και p . Τα συνδυάζουμε

(17)

$$(5) \rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\kappa \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \quad (7)$$

$$(6)/(7) \rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\kappa/\rho_0}$$

Για αδιαβατική διαστολή

$$p \cdot V^\gamma = \text{σταθ.} \rightarrow p = C \cdot \rho^\gamma$$

$$\rightarrow \frac{dp}{d\rho} = \gamma C \rho^{\gamma-1}$$

και

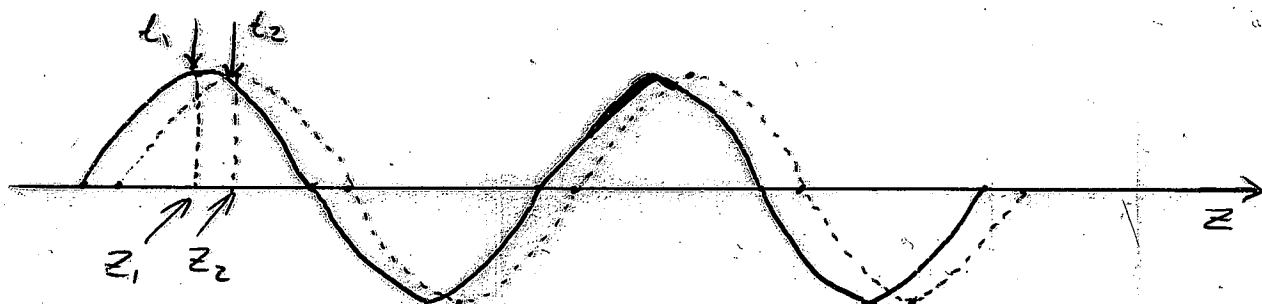
$$\kappa = \rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 = \gamma C \rho_0^\gamma = \gamma p_0$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p_0}{\rho}}$$

Ταχύτητα φάσης

Οδόντος κύμα που ταξιδεύει προς τα δεξιά του $z=0$:

$$\Psi(z, t) = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - vt)\right] = A \sin[kz - \omega t]$$



$$kz_1 - \omega t_1 = kz_2 - \omega t_2 \quad \leadsto \quad \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{k} = v \equiv v_\phi$$

ταχύτητα φάσης

Επομένως ορίζουμε τη συνάρτηση φάσης $\phi(z, t)$ οδόντος κύματος σαν το όρισμα της $\sin(kz - \omega t)$

$$\phi(z, t) \equiv kz - \omega t$$

Αν παρακολουθούμε μία σταθερή φάση δαίνουμε

$$d\phi(z, t) = 0$$

$$d\phi(z, t) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) dt + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) dz = -\omega dt + k dz$$

$$\leadsto v_\phi \equiv \left(\frac{dz}{dt}\right)_{(d\phi=0)} = \frac{\omega}{k} = v$$

Παρατήρηση:

Αν η σχέση διασποράς είναι:

$$\omega = v_{\varphi} \cdot k \quad \left(\begin{array}{l} \text{όπως στην ιδανική χορδή} \\ \text{όπου } \omega = \sqrt{\frac{T}{\rho}} k \\ \quad \quad \quad v_{\varphi} \end{array} \right)$$

το v_{φ} είναι βέβαια ανεξάρτητο το k
και όλες οι αρμονικές συνιστώσες κινούνται
με την ίδια ταχύτητα v_{φ} και επομένως το
σχήμα της διατάραξης δεν αλλάζει

$$\psi(z, t) = f(z - v_{\varphi} t)$$

Διαφορετικά αν δηλ. $v_{\varphi} = \frac{\omega(k)}{k}$ εξαρτάται
απο το k , έχουμε διασπορίσμό ή διασπορά
π.χ. στο πράγμα

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_p^2$$

σχέση διασποράς

$$\Rightarrow v_{\varphi} = \sqrt{c^2 + \omega_p^2 / k^2}$$

Ταχύτητα ομάδας

(12)

Η ψ ημιτονινοῦ οδεύοντος κύματος δεν είναι αναγκαστικὰ ἡ ταχύτητα με την οποία μεταφέρεται ἡ πληροφορία ἢ ἡ ενέργεια.

Δεν μπορούμε να βεβαιώσουμε μήματα με ἓνα αρμονικὸ κύμα, που ἔχει μία μόνη συχνότητα γιατί συνεχίζεται ἀπεριόριστα με πᾶνε κύμα ὅμοιο με τὸ προηγούμενο. Ἡ μόνη πληροφορία εἶναι ὅτι υπάρχει. Για να βεβαιώσουμε μήματα πρέπει να διαμορφώσουμε τὸ κύμα.

Παράδειγμα

As θεωρήσουμε ἓνα πομπό στη θέση $z=0$ που διεκτείνει γορδὴ που ελαττείνεται ἀπὸ $0 - \infty$.

Ἡ ταλάντωση τὸν πομπὸν εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα υπέρθεσης δύο αρμονικῶν κινήσεων με συζυγίες συχνότητες ω_1, ω_2 :

$$D(t) = -A \sin \omega_1 t - A \sin \omega_2 t$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\rightarrow D(t) = -2A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

$$\omega_{\mu} \equiv \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) \quad \text{μέση}$$

$$\omega_{\delta} \equiv \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) \quad \text{διαμόρφωσης}$$

$$\rightarrow D(t) = \underbrace{-2A}_{A_{\delta}} \cos(\omega_{\delta} t) \sin(\omega_{\mu} t)$$

Αν ω_1, ω_2 έχουν ευχάριστες τιμές $\omega_{\delta} \ll \omega_{\mu}$. Τότε μορφή της $D(t)$ είναι σχεδόν αρμοτική ταρσίτωση με συχνότητα ω_{μ} και με πλάτος A_{δ} σχεδόν σταθερό. Το A_{δ} έχει αρμοτική διαμόρφωση πλάτους με σχετικά μικρή συχνότητα διαμόρφωσης ω_{δ} .

Τα οδεύοντα κύματα που προέρχονται από ένα τέτοιο πομπό είναι:

$$\psi(0, t) = D(t) = -A \sin \omega_1 t - A \sin \omega_2 t$$

$$\psi(z, t) = A \sin(k_1 z - \omega_1 t) + A \sin(k_2 z - \omega_2 t)$$

$$= 2A \sin\left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2)z - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right]$$

$$\cdot \cos\left[\frac{1}{2}(k_1 - k_2)z - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right]$$

$$= A_{\delta}(z, t) \sin(k_{\mu} z - \omega_{\mu} t)$$

όπου $A\delta'(z, t) = 2A \cos[k_\delta z - \omega_\delta t]$ (27)

$$k_\delta = \frac{1}{2}(k_1 - k_2) \quad , \quad k_\mu = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Με ποιά ταχύτητα διαδίδονται οι παραμορφώσεις
(ας πούμε το μέγιστο πλάτος της διαμόρφωσης)

Πρέπει να διατηρηθεί σταθερή η τιμή του ορί-

ματος $\phi' = [k_\delta z - \omega_\delta t]$ δηλ.

$$d[k_\delta z - \omega_\delta t] = 0$$

$$\Rightarrow k_\delta dz - \omega_\delta dt = 0$$

$$\Rightarrow v_\delta \equiv \left(\frac{dz}{dt} \right)_{(d\phi'=0)} = \frac{\omega_\delta}{k_\delta} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

Αλλά $\omega = \overset{\text{συνάρτηση}}{\omega(k)}$ γεινιά και $\omega_{1,2} = \omega(k_{1,2})$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor γύρω από το $k = k_\mu$

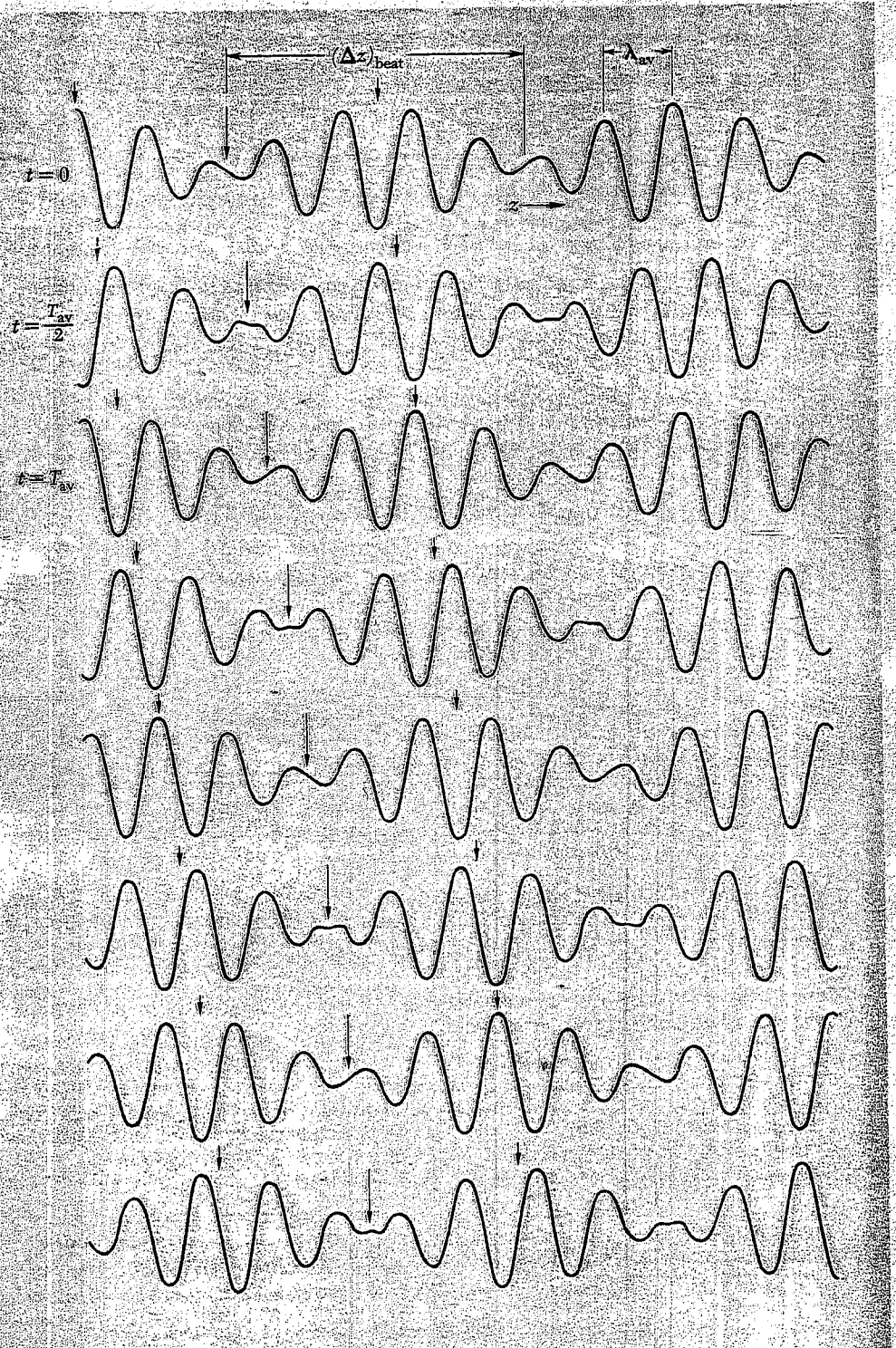
$$\omega(k_{1,2}) = \omega(k_\mu) + (k_{1,2} - k_\mu) \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_\mu} + \frac{1}{2!} (k_{1,2} - k_\mu)^2 \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_{k=k_\mu} + \dots$$

$$\Rightarrow v_\delta = \frac{\omega(k_1) - \omega(k_2)}{k_1 - k_2} = \frac{\omega(k_\mu) - \omega(k_\mu) + [(k_1 - k_\mu) - (k_2 - k_\mu)] \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_\mu} + \dots}{k_1 - k_2}$$

$$\Rightarrow v_\delta = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_\mu} + \dots \quad ||$$

Στις περισσότερες εφαρμογές οι ω_1, ω_2 πορί κοντά
και μπορούμε να αγνοήσουμε όρους τους όρους
επτός από τον πρώτο.

Εκ. 6.1. Ταχύτητα ομάδας. Το βέλη ακολουθούν τα διακριτήματα, τα ό-
ποια κινούνται με την ταχύτητα ο-
μάδας v_g . Οι άστροι κύκλοι ακολου-
θούν ξεχωριστές κορυφές κυμάτων, οι
οποίες κινούνται με την μέση ταχύ-
τητα φάσης v_{av} .



Η ποσότητα $d\omega/dk$, υπολογισμένη σε κάποια κατάλληλη μέση τιμή του κυματικού αριθμού k , ονομάζεται ταχύτητα ομάδας:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Έτσι βλέπουμε ότι το σήμα που αποτελείται από μια κορυφή του κύματος του πρώτου διαμήκους δε διαδίδεται με τη μέση ταχύτητα φάσης

$$v_\mu = \frac{\omega_\mu}{k_\mu}$$

αλλά με τη v_g .

Σχέση ταχύτητας φάσης και ταχύτητας ομάδας

Αφού

$$v_\varphi \equiv \frac{\omega}{k} \quad \text{συνάρτηση γενικά}$$

$$\Rightarrow v_g \equiv \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(k \cdot v_\varphi) = v_\varphi + k \frac{dv_\varphi}{dk} \quad //$$

Από αυτή τη σχέση είναι φανερό πως αν η σχέση διαφοράς ενός μέσου είναι της μορφής:

$$\omega = C \cdot k$$

τότε η ταχύτητα φάσης είναι σταθερή και

$$v_\varphi = v_g$$

π.χ. • ευεχής ομογενής χορδή:

$$v_\phi \equiv \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{d\omega}{dk} = v_g$$

• Ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο κενό:

$$v_\phi = c = v_g$$

Αλλά • Ηγ/μαγνητικά κύματα στην ιονόσφαιρα:

Σχέση διασποράς: $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$ $\omega \geq \omega_p$

και $v_\phi \equiv \frac{\omega}{k} = \sqrt{c^2 + \omega_p^2/k^2} = c \sqrt{1 + (\omega_p/c k)^2} \geq c$

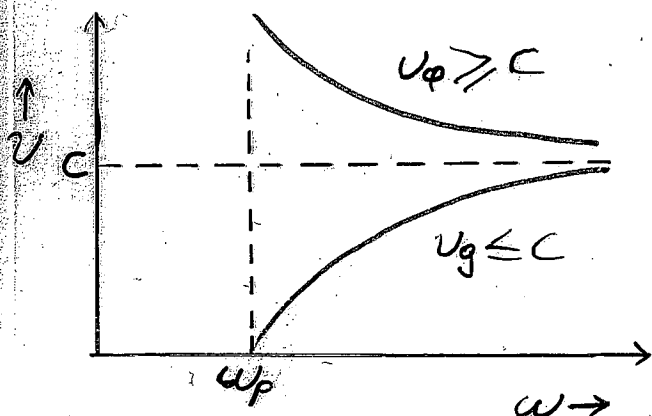
ενώ $v_g \equiv \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_p}{ck})^2}} \leq c$

Εξάγγον παραγωγίζοντας τη σχέση διασποράς:

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2c^2 k$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{k} \cdot \frac{d\omega}{dk} = c^2$$

$$\Rightarrow v_\phi \cdot v_g = c^2$$



Το γεγονός ότι $v_\phi > c$ δε σημαίνει ότι υπάρχει αντίφαση με τη θεωρία της σχετικότητας.

Ας δούμε πού οφείζεται:

Αν $\omega_p = 0 \leadsto v_\phi = c$. Οφείζεται στο $\omega_p \neq 0$.

Η ω_p είναι ωπτική συχνότητα των ελεύθερων ταλαντώντων μέσων σε πράγμα:

$$\omega_p^2 = \frac{N e^2}{m_e \epsilon_0} \quad (\text{όπως είχαμε βρει παλιά})$$

Ας δούμε καλύτερα το αντίστοιχο παράδειγμα της μή ισομερούς χορδής:

$$\omega^2 = \frac{u}{\rho} + \frac{T}{\rho} k^2 \quad \text{σχέση διασποράς}$$

$$\text{όπου } \frac{k}{a} \xrightarrow[\text{οριο}]{\text{συνεχές}} u$$

○ Ας υποθέσουμε ότι κόβουμε όλα τα ελατήρια που συνδέουν τις μάζες μεταξύ τους (Στο άγρο παράδειγμα δεν θα ήταν εύκολο να φανταστούμε με $c=0$). Τότε θάχουμε

$$v_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{u}{\rho} = \frac{\frac{k/a}{m/a}}{k^2} = \frac{k}{m} \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2$$

Μπορούμε φτιάξουμε διαφορές φάσης στις διαδοχικές μάζες που ταλαντώνονται, έτσι που το μήκος κύματος (δηλ. η απόσταση σημείων που η φάση τους διαφέρει κατά 2π) παρά μέγ.

Σύνθετη αντίσταση - Ενεργειακή ροή

Στη μελέτη των σταθίμων κυμάτων (κ.τ.τ. ελαστικών συστημάτων) είδαμε πως ένα σύστημα (= μέσο) χαρακτηρίζεται από δύο παραμέτρους:

Η μία περιγράφει τη χαρακτηριστική δύναμη επαταφοράς (π.χ. T) και η άλλη την αδράνεια του συστήματος (π.χ. ρ)

Ουσιαστικά ο συνδυασμός αυτών των δύο ποσοτήτων γεννάει τη ταχύτητα.

Τα τρέχοντα κύματα συμπεριφέρονται πολύ διαφορετικά από τα στάσιμα κύματα:

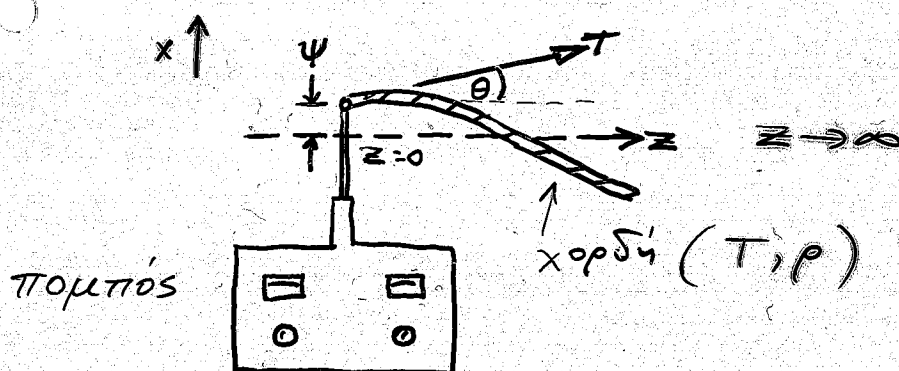
Μεταφέρουν ενέργεια και ορμή.

Σ' αυτή τη περίπτωση η δύναμη επαταφοράς και η αδράνεια δεν είναι οι καλύτερες παράμετροι, όμως ο συνδυασμός τους, που δίνει την ταχύτητα φάσης, είναι. Υπάρχει και ένας ανεξάρτητος συνδυασμός που είναι χρήσιμος (γιατί συνδέεται με το ρυθμό που ακτινοβολείται ενέργεια)

$$Z = \sqrt{T \cdot \rho}$$

Με δύο λογία περνώντας από τα στάδια
στα οδεύοντα κύματα, είναι πρακτικό να
κάνουμε το μετασχηματισμό:

$$\left(\begin{array}{l} \text{κλειστή χορδή} \\ \text{στάδια κύματα (κ.τ.τ.)} \\ T, \rho \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{ανοικτή χορδή} \\ \text{οδεύοντα κύματα} \\ v, Z \end{array} \right)$$



Ζητάμε τη
στιγμιαία αετινο-
βοράμενη ισχύ.

Ο πομπός μεταδίδει στο άκρο της χορδής μία
αρμονική εγχάρεια κίνηση

$$\psi(0, t) = A \sin \omega t \quad (1)$$

και παράγει ένα οδεύον κύμα

$$\psi(z, t) = A \sin(\omega t - kz) \quad (2)$$

Η εγχάρεια προβορή της δύναμης που αδεείται
στή χορδή στο $z=0$ είναι:

$$-T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (3)$$

Αντίστοιχα η ελαστική προβοή της δύναμης που ελαττώνει η γροβή πάνω στο πομπό είναι:

$$F_x = T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (4)$$

Για το αρμονικό οδόντ μαμα έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -A\kappa \cos(\omega t - \kappa z) \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= A\omega \sin(\omega t - \kappa z) \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{\kappa}{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{v_\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5)$$

$$\stackrel{(4)(5)}{\rightarrow} F_x = - \underbrace{\left(\frac{T}{v_\psi} \right)}_{\equiv Z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{z=0} \equiv - Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (6)$$

$\uparrow$
ελαστική
ταχύτητα

που σημαίνει πως όταν ο πομπός ελαττώνει οδόντ μαμα, δέχεται μια δύναμη απόσβεσης ή τριβής που είναι ανάλογη της ταχύτητας απομάκρυνσης και με αντίθετο οραίο.

Η γροβή αντιδρά στη διάδοση του μαματος γιατί και το $Z \equiv$ χαρακτηριστική αντίσταση

Τέτοια δύναμη απόσβεσης (αντίστασης) έχει, όπως ξέρουμε, την ιδιότητα να καταναλώνει ενέργεια.

(4)

Σ αυτό το παράδειγμα μπορούμε να πούμε πως η χορδή απορροφάει ενέργεια από το πομπό.

Αυτή η ενέργεια δεν πάει χαμένη (π.χ. δεν υποβαθμίζεται σε θερμότητα πάνω στη χορδή).

Αντίθετα έχει αντιπροσωπεύει στη χορδή και αν θέσουμε μπορούμε να τη ζαγαπάρουμε με ένα τατάζηγο δέκτη στο δεξιό άκρο της χορδής.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την ισχύ $P(t)$ ($\equiv$ ενέργεια ανά μονάδα χρόνου) που μεταδίδει ο πομπός στη χορδή. Αφού της εμβαίνει μία ελαστική δύναμη $-F_x$ έχουμε:

$$P(t) = (-F_x) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{z=0} \stackrel{(6)}{=} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{z=0} \right]^2 //$$

ή ισοδύναμα

$$P(t) \stackrel{(4)}{=} \left[-T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0} \right] \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{z=0}$$

$$\stackrel{(5)}{=} \left[-T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0} \right] \left[-v_p \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0} \right]$$

$$= \frac{v_p}{T} \left[-T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0} \right]^2 = \frac{1}{2} \left[-T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0} \right]^2 //$$

↑
δυναμική επαναφοράς

Για τη μέση χρονική τιμή της ισχύος (5)
έχουμε:

$$\langle P(t) \rangle = Z \left\langle \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right\rangle_{z=0} = Z A^2 \omega^2 \langle \sin^2 \omega t \rangle$$

$$= \frac{1}{2} Z \cdot A^2 \cdot \omega^2$$

δηλ. η συνδυαστική αντίσταση μπαίνει σε βασική σταθερά αναλογίας.

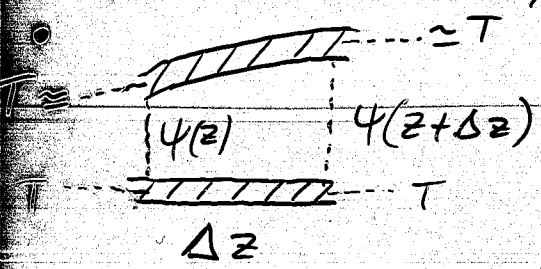
~~~~~

Ενεργειακή πυκνότητα:

Ένα τμήμα ελαστικής χορδής αποθηκεύει κινητική ενέργεια (λόγω κίνησης) και δυναμική ενέργεια (λόγω έκτασης της).

- $\frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2$  : στιγμιαία κινητική ενέργεια ανά μονάδα μήκους σε ένα σημείο  
= στιγμιαία κινητική ενεργειακή

πυκνότητα



$$\Delta z \rightarrow \Delta z \left[ 1 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\approx \Delta z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

για μικρή απομάκρυνση

$$\rightarrow \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 : \text{δυναμική πυκνότητα ενέργειας}$$

Επομένως η ενεργειακή πυκνότητα:

$$\begin{aligned} w(z,t) &= \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\rho \cdot T} \sqrt{\frac{\rho}{T}} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{T}{\rho} \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{z}{v} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] \leftarrow \text{ισχύει για κάθε διατάραξη} \end{aligned}$$

από κυματική εξίσωση με πρώτες μερικές παραγώγους

- Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό με τον οποίο περνάει ενέργεια σε ένα σημείο  $z$  από αριστερά στα δεξιά.

Η χορδή αμέσως δεξιά του  $z$  δέχεται μία δύναμη  $-T \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$ . Η δύναμη παράγει έργο αν το σημείο  $z$  κινείται. Ο ρυθμός παραγωγής έργου δάται:

$$P(z,t) = -T \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = -z \cdot v \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)$$

↑  
στην έκφραση

Για τρέχον κύμα προς τα δεξιά:

$$\psi = A \sin(\omega t - kz)$$

που υπακούει την (αντίστοιχη προς την κατεύθυνση  
κίνησης) εξίσωση

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = - \frac{\kappa}{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

παίρνουμε

$$P(z, t) = \frac{I}{v} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = z \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2$$

Συνδυάζοντας τα  $P(z, t)$  και  $w(z, t)$ :

$$P(z, t) = v w(z, t) \quad ||$$

δηλ. η ενέργεια ταξιδεύει στη κατεύθυνση του κύματος (άσκηση: Δείχτε ότι το ίδιο ισχύει και για κύμα που κινείται προς τα αριστερά.)

- Η μέση ενεργειακή ροή στη μονάδα ms είναι φάσης και στη μονάδα του χρόνου που ενεργεί  
γίνεται σε  $W \cdot m^{-2}$  είναι:

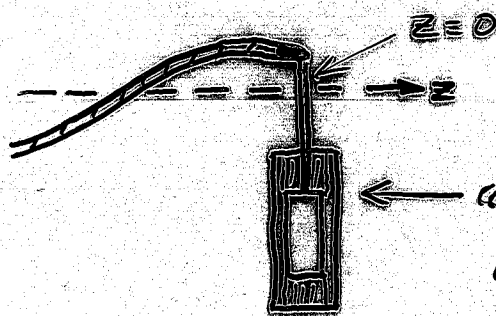
$$I = \frac{1}{A} \cdot P$$

και ονομάζεται ένταση του κύματος

(1)

Ανάγκη - Μετάδοση κυμάτων σε μια  
ομογενή μέση

Ας θεωρήσουμε το άκρο αέρος της χορδής



«απορροφητής» ή δοχείο  
απορρόφησης (Το πιστόνι  
έχει ανεμπόδινη κίνηση)

Ο «απορροφητής» είναι κάποιο μηχανήμα στο άκρο  
της χορδής και ασκεί πάνω της δύναμη:

$$F_x = -Z \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{z=0}$$

αντίσταση ίση  
με τη χαρακτη-  
ριστική αντίσταση  
της χορδής

εξισορροπία  
ταχύτητας

→ Το οδείο τώρα θα υπάρχει. Η κατάσταση  
είναι τέλεια ίδια με τη περίπτωση που  
υπήρχε ένα δεύτερο κομμάτι ίδιας χορδής συνδε-  
σμένη με τη πρώτη στο  $z=0$  και που εκτείν-  
εται μέχρι το  $z=\infty$

Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε τέλεια  
προσαρμογή.

## Απεριόριστος τερματισμός: Ανάγκη

(2)

Αν η αντίσταση του «αποσβεστήρα» δεν είναι  
164 με τη χαρακτηριστική αντίσταση της χορδής,  
η χορδή (με  $Z_1$ ) θα εξακτίζει πάνω στο  
«αποσβεστήρα» δύναμη:

$$-T \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0} = Z_1 \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{z=0}$$

Ο «αποσβεστήρας» ακκεί πάνω στη χορδή:

$$-Z_2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{z=0}$$

και αν  $Z_2 \neq Z_1$ , δάχνει δύναμη

$$(Z_1 - Z_2) \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{z=0} \neq 0$$

που θα δημιουργήσει τρέατια επιτάχυνση (επειδή  
το πιστόνι δεν έχει μάζα). Τέτοια επιτάχυνση  
δεν είναι συμβατή με το από οδόν κύμα.

Πάμε λοιπόν στη γενική γύση της υπερτι-  
μής εξίσωσης: ένα συνδυασμό από ανδαίρετες  
διαταραχές που ταξιδεύουν και δεξιά και αριστερά.

$$\psi(z, t) = \psi_g(z, t) + \psi_a(z, t)$$

(3)

Τα  $\psi_\pi, \psi_a$  έχουν την ίδια ταχύτητα.  
 Ας δούμε τη επιπλέον σχέση υπάρχει μεταξύ τους. Έχουμε

$$-T \left( \frac{\partial \psi_\pi}{\partial z} \right)_{z=0} - T \left( \frac{\partial \psi_a}{\partial z} \right)_{z=0} \overset{\substack{\text{από εξίσωση} \\ \text{κινήματος}}}{=} Z_1 \left( \frac{\partial \psi_\pi}{\partial t} - \frac{\partial \psi_a}{\partial t} \right)_{z=0}$$

$$\Rightarrow Z_1 \left( \frac{\partial \psi_\pi}{\partial t} - \frac{\partial \psi_a}{\partial t} \right)_{z=0} = Z_2 \left( \frac{\partial \psi_\pi}{\partial t} + \frac{\partial \psi_a}{\partial t} \right)_{z=0}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial \psi_a}{\partial t} \right)_{z=0} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \left( \frac{\partial \psi_\pi}{\partial t} \right)_{z=0}$$

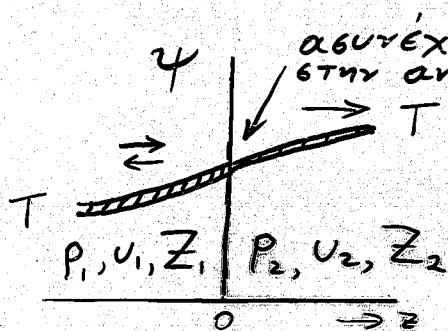
Ομοιογένειας

$$\Rightarrow \psi_a(0, t) = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \psi_\pi(0, t) \quad ||$$

(δε χρειάζεται στοδ. ομοιογένειας: προφανώς  $\psi_a$  πρέπει να είναι μηδέν όταν  $\psi_\pi$  είναι μηδέν)

## Μετάδοση

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η χορδή αντί να τεντώνει στον «αποσβεστήρα» συνδέεται με δεύτερη χορδή απείρου μήκους (η με τέλεια προσαρμογή).



Ίδια τάση  $T$  αλλά διαφορετικές χρ. πυκνότητες

$$\rho_1 \neq \rho_2$$

$$\leadsto v_1^2 = \frac{T}{\rho_1} \neq v_2^2 = \frac{T}{\rho_2}$$

$$\leadsto z_1 = \rho_1 v_1 \neq \rho_2 v_2 = z_2$$

Η απομάκρυνση του προβιπτόντος κύματος:

$$\psi_{\pi} = A_1 \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{v_1}\right)\right] \leftarrow \text{ταξιδεύει στη } \oplus z \text{ διεύθυνση}$$

Η απομάκρυνση του ανακλώμενου:

$$\psi_{\alpha} = B_1 \sin\left[\omega\left(t + \frac{z}{v_1}\right)\right] \leftarrow \text{ταξιδεύει στη } \ominus z \text{ διεύθυνση}$$

Η απομάκρυνση του διερχόμενου κύματος

$$\psi_{\delta} = A_2 \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{v_2}\right)\right] \leftarrow \text{ταξιδεύει στη } \oplus z \text{ διεύθυνση}$$

Ζητάμε τους συντελεστές ανάκλασης ( $\equiv \frac{B_1}{A_1}$ )

και διέλευσης ( $\equiv \frac{A_2}{A_1}$ ) πρώτους

Τους βρίσκουμε από τις δύο συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται στη συνέχεια αντίστασης στο  $z=0$ .

Συνοριακές συνθήκες:

(1) Γεωμετρική: η απομάκρυνση είναι η ίδια αμέσως δεξιά και αριστερά του  $z=0$  για όλους τους χρόνους, έτσι που να μην υπάρχει ασυνέχεια στην απομάκρυνση.  $\psi^{(1)}(0,t) = \psi^{(2)}(0,t)$

(2) Δυναμική: υπάρχει συνέχεια της εφαρμόσιας δύναμης  $T \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0}$  και επομένως συνεχής κλίση:  $\left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0}^{(1)} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0}^{(2)}$

Αυτό πρέπει να ισχύει αλλιώς μια πεπερασμένη διαφορά στη δύναμη ενεργεί πάνω σε μία στοιχειώδη μάζα χορδής δίνοντας μια άπειρη επιτάχυνση. Αυτό δεν επιτρέπεται:

$$\underline{(1)} \rightarrow \psi_{\pi} + \psi_{\alpha} = \psi_{\varsigma} \quad \text{στο } z=0 \quad \forall t$$

$$A_1 \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v_1} \right) \right] + B_1 \sin \left[ \omega \left( t + \frac{z}{v_1} \right) \right] = A_2 \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v_2} \right) \right]$$

$z=0$

Στο  $z=0$  έχουμε:

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad (1)$$

Η συνθήκη (2) δίνει:

$$T \left( \frac{\partial}{\partial z} (\psi_{\pi} + \psi_a) \right) \Big|_{z=0} = T \left( \frac{\partial}{\partial z} \psi_s \right) \Big|_{z=0} \quad \forall t$$

$$\rightarrow -\omega \underbrace{\left( \frac{T}{v_1} \right)}_{Z_1} A_1 + \omega \underbrace{\left( \frac{T}{v_1} \right)}_{Z_1} B_1 = -\omega \underbrace{\left( \frac{T}{v_2} \right)}_{Z_2} A_2$$

$$\rightarrow Z_1 (A_1 - B_1) = Z_2 A_2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)/(2)} R = \frac{B_1}{A_1} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \leftarrow \text{συντελεστής ανάκλασης πλάτους}$$

$$T = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \leftarrow \text{συντελεστής διέλευσης πλάτους}$$

$$T = 1 + R$$

• Οι συντελεστές είναι ανεξάρτητοι του  $\omega$

• Το  $Z_2 = \infty$  είναι ισοδύναμο με το γάλακτο στο  $z=0$  σταθερό άκρο.

$$\rightarrow \frac{B_1}{A_1} = -1 \quad \leftarrow \text{το προσπίπτον κύμα ανακλάται πάλι με αλλαγή φάσης κατά } \pi$$

! Παρενδύματα...

(7)

As θυμίζουμε τα στάσιμα κύματα:

Η κανονική κατάσταση

$$\psi(z, t) = A \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos(\omega t)$$

είναι μαθηματικά ισοδύναμη με δύο αντίθετα οδεύοντα κύματα:

$$\psi(z, t) = \frac{A}{2} \sin\left(\frac{n\pi z}{L} - \omega t\right) + \frac{A}{2} \sin\left(\frac{n\pi z}{L} + \omega t\right)$$

Τα οδεύοντα κύματα στα σημεία  $z=0, z=L$

$$\begin{aligned} \psi(0, t) = \psi(L, t) &= \frac{A}{2} \sin(-\omega t) + \frac{A}{2} \sin(\omega t) \\ &= 0 \frac{A}{2} \sin(\omega t) \oplus \frac{A}{2} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι αυτά τα κύματα πω

ταξιδεύουν αντίθετα, δημιουργούν ίσες και

αντίθετες αποκλίσεις στα σταθερά άκρα.

- Ένα κυματοπακέτο που έχει πολλές συνιστώσες συχνότητες θα κρατήσει το σχήμα του στο  $z_2 = \infty$  αλλά θα αντιστραφεί.

- Αν  $z_2 = 0$ , έτσι που το  $z=0$  είναι ένα ελεύθερο άκρο χωρίς

$$\rightarrow \frac{B_1}{A_1} = 1 \quad \text{και} \quad \frac{A_2}{A_1} = 2$$

(3)

Γενικά αν  $z_2 > z_1$ , το ύψος της διερχόμενης διαταραχής είναι μικρότερο από τη προβιπτόμενη ενώ αν το  $z_2 < z_1$ , η διερχόμενη διαταραχή είναι μεγαλύτερη. Το γεγονός αυτό δεν συνεπάγεται τίποτε περισσότερο όπως μη διατήρηση της ενέργειας. Αλλά όταν  $z_2 < z_1$ , η δεύτερη χορδή είναι ελαφρύτερη  $\rho_2 < \rho_1$ .

• Για ίσες τάσεις  $T$  έχουμε

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

$$\leadsto R = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}, \quad T = \frac{2v_2}{v_1 + v_2}$$

• Προηγούμενα είχαμε βρεί

$$\langle P(z, t) \rangle = \frac{1}{2} z A^2 \omega^2 \quad \leftarrow \text{ρυθμός παραγωγής έργου}$$

και ότι

$$P(z, t) = v w(z, t)$$

↑  
ενεργειακή πυκνότητα

Ετσι ο ρυθμός που η ενέργεια φεύγει από το  $z=0$  με τα ανακλώμενα και τα διερχόμενα.

κύματα είναι: (άδυναμη)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} Z_1 \omega^2 B_1^2 + \frac{1}{2} Z_2 \omega^2 A_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 A_1^2 \frac{Z_1 (Z_1 - Z_2)^2 + 4 Z_1^2 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad \text{απο λόγους } B_1/A_1, A_2/A_1 \\ &= \frac{1}{2} Z_1 \omega^2 A_1^2 \end{aligned}$$

Επομένως η ενέργεια διατηρείται και ότι

η ενέργεια που φθάνει στο  $z=0$  από το προσπίπτον κύμα φεύγει με τα ανακλώμενα και διερχόμενα κύματα.

• Συντελεστές: ανάκλασης - διελεύσεως ενέργειας

$$\frac{\text{Ανακλώμενη Ενέργεια}}{\text{Προσπίπτονσα Ενέργεια}} = \frac{Z_1 B_1^2}{Z_1 A_1^2} = \left( \frac{B_1}{A_1} \right)^2 = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

$$\frac{\text{Διερχόμενη Ενέργεια}}{\text{Προσπίπτονσα Ενέργεια}} = \frac{Z_2 A_2^2}{Z_1 A_1^2} = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

Αν  $Z_1 = Z_2$  δεν ανακλάται ενέργεια

# Κύματα σε 3-διαστάσεις

## 1 - διάσταση

Εξίσωση κύματος :  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$

με γενική λύση :  $\psi(z, t) = f(kz - \omega t) + g(kz + \omega t)$

## 3 - διαστάσεις :

$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi$   
" " "  
div grad  $\psi$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

με λύση  $\psi(\vec{r}, t) = f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + g(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)$   
με  $|\vec{k}| = \frac{\omega}{v}$

Επίπεδα κύματα : Η κυματική συνάρτηση εξαρτάται μόνο από μία συντεταγμένη  $x$  ή  $y$  ή  $z$  ή γενικά  $\vec{r} \cdot \hat{n}$   
 $\hat{n}$  μοναδιαίο στη διεύθυνση διάδοσης

• Αρμονικά επίπεδα κύματα :

$\psi = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)$

Κυματικό διάνυσμα  $\vec{k} \equiv \hat{n} k$

$\psi = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)$   
 $= A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \phi)$

Αν θεωρούμε το έργο των  $\cos$  δηλ. τη φάση:

$$\Phi = (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)$$

Ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων που έχουν τη ίδια φάση  $\Phi$  σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $t$  είναι: ένα επίπεδο. Ονομάζεται μέτωπο κύματος δηλ.

$$d\Phi = \omega dt - \vec{k} \cdot d\vec{r}$$

$$= 0 - \vec{k} \cdot d\vec{r} \quad \text{για συγκεκριμένο χρόνο}$$

$$= 0 \quad \text{αν το } d\vec{r} \perp \hat{n}$$

Αρα για  $t = \text{σταθ.}$  η φάση είναι ίδια σε όλα τα σημεία, που μπορεί κάποιος να φτάσει με διαδοχικές μετακινήσεις  $d\vec{r}$  κάθετες στη διεύθυνση διάδοσης  $\vec{k}$ . Δηλ.  $d\Phi = 0$  καθώς περιφερόμαστε πάνω σ' ένα επίπεδο.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι τα αρμονικά επίπεδα κύματα για τυχόν  $\vec{k}$  υπακούουν:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v_\phi^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)$$

αν η σχέση διασποράς είναι:  $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \text{σταθ.}$

Γενικά έχουμε για αρμονικά επίπεδα κύματα:

$$\partial^2 \psi / \partial t^2 = -\omega^2 \psi, \quad \partial^2 \psi / \partial x^2 = -k_x^2 \psi, \quad \dots$$

οπότε από τη σχέση διασποράς προκύπτει η κυματική εξίσωση. ( $\omega^2 = v_\phi^2 k^2$ )

π.χ. Η.Μ. κύματα στη ισοόρεια

$$\text{σχέση διασποράς } \omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \leadsto \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi - \omega_p^2 \psi$$

Την ίδια εξίσωση θα επαληθεύει και μία τυχόντα υπέρθεση αρμονικών κυμάτων:

$$\psi(\vec{r}, t) \propto \iiint \left[ B(\vec{k}) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + A(\vec{k}) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right] dk_x dk_y dk_z$$

(γενικευση αναλυσης Fourier σε 3-διαστάσεις)

Αν δίνονται τα αρχικά δεδομένα  $\psi(\vec{r}, 0)$  και το  $\frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{r}, 0)$  τότε βρίσκουμε τα  $B(\vec{k}), A(\vec{k})$  και μετάθε από την παραπάνω έκφραση το  $\psi(\vec{r}, t)$

# Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Εξισώσεις Maxwell για το κενό:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\stackrel{(2)}{=} -c^2 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (5)$$

$$\left( \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \right)$$

$$= -c^2 \left[ \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{(3) \parallel 0} - \nabla^2 \vec{E} \right]$$

$$\leadsto \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{E} \quad || \quad (6)$$

$$\leadsto \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E_x, \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E_y, \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E_z \quad (7)$$

Δηλαδή το καθένα από τα  $E_x, E_y, E_z$  ικανοποιεί την ίδια γραμμική ομογενή εξίσωση που ισχύει για κύματα χωρίς διασπορά.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε ν' απαλείψουμε  
το  $\vec{E}$  από τις εξισώσεις Maxwell και να  
βρούμε την γραμμική κυματική εξίσωση για  
τις συνιστώσες του  $\vec{B}$  (άδυναμη)

Ηλεκτρομαγνητικό επίπεδο κύμα:

1. Διαδίδεται σε μία συγκεκριμένη κατεύθυνση  
που υποθέτουμε ότι είναι  $\parallel$  στο  $\hat{z}$
2. Όλες οι συνιστώσες του  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  είναι ανεξάρ-  
τητες από τις χωρικές συνιστώσες  $x, y$ .

Έτσι

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_x(z, t) \hat{x} + E_y(z, t) \hat{y} + E_z(z, t) \hat{z} \\ \vec{B} &= B_x(z, t) \hat{x} + B_y(z, t) \hat{y} + B_z(z, t) \hat{z}\end{aligned}\quad (8)$$

- Τα επίπεδα Η.Μ. κύματα είναι εγκάρσια:

$$E_z = 0, B_z = 0$$

Από εξισώσεις Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

γιατί καμία συνιστώσα των  $E, B$   
δεν εξαρτάται από  $x, y$  άρα οι  
μερικές παράγωγοι ως προς  $x, y$  δίνουν μηδέν

$\rightarrow E_z$  ανεξάρτητο του  $z$ .

Απόμα  $E_z$  ανεξάρτητο του  $t$  γιατί:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

ας πάρουμε τη  $z$ -συνιστώσα

$$\rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial t} = c^2 \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = 0 \rightarrow E_z = \text{σταθερά}$$

Όμοια από

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow B_z \text{ ανεξάρτητο του } z,$$

και από

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \text{ ανεξάρτητο του } t$$

Για ευκολία ευχόμαστε τις σταθερές μηδέν.

$\rightarrow$  Τα Η.Μ. επίπεδα κύματα είναι εγκάρσια

δηλ. τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία είναι  $\perp$  στη διεύθυνση διάδοσης  $\hat{z}$ .

• Σχέση των πεδίων  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  για επίπεδα κύματα

Μένει να ασχοληθούμε με τις υπόλοιπες συνιστώσες  $E_x, E_y, B_x, B_y$  και τις  $x, y$  συνιστώσες των εξισώσεων:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad \text{και} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$$

συνιστώσα  $x$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad (10)$$

συνιστώσα  $y$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \quad (12)$$

συνιστώσα  $y$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = - \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (11)$$

συνιστώσα  $x$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = - \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \quad (13)$$

Έτσι βλέπουμε ότι τα  $E_x, B_y$  δεν είναι ανεξάρτητα. Συνδέονται από 2 γραμμικές Δ.Ε.

1<sup>ης</sup> τάξης με μερικές παραγώγους. Το ίδιο ισχύει και για τα  $E_y, B_x$

Θέτουμε αρμονικό επίπεδο κύμα:

Αν

$$E_x = A \cos(\omega t - kz)$$

(10)  $\rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\omega}{c^2} A \sin(\omega t - kz)$

$$\underline{\underline{\omega = ck}} \quad \frac{k}{c} A \sin(\omega t - kz) \\ = \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (14)$$

και

(11)  $\rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} = -k A \sin(\omega t - kz) = \underbrace{\left(\frac{k}{\omega}\right)}_{\frac{1}{c}} \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (15)$

Από τις (14) (15) βλέπουμε ότι η μεταβολή των  $B_y$  με το  $z$  και  $t$  είναι ανάλογη με την αντίστοιχη μεταβολή για το  $E_x$ :

$$B_y = E_x / c$$

Γενικά

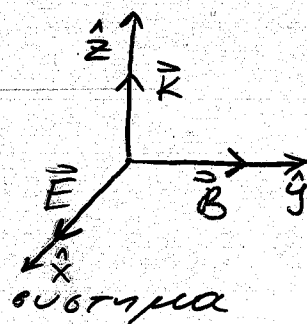
$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

όπου  $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}$  δεξιόστροφο τριβορδαγμένο σύστημα

$$|\vec{B}_0| = \frac{1}{c} |\vec{E}_0| \quad |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$$

$$|\vec{B}| = \frac{1}{c} |\vec{E}|$$



## Ροή ενέργειας

- Πυκνότητα ενέργειας  $u$  ένα Η.Μ. κύμα

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

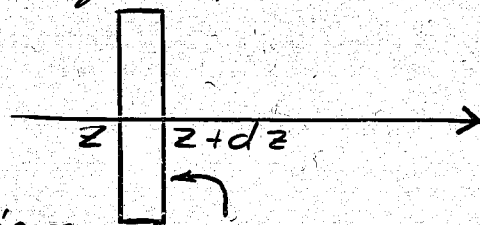
(αποδείχθηκε στο II τμήμα  
για στατικά πεδία αλλά  
ισχύει γενικότερα άσκηση)

- Μας ενδιαφέρει η ροή ενέργειας

Βρίσκουμε πρώτα την ενέργεια  $W(z, t)$  που

περιέχεται  $u$  ένα στοιχειώδη όγκο  $A \cdot dz$ :

$$W(z, t) = \frac{A \cdot dz}{2} \left( \epsilon_0 E_x^2 + \frac{B_y^2}{\mu_0} \right)$$



και ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας.  $A$ : διατομή

$$\frac{\partial W(z, t)}{\partial t} = A \cdot dz \left( \epsilon_0 E_x \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{B_y}{\mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial t} \right)$$

απαλοίφουμε τα  $\partial E_x / \partial t$  και  $\partial B_y / \partial t$

$$\left( \frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \right)$$

$$= -A \cdot dz \left( \epsilon_0 c^2 E_x \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{B_y}{\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right)$$

$$(c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0)$$

$$= -\frac{A \cdot dz}{\mu_0} \frac{\partial (E_x B_y)}{\partial z}$$

$$= -\frac{A}{\mu_0} \left[ (E_x B_y)_{z+dz} - (E_x B_y)_z \right]$$

→ Ρυθμός μεταβολής της ενέργειας που περιέ- (7)  
χεται στο στοιχειώδη όγκο (ανά μονάδα επιφάνειας)

$$\frac{1}{A} \frac{\partial W(z, t)}{\partial t} = S_z(z, t) - S_z(z + dz, t)$$

όπου

$$S_z(z, t) \equiv \frac{1}{\mu_0} E_x(z, t) B_y(z, t) = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})_z$$

Η ποσότητα  $S_z(z, t)$  παριστάνει το στιγμιαίο  
ρυθμό ροής της ενέργειας στη κατεύθυνση  $+z$   
ανά μονάδα επιφάνειας στη θέση  $z$ .

Αν υπάρξει κάποια αύξηση ενέργειας μέσα  
στο στοιχειώδη όγκο θα οφείγεται στη δια-  
φορά μεταξύ της εισερχόμενης και εξερχόμενης  
ενέργειας.

• Η γενική έκφραση του διανύσματος  
ροής είναι:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad \text{Διάνυσμα Poynting}$$

- 8  
• Πυκνότητα και ροή ενέργειας σε οδεύον κύμα  
Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικά πολωμένο κύμα  
που διαδίδεται στην κατεύθυνση  $+z$ :

$$\vec{E} = E_x \hat{x} \quad ; \quad \vec{B} = B_y \hat{y} \quad \text{όπου} \quad E_x = c B_y$$

$$\rightarrow E_x = E_0 \cos(\omega t - kz) \quad , \quad B_y = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz)$$

$$\text{Πυκνότητα ενέργειας: } \frac{\epsilon_0 \mu_0 E_x^2 + B_y^2}{2 \mu_0} = \frac{1}{c^2 \mu_0} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)$$

$$\text{Ροή ενέργειας: } S_z = \frac{E_x \cdot B_y}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz)$$

$$\rightarrow \text{Ροή ενέργειας} = (\text{πυκνότητα ενέργειας}) \times c$$

- Πυκνότητα και ροή ενέργειας σε στάσιμο κύμα,  
(άκωστη)

Ροή ορμής σε οδεύον επίπεδο κύμα  
Πίεση ακτινοβολίας

Για οδεύον Η.Μ. κύμα:

$$\vec{P} = \frac{W}{c} \hat{z} \quad (1) \quad , \quad \hat{z} \parallel \text{στη κατεύθυνση διάδοσης}$$

↑  
ορμή

Η (1) αποδεικνύεται γιατί απλά αν δεχτούμε

9  
ότι το φως διαδίδεται κατά συμμετρικώς  
πακέτα ενέργειας, τα «φωτόνια».

Ενέργεια σχετικιστικού σωματιδίου:

$$W = [(cp)^2 + (Mc^2)^2]^{1/2} \quad (2)$$

Για  $M=0$  όπως στα φωτόνια  $\rightarrow (1)$

- Αλλά θα πρέπει να μπορούμε να αποδείξουμε την (1) και μαθηματικά (άσκηση)
- Πίεση Η.Μ. ακτινοβολίας: ασκήσεις 7.13, 7.14, 7.15

### Στροφορμή σε οδύον επίπεδο κύμα

Το οδύον επίπεδο κύμα μπορεί να προσεγγίσει και στροφορμή. Για να γίνει αυτό το κύμα θα πρέπει να δέσει ένα φορτίο  $q$  σε κυρτή κύμηση. Αυτό γίνεται αν τα πεδία είναι κυρτά προσημένα.

Ας θεωρήσουμε οδύον επίπεδο κύμα που διαδίδεται στη  $+z$ .

Το  $\vec{E}$  έχει σταθερό μέτρο και (για σταθερό  $z$ ) περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  γύρω από τον άξονα  $z$ .

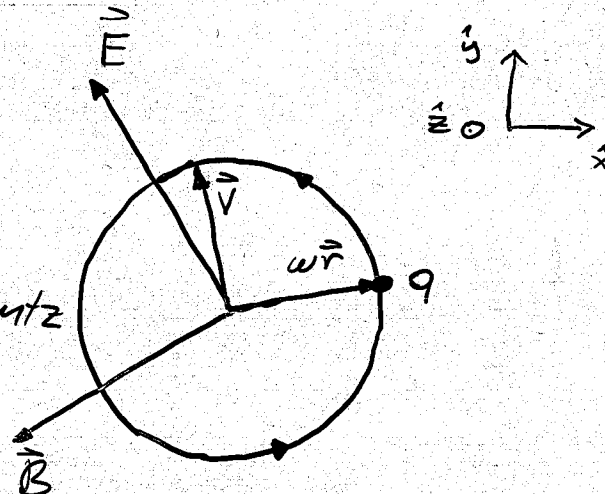
Το  $\vec{B}$  όπως σε όλα τα οδεύοντα κύματα:

$$c \vec{B} = \hat{z} \times \vec{E}$$

Η ροπή  $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{Δυν. Lorentz}$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$



άσκηση  
βλ. βελ. 397

$$\vec{J} = \hat{z} \frac{W}{\omega}$$

ή

$$\vec{J} = \hat{\omega} \frac{W}{\omega} //$$

# Ακτινοβολία σημειακού φορτίου

①

Εξισώσεις Maxwell όταν υπάρχουν πηγές:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (1) \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3) \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} \quad (4)$$

(στο κενό  $\rho, \vec{J} = 0$ )

Βρήκαμε ήδη σχέσεις  $\vec{E}, \vec{B}$  σε μεγάλες

αποστάσεις από τη πηγή: επίπεδα κύματα

- Θα βρούμε με τι τρόπο τα ακτινοβορούμενα κύματα εξαρτώνται από τη κίνηση της πηγής.

Δύο είναι οι όροι πηγών στις εξισώσεις:  $\rho, \vec{J}$

Αλλά αυτοί οι όροι δεν είναι ανεξάρτητοι:

(1), (4),  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$   
άσκηση  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  διατήρηση φορτίου

Αρα αρκεί να εξετάσουμε τις φυσικές συνέπειες

της ύπαρξης και κίνησης του φορτίου  $\rho$ .

•  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \longleftrightarrow$  Νόμο Gauss ( $\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$ )

$\leadsto \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}$  για ακίνητο φορτίο  $q$

## Κινούμετο φορτίο:

Θεωρούμε  $q$  σε ηρεμία από  $t = -\infty$  μέχρι  $t = 0$  στην αρχή αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

Τη στιγμή  $t = 0$  επιταχύνεται στη κατεύθυνση  $+\hat{x}$  με επιτάχυνση  $a$  για χρονικό διάστημα  $\Delta t$ .  
Έπειτα συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα

$$v = a \Delta t$$

Πριν από το  $t = 0$  έχουμε

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}, \quad \vec{B} = 0$$

με δυναμικές γραμμές του  $\vec{E}$  αυτινικά απομακρυνόμενες από το  $q$ .

Η απότομη επιτάχυνση τη  $t = 0$  προκαλεί σπάσιμο στις δυναμικές γραμμές του  $\vec{E}$  και συγχρόνως δημιουργεί δυναμικές γραμμές για το  $\vec{B}$ .

Ας θεωρήσουμε  $t \gg \Delta t$

Τα  $r \gg ct$  δεν ξέρουν ακόμα τη πληροφορία για την επιτάχυνση.

Από το  $r' \ll c (t - \Delta t)$  το σπάσιμο έχει ήδη περάσει άρα :

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

← Βρίσκεται στο σημείο παρατήρησης πάνω στην ευθεία που ενώνει τη στιγμιαία θέση του φορτίου με το σημείο παρατήρησης.

$\beta = v/c$ ,  $\theta$ : γωνία μεταξύ  $\vec{r}$  και  $\vec{E}$

Θεωρούμε  $v \ll c \rightarrow \beta \approx 0$

○  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^2}$

με  $\vec{r}' = r' \hat{r}'$  το διάνυσμα που ενώνει τη στιγμιαία θέση του φορτίου με το σημείο παρατήρησης

Ας δούμε τώρα την  $\vec{E}$  πάνω στο σπάσιμο.

Θεωρούμε  $t \gg \Delta t \rightarrow vt \gg \frac{1}{2} a(\Delta t)^2$

Σαν  $t$  διαγέμε τη στιγμή που το σπάσιμο

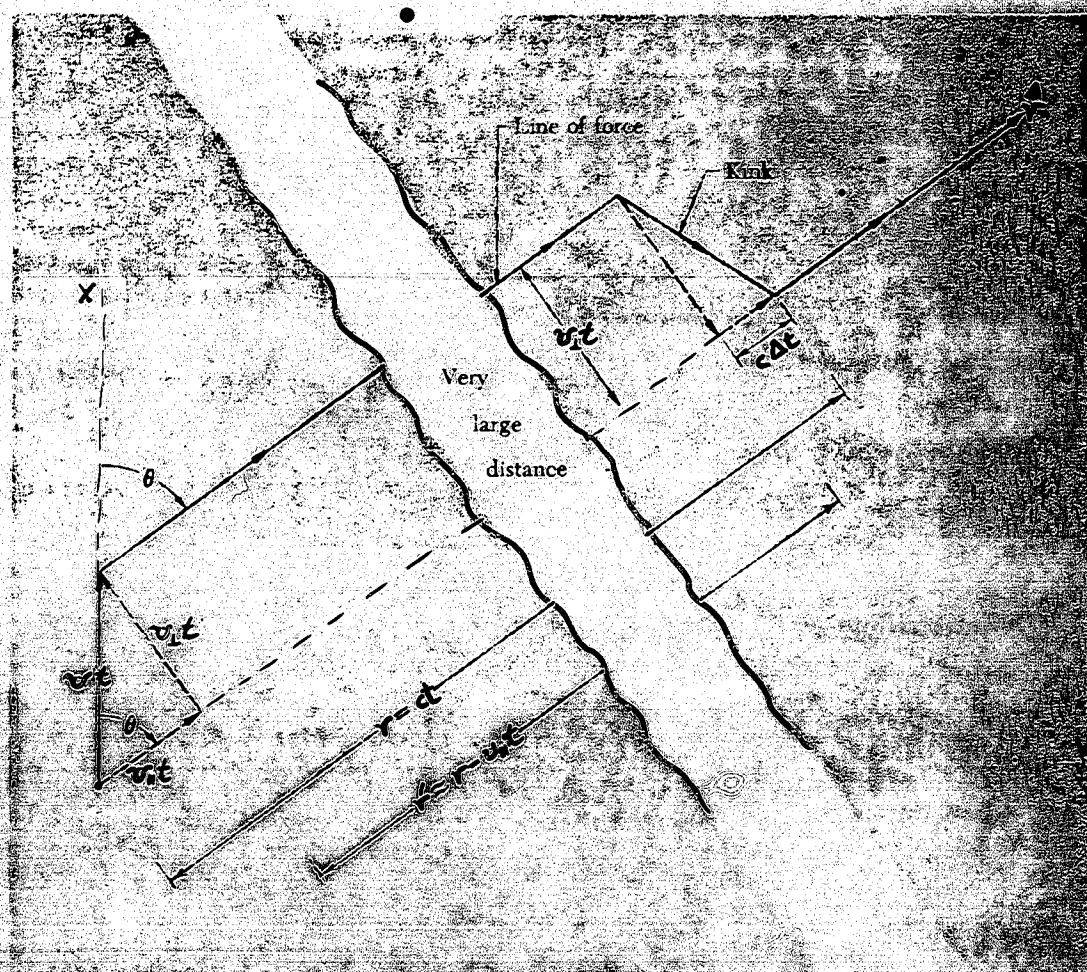
○ αρχίζει να βαρύνει το χώρο πέρα από το σημείο παρατήρησης. Άρα  $r \approx ct$

Αν θεωρήσουμε τώρα ένα σημείο  $r'$  αριστερά πίσω από το σπάσιμο

Επειδή  $v \ll c \rightarrow vt \ll r \approx ct$

$\rightarrow \vec{r}' \sim \vec{r}, \quad r' = r - vt \cos \theta = r(1 - \frac{v}{c} \cos \theta) = r$





(4)

Ονομάζουμε  $E_{\perp}$ ,  $E_{\parallel}$  τις συνιστώσες  $\vec{E}_{\perp, \parallel}$  στον

Από ομοιότητα τριγώνων:

$$\rightarrow \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{v_{\perp} \cdot t}{c \cdot \Delta t}$$

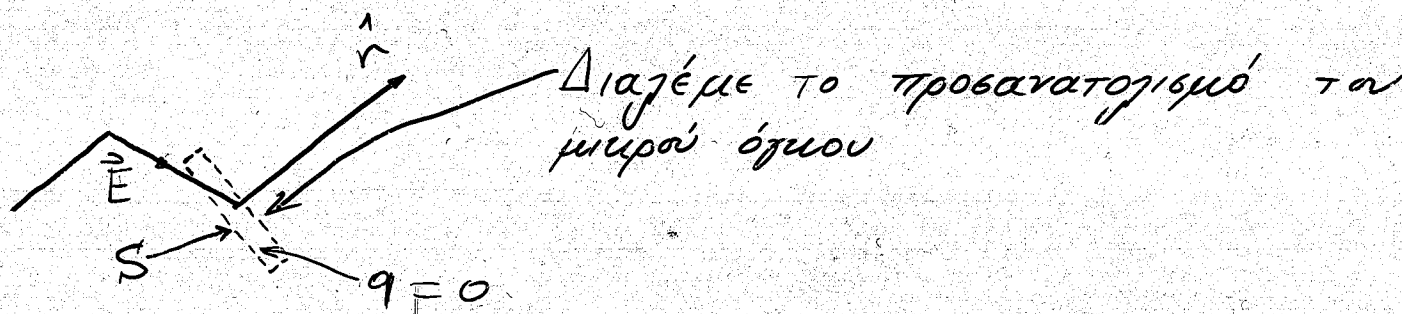
και επειδή

$$v_{\perp} = a_{\perp} \Delta t, \quad t = r/c$$

$a_{\perp}$ : μέτρο επιτάξεως  
συνιστώσας ms  $\vec{a}$

$$\rightarrow \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{(a_{\perp} \Delta t)(r/c)}{c \Delta t} = a_{\perp} \cdot \frac{r}{c^2}$$

Για να βρούμε  $E_{\parallel}$  εφαρμόζουμε το νόμο Gauss.



N Gauss  $\rightarrow E_{\parallel} \cdot S = E_r \cdot S$

$$\rightarrow E_{\parallel} = E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Αν επαναλάβουμε τον ίδιο συλλογισμό με το μικρό όγκο τοποθετημένο στο πίσω μέρος του σταδίου.

$$\rightarrow E_{\parallel} = E_{r'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \frac{r'}{r^2}} \equiv E_r$$

όπως πριν.

(5)

Πεδίο ακτινοβολίας :

$$\rightarrow E_{\perp} = \left( a_{\perp} \frac{r}{c^2} \right) E_{\parallel} = a_{\perp} \frac{r}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q a_{\perp}}{4\pi\epsilon_0 r c^2}$$

Το  $E_{\perp}(r, t)$  είναι αντίθετο στην κατεύθυνση που έχει το διάνυσμα  $a_{\perp}$  τη στιγμή  $t' = t - \frac{r}{c}$

$$\rightarrow \vec{E}_{\text{ακτινοβολίας}}(\vec{r}, t) = - \frac{q \vec{a}_{\perp}(t')}{4\pi\epsilon_0 r c^2}$$

$$t' = t - \frac{r}{c}$$

↑  
προσοχή

Σημ: Η  $E_r$  δε μεταφέρει καμιά πληροφορία αφού είναι η ίδια λίγο πριν και λίγο μετά το σπάσιμο. Γι' αυτό το πεδίο ακτινοβολίας αναφέρεται μόνο στο εφευρόμενο πεδίο πάνω στο σπάσιμο.

Προερχομενά έχουμε επίπεδο κύμα για μεγάλα  $r$ . Έτσι

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{r} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

# Ακτινοβολούμενη ενέργεια από σημειακό φορτίο

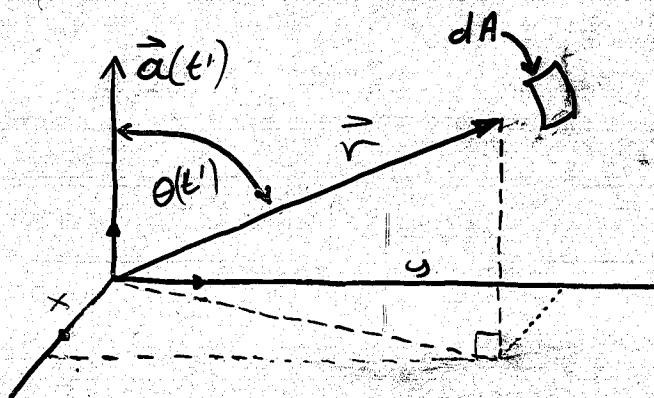
$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad \text{Διάγραμμα Poynting (ροή ενέργειας)}$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} [\vec{E}(\vec{r}, t)]^2 \hat{r} = \frac{1}{\mu_0 c} \left[ \frac{-q \vec{a}_\perp(t')}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \right]^2 \hat{r}$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} [\vec{a}_\perp(t')]^2 \frac{\hat{r}}{4\pi r^2} \quad (1) \quad \left( \text{J/m}^2 \cdot \text{s} \right)$$

Η ροή ενέργειας μέσα από την απειροστή επιφάνεια  $dA$  που βρίσκεται στο  $\vec{r}$  και καλύπτει

$$dP(\vec{r}, t) = |\vec{S}(\vec{r}, t)| dA = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \vec{a}_\perp^2(t') \frac{dA}{4\pi r^2} \quad (2)$$



$$\vec{a}_\perp^2(t') = \vec{a}^2(t') \sin^2 \theta(t') \quad (3)$$

$$\rightarrow dP(\vec{r}, t) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \vec{a}(t') \cdot \sin^2 \theta(t') \left( \frac{dA}{4\pi r^2} \right) \quad (4)$$

Διαφορίων στερεά γωνία

Θα ολοκληρώσουμε τις όγκες τις διευθετήσεις του  $\vec{r}$  για σταθερά  $t, r$

$$P(t) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \vec{a}^2(t) \overline{\sin^2 \theta(t)} \quad (5)$$

$$\text{όπου} \quad \overline{\sin^2 \theta(t)} \equiv \int \sin^2 \theta(t) \frac{dA}{4\pi r^2}$$

Αλλά

$$\sin^2 \theta = \frac{x^2 + y^2}{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2}}$$

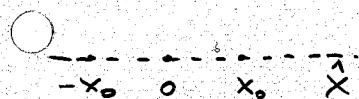
Ο υπολογισμός της μέσης τιμής των  $x^2, y^2, z^2$  για όλες τις διευθύνσεις δηλ. για όλες τις τιμές του  $\theta$  κρατώντας το  $r$  σταθερό πάνω στη σφαίρα θα πρέπει να δώσει το ίδιο αποτέλεσμα

$$\rightarrow \overline{\sin^2 \theta} = \frac{2}{3} \quad (6)$$

$$(5), (6) \rightarrow P(\ell) = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{x}^2(\ell') \quad \left\| \begin{array}{l} \text{Οριμή ακτινοβολού-} \\ \text{μενη ισχύς} \end{array} \right.$$

$$\ell' = \ell - \frac{r}{c}$$

παράδειγμα: Αρμονικά ταλαντούμενο φορτίο



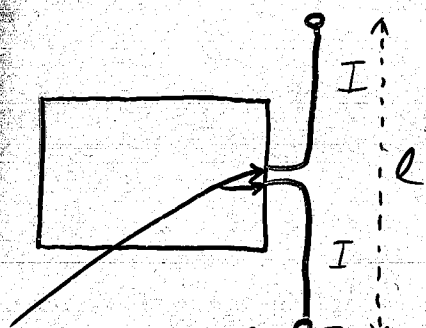
$$x(\ell') = x_0 \cos \omega t'$$

$$\ddot{x}(\ell') = \frac{d^2 x(\ell')}{dt'^2} = -\omega^2 x(\ell')$$

$$\rightarrow P = \frac{q^2 \omega^4 \langle x^2(\ell) \rangle}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

εφαρμογή: γιατί είναι μικρό ο ουράνιος, (άδυναμι)

H.M. αυτινοβορία από ευθύγραμμη ραδιοφωνική  
αντένα σε απειρόριστο κενό.



δεν αυτινοβορούν  
(είναι περιττήματα)

πυκνωτές  
για να συζέγουν  
το φορτίο που  
συσσωρεύεται από  
το ρεύμα I

Θεωρούμε το ραδιοφωνικό  
πομπό και τη κεραία του σχήμ.

Υποθέτουμε ότι το ρεύμα

είναι ομοιόμορφο σε

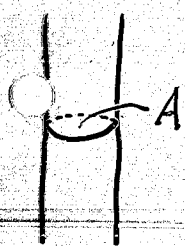
ολόκληρο το μήκος  $l$

της κεραίας. (Αγνοούμε

τη δράση του φορτίου στα

άκρα των αγωγών)

Υποθέτουμε ότι  $l \ll \lambda \ll r$



$$\vec{I} = N \cdot q \cdot \underset{\text{ταχύτητα}}{\vec{v}} \cdot A \rightarrow \frac{d\vec{I}}{dt} = N \cdot q \cdot \underset{\text{επιτάχυνση}}{\vec{a}} \cdot A$$

$$l \frac{d\vec{I}}{dt} = \underbrace{[N \cdot q \cdot A \cdot l]}_{Q}$$

$Q$  : ολικό φορτίο αγωγιμότητας

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{l (d\vec{I}/dt)_\perp(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}, \quad t' = t - \frac{r}{c}$$

$$\rightarrow P = \frac{l^2 (dI/dt)^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad \text{οριική αυτινοβορούμενη ισχύς}$$

$$\text{Αν } I = I_0 \cos \omega t \rightarrow P = \frac{l^2 \omega^2 I^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = Z I^2$$

$$\text{όπου } Z = \left(l \cdot \frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c} = (k \cdot l)^2 \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c}$$

# Πόρωση

①

Η ευθυευρισμένη σχέση που συνδέει τα πράτη και τις φάσεις των δύο ανεξάρτητων εχμάρων πεδίων λέμε ότι περιγράφει τη κατάσταση πόρωσης.

- Η πόρωση έχει νόημα για κύματα που έχουν τουλάχιστο δύο ανεξάρτητες διευδύνσεις πόρωσης π.χ. για ηχητικά κύματα δεν έχει νόημα.

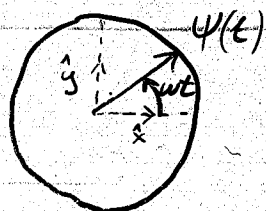
## Πόρωση στα εχμάρια κύματα:

Εχμάρια κύματα:  $\vec{\Psi}(z, t) = \Psi_x(z, t) \hat{x} + \Psi_y(z, t) \hat{y}$

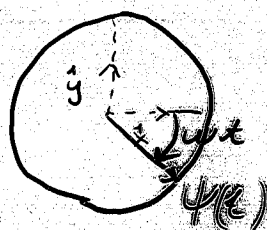
Είδαμε ότι τα Η.Μ. κύματα είναι πραγματικά εχμάρια.

Γραμμική πόρωση: Αν η απομάκρυνση  $\vec{\Psi}(z, t)$  γίνεται  $\parallel \hat{e}$  όπου  $\hat{e} \perp \hat{z}$  (διεύθυνση διάδοσης)

Κυκλική πόρωση: Αν η εχμάρια κίνηση γίνεται για κάποιο  $z$  ο' ένα κύκλο.



κυκλική πόρωση  
και στροφορμή  
 $\parallel +\hat{z}$



κυκλική πόρωση  
και στροφορμή  
 $\parallel -\hat{z}$

Γενική ελαρσσια πόςωσ (π.χ. Η.Μ.). Για σταθερό z :

$$\vec{E} = \hat{x} E_1 \cos(\omega t + \phi_1) + \hat{y} E_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$E_x = E_1 \cos \phi_1 \cos \omega t - E_1 \sin \phi_1 \sin \omega t$$

$$E_y = E_2 \cos \phi_2 \cos \omega t - E_2 \sin \phi_2 \sin \omega t$$

$$\rightarrow \cos \omega t = \frac{\begin{vmatrix} E_x & -E_1 \sin \phi_1 \\ E_y & -E_2 \sin \phi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_1 \cos \phi_1 & -E_1 \sin \phi_1 \\ E_2 \cos \phi_2 & -E_2 \sin \phi_2 \end{vmatrix}} = \frac{-(E_2 \sin \phi_2) E_x + (E_1 \sin \phi_1) E_y}{E_1 E_2 \sin(\phi_1 - \phi_2)}$$

$$\rightarrow \sin \omega t = \frac{\begin{vmatrix} E_1 \cos \phi_1 & E_x \\ E_2 \cos \phi_2 & E_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_1 \cos \phi_1 & -E_1 \sin \phi_1 \\ E_2 \cos \phi_2 & -E_2 \sin \phi_2 \end{vmatrix}} = \frac{-(E_2 \cos \phi_2) E_x - (E_1 \cos \phi_1) E_y}{E_1 E_2 \sin(\phi_1 - \phi_2)}$$

αγώνουμε στο τετράγωνο και αδροίουμε :  $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$

$$\rightarrow \frac{E_2^2 E_x^2 + 2 E_1 E_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) E_x E_y + E_1^2 E_y^2}{E_1^2 E_2^2 \sin^2(\phi_1 - \phi_2)} = 1$$

Εξίσωση κυνιωνίς  
τομής  
για τα  $E_x, E_y$

• Αν  $\phi_1 - \phi_2 = 0$  ή  $\pi \rightarrow E_2^2 E_x^2 \pm 2 E_1 E_2 E_x E_y + E_1^2 E_y^2 = 0$

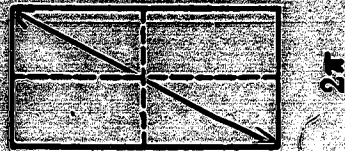
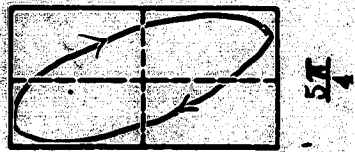
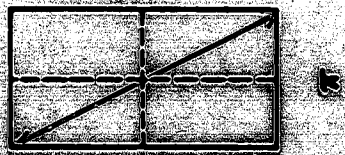
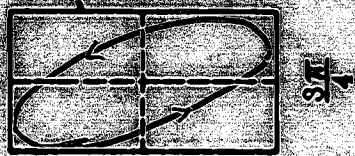
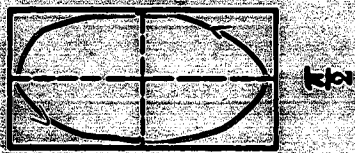
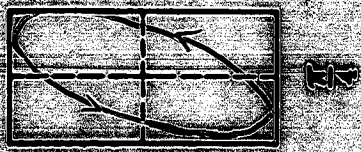
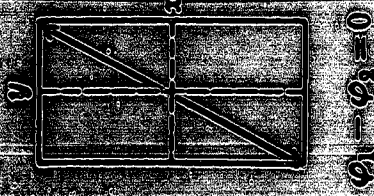
$$\rightarrow (E_2 E_x \pm E_1 E_y)^2 = 0 \rightarrow \frac{E_x}{E_y} = \pm \frac{E_1}{E_2}$$

γραμμική πόςωσ

• Αν  $\phi_1 - \phi_2 = \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} = 1$

ελλειπτική πόςωσ

Αν επί πόνον  $E_1 = E_2 \rightarrow$  κυνιωνή πόςωσ



# Παραγωγή προηγμένων ελαρσίων κυμάτων

## 1. Πόρωση λόγω ευρετικώς ευπομπής

παράδειγμα: Ένα φορτίο  $q$  κινείται πάνω στο επίπεδο  $xy$  και διαγράφει τη καμπύλη

$$\vec{\Psi}(t) = \hat{x} x(t) + \hat{y} y(t)$$

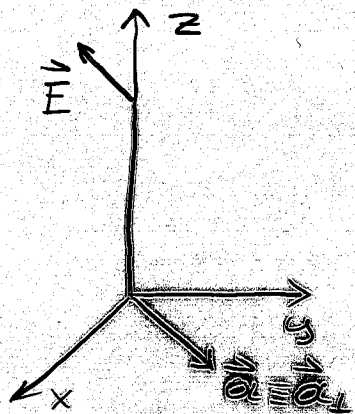
όπου 
$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega t + \phi_1) \\ y(t) &= y_0 \cos(\omega t + \phi_2) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Παραμετρικές} \\ \text{εξισώσεις της} \\ \text{πιο γενικής ελλείψης} \\ \text{στο } xy \text{ επίπεδο} \end{array}$$

Για το μακρινό πεδίο απιροβολίας

που επιπρόκειται στη κατεύθυνση  $\hat{z}$

έχουμε:

$$\vec{E}(z, t) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z} \frac{\vec{a}_\perp(t - z/c)}{c^2}$$



αλλά για την κατεύθυνση  $\hat{z}$  έχουμε  $\vec{a}_\perp = \vec{a}$

και αφού

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{\Psi}(t)}{dt^2} = -\omega^2 \vec{\Psi}(t)$$

$$\rightarrow \vec{E}(z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\omega^2}{z c^2} \vec{\Psi}(t - z/c) \equiv A \vec{\Psi}(t - z/c)$$

δηλ. το ηλεκτρικό πεδίο του Η.Μ. κύματος που εκπέμπεται είναι ανάλογο της καθυστέρησης κίνησης του φορτίου που ακτινοβολεί.

Ετσι συνδέεται ποσοτικά το είδος της κίνησης ενός φορτίου με την κατάσταση πόρωσης της Η.Μ. ακτινοβολίας που εκπέμπει.

- Γραμμική πόρωση: Έστω ότι το  $q$  εκτελεί αρμονική ταλάντωση σε μία ορισμένη διεύθυνση

δηλ.  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$

$$\rightarrow \vec{\psi}(t) = (x_0 \hat{x} + y_0 \hat{y}) \cos(\omega t + \phi)$$

$\Rightarrow$  το εκπεμπόμενο ηλεκτρικό πεδίο ταλαντώνεται πάντα στο επίπεδο που ορίζεται από τις διευθύνσεις

$\hat{z}$  και  $x_0 \hat{x} + y_0 \hat{y}$ :

$$\vec{E}(z, t) = \frac{q \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^2 z} (x_0 \hat{x} + y_0 \hat{y}) \cos(\omega t - kz + \phi), \quad k = \frac{\omega}{c}$$

δηλ. είναι γραμμικά πολωμένο

Η επαγωγή αυτού του κύματος με ένα άρρο

απαράγωγο, που διαδίδεται στο  $\epsilon = \frac{1}{2}$  (δηλ. έχει

5  
 όρισμα  $\omega t + kz + \phi$ ) οδηγεί σ' ένα στάσιμο γραμμικά πολωμένο κύμα:

$$\vec{E}(z, t) = \left( \frac{q \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^2 z} \right) \cdot 2 (x_0 \hat{x} + y_0 \hat{y}) \cos(\omega t + \phi) \cos kz$$

(αγωγή)

- Κυκλική πόρωση: Έστω ότι το  $q$  κινείται πάνω σ' ένα κύκλο με ακτίνα  $x_0$  κατά τη διεύθυνση  $\phi$ .

$$x_0 = y_0, \quad \phi_1 = 0, \quad \phi_2 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{\Psi}(t) = x_0 (\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t)$$

$\Rightarrow \vec{E}$  περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  γύρω από τον άξονα  $z$ , έχει σταθερό μήκος και το άκρο του διαγράφει έργο με σταθερή διάμετρο

$$\vec{E}(z, t) = \frac{q \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^2 z} x_0 \left( \hat{x} \cos(\omega t - kz) + \hat{y} \sin(\omega t - kz) \right) \quad (1)$$

δηλ. έχουμε κύμα κυκλικά πολωμένο στη  $+\frac{1}{z}$

Αν το φορτίο περιστρέφεται αντίθετα δηλ.

$$\vec{\Psi}(t) = x_0 (\hat{x} \cos \omega t - \hat{y} \sin \omega t)$$

θα διαδιδόταν κύμα κυκλικά πολωμένο στη  $-\frac{1}{z}$

Η επαλληλία του κύματος (1) και ενός ίδιου που διαδίδεται στη διεύθυνση  $-\hat{z}$  (δηλ. με όρισμα  $\omega t + kz$ ) οδηγεί σε ένα στάσιμο κύμα, κυματικά προσημένο στο άξονα  $+\hat{z}$  (άξονα):

$$\vec{E}(z, t) = \frac{q \omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 z} 2x_0 \cos(kz) (\hat{x} \cos\omega t + \hat{y} \sin\omega t)$$

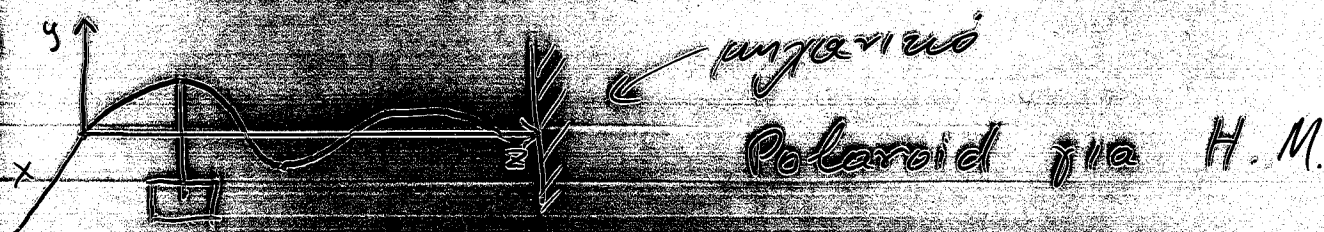
• Ελλειπτική πόζωση:

Στη γενική περίπτωση όπου τα  $x_0, y_0$  είναι διαφορετικά και τα  $\phi_1, \phi_2$  αλληλόγενα το άρο του  $\vec{E}$  διαγράφει μία έριμα με ελλειπτική διάμετρο.

$$\vec{E}(z, t) = \frac{q \omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 z} \left[ \hat{x} x_0 \cos(\omega t - kz + \phi_1) + \hat{y} y_0 \cos(\omega t - kz + \phi_2) \right]$$

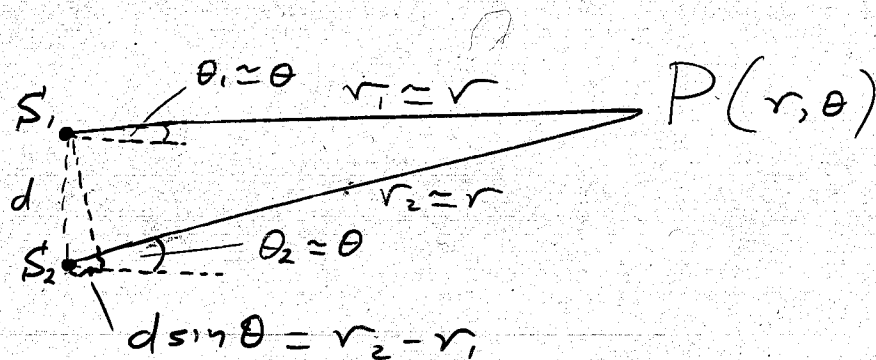
συμμετα με η μαθηματική περιγραφή που και-  
ναι με την ερώτη.

## 2. Πόζωση λόγω ευρετικώς απορρόφησης



# Συμβολή

(7)



Θεωρούμε δύο σημειακές πηγές που εκπέμπουν Η.Μ. κύματα. Στην πράξη οι πηγές  $S_1, S_2$  μπορούν να είναι δύο κεραίες ή δύο σχισμές κιάδες στο επίπεδο του σχήματος.

Θεωρούμε ότι η κίνηση των σημειακών φορτίων  $q$  κάθε πηγής είναι:

$$y_i = y_0 \cos(\omega t + \phi_i) \quad , \quad i = 1, 2.$$

Επομένως τα  $E_i$  που φθάνουν στο σημείο  $P$  τη χρονική στιγμή  $t$ , από κάθε πηγή είναι:

$$E_i(t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \frac{d^2 y_i(t'_i)}{dt'^2}}{r_i \cdot c^2} = \frac{\omega^2 q y_0}{4\pi\epsilon_0 r_i c^2} \cos(\omega t'_i + \phi_i)$$
$$t'_i = t - r_i/c$$

Στη περίπτωση ~~μαθηματικό~~ ~~πεδίου~~ έχουμε  $r_1 \approx r_2 \approx r$  και  $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta$ , επομένως το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο  $P$ , με πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$

(αρχή συντεταγμένων στο μέσο του  $S_1, S_2$  και  $\textcircled{8}$   
πομπός άξονας  $\perp S_1, S_2$ ) είναι:

$$E(r, \theta, t) = E_1(t) + E_2(t) = A(r) \left[ \cos(\omega t - kr_1 + \phi_1) + \cos(\omega t - kr_2 + \phi_2) \right]$$

όπου

$$A(r) = \frac{q\omega^2}{4\pi\epsilon_0 r c^2} y_0, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

(Σημ. στα ορίσματα των συνιστωσών δεν αντικα-  
ταστήσαμε  $r_1 = r_2 = r$  αφού εκεί προφανώς εμφανί-  
ζεται και η διαφορά  $r_2 - r_1$  που δεν είναι μηδε-  
νική)

$$\left( \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b) \right)$$

$$\rightarrow E(r, \theta, t) = 2 A(r) \cos \left( k \frac{r_2 - r_1}{2} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \cdot \cos \left( \omega t - k \frac{r_1 + r_2}{2} + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot A(r) \cos \left( \frac{1}{2} k d \sin \theta + \phi_- \right) \cdot \cos \left( \omega t - k \cdot r + \phi_+ \right)$$

$$\text{όπου } \phi_{\pm} = \frac{1}{2}(\phi_1 \pm \phi_2) \text{ και από το σχήμα: } r_2 - r_1 = d \cdot \sin \theta$$

$$\text{'Έτσι έχουμε πάλι } \sim \cos(\omega t - kr + \phi_+)$$

$$\text{που το πρώτος του } 2 A(r) \cos \left( \frac{1}{2} k d \sin \theta + \phi_- \right)$$

εξαρτάται δραστηρικά από τη γωνία  $\theta$ .

• Μέση ένταση του συνισταμένου κύματος:

(9)

Όπως ξέρουμε

$$\langle S \rangle = c \cdot \epsilon_0 \langle \vec{E}^2 \rangle \quad \text{όπου} \quad \vec{E} = \hat{y} E(r, \theta, t)$$

$$\rightarrow \langle S \rangle = c \cdot \epsilon_0 \cdot 4 A^2(r) \cos^2\left(\frac{1}{2} k d \sin \theta + \phi_-\right) \cdot \langle \cos^2(\omega t - k r + \phi_+) \rangle$$

Ετσι η μέση τιμή  $\langle S \rangle \equiv I(\theta)$  ένταση είναι

$$I(\theta) = I_{\max} \cos^2\left(\frac{1}{2} k d \sin \theta + \phi_-\right)$$

• όπου  $I_{\max} = 2 c \epsilon_0 A^2(r)$

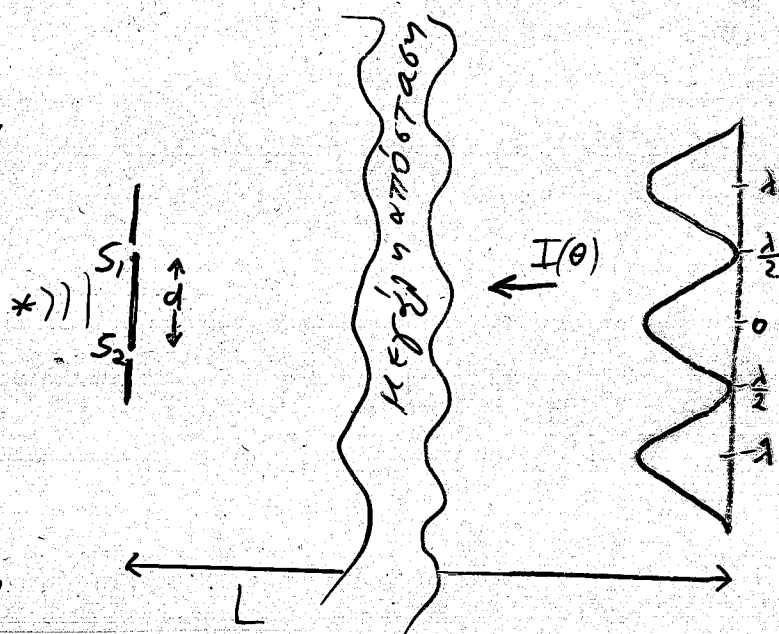
• Εικόνα συμβολής

Για απρότητα έστω ότι

η διαφορά φάσης  $\phi_-$  των  
δύο πηγών είναι μηδέν

δηλ. π.χ. ότι και οι δύο  
διεχέρονται από το ίδιο

αίτιο. Τότε (για σταθερό  $r$ )



$$\rightarrow I(\theta) = I_{\max} \cos^2\left(\frac{1}{2} k d \sin \theta\right) = I_{\max} \cos^2\left(\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}\right) \quad ||$$

Βλέπουμε δηλ. πάνω σε μία οδόνη τοποθετημένη σε  
μεγάλη απόσταση από τις σχισμές παρατηρούμε φωτεινές  
και σκοτεινές λωρίδες (υποβελών) σε κανονικές  
αποστάσεις.

Τα μέγιστα φωτισμού αντιστοιχούν σε γωνίες  $\theta$  για τις οποίες

$$\frac{d \cdot \sin \theta}{\lambda} = n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\rightarrow \sin \theta = n \frac{\lambda}{d}$$

Ενώ τα ελάχιστα σε γωνίες για τις οποίες

$$\frac{d \cdot \sin \theta}{\lambda} = n + \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \sin \theta = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{d}$$

Κοντά στη  $\theta \approx 0$ :  $\sin \theta \approx \theta$  η γωνιακή απόσταση μεταξύ διαδοχικών μεγίστων δίνει

$$\theta_0 \approx \frac{\lambda}{d}$$

Η γωνιακή απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων είναι:

$$x_0 \approx L \cdot \theta_0 \approx L \cdot \frac{\lambda}{d}$$

5) Για χορδή έχουμε

Υποδείξεις για  
αδυναμίες 4<sup>η</sup> ερώτ. ①

$$\rho \Delta z \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = - \underbrace{T \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_z + T \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z+\Delta z} - \psi \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \Delta z}_{T \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \Delta z}$$

$\cos(\omega t - kz) \rightarrow e^{i(\omega t - kz)}$  και κρατάμε το Re

1)  $C_{\pm \omega} = (B_{\mp} \mp A_{\mp}) / 2$

$C(\pm \omega) = B(\omega) \mp i A(\omega)$

7)  $P = f(\rho) \quad \left( P = \rho \frac{RT}{M} \right)$

Ανάπτυξη κατά Taylor:

$P = P_0 + (\rho - \rho_0) \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_0 + \frac{1}{2} (\rho - \rho_0)^2 \left( \frac{d^2 P}{d\rho^2} \right)_0 + \dots \quad (1)$   
για μικρές μεταβολές

$P = P_0 + K \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)$  Νόμος Hooke (2)

οπότε  $K \equiv \rho_0 \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_0$  (3) μέτρο ελαστικότητας όγκου  
( $P \cdot V^\gamma = \text{const} \rightarrow P = C \cdot \rho^\gamma \rightarrow dP/d\rho = \gamma C \rho^{\gamma-1} \dots$ )

Διατήρηση μάζας  $\rho \cdot A (dz + d\xi) = \rho \cdot A \cdot dz$   
με ανίπωση  $\rho - \rho_0 = -\rho_0 \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \quad (4)$

(4), (2)  $\rightarrow P = P_0 - K \frac{\partial \xi}{\partial z}$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \Gamma \frac{\partial \psi}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (2)$$

$$\psi = \operatorname{Re} \left\{ D \exp[i(\omega t - kz)] \right\} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \operatorname{Re} \left\{ -\omega^2 D \exp[i(\omega t - kz)] \right\} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \operatorname{Re} \left\{ -k^2 D \exp[i(\omega t - kz)] \right\} \quad (5)$$

Η συνθήκη ώστε οι μιγαδικές μορφές (4) (5) να επομένως και τα πραγματικά τους μέρη να ικανοποιούν την (2) είναι:

$$\omega^2 - i\Gamma\omega = v^2 k^2 \quad (6)$$

Επειδή το  $\omega$  είναι πραγματικό πρέπει το  $k^2$  και επομένως το  $k$  να είναι μιγαδικό!

$$k = K - i\kappa, \quad K, \kappa \text{ πραγματικά}$$

$$\begin{aligned} \psi &= \operatorname{Re} \left\{ D \exp[i(\omega t - Kz + i\kappa z)] \right\} \\ &= \exp(-\kappa z) \operatorname{Re} \left\{ D \exp[i(\omega t - Kz)] \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

3  
Για να βρούμε πως τα  $K, \kappa$  εξαρτώνται  
απο τη συχνότητα, μπορούμε να λύσουμε  
την (6) σε πραγματικό και φανταστικό μέρος:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= v^2 (K^2 - \kappa^2) \\ \Gamma \omega &= 2 v^2 K \kappa \end{aligned} \right\} \rightarrow K, \kappa$$

Για  $\Gamma/\omega \ll 1$

$$\circ \quad \omega^2 (1 - i \Gamma/\omega) = v^2 \kappa^2$$

$$\leadsto \omega (1 - i \Gamma/2\omega) \approx \pm v (K - i \kappa)$$

Χρησιμοποιώντας πραγμ., φαντ.

$$K \approx \pm \omega/v, \quad \kappa \approx \pm \Gamma/2v$$

Για  $\Gamma/\omega \gg 1$

$$\circ \quad \leadsto -i \Gamma \omega \approx v^2 (K - i \kappa)^2$$

$$\leadsto K \approx \kappa \approx \pm |(\Gamma \omega / 2 v^2)^{1/2}|$$