

Μη Σχετικιστική Κβαντομηχανική

Υπενθυμίζουμε τη συνταγή που θέτει την εξίσωση *Schrödinger* σε αντιστοιχία με τη μη-σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (1)$$

μέσω της αντικατάστασης των E , p με διαφορικούς τελεστές:

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad p \rightarrow -i \nabla \quad (2)$$

Η εξίσωση τελεστών που προκύπτει εννοείται ότι δρα πάνω στη (μιγαδική) κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t)$. Δηλαδή (με $\hbar \equiv 1$):

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 \psi = 0 \quad (3)$$

όπου ερμηνεύουμε την ποσότητα $\rho = |\psi|^2$ ως την πυκνότητα πιθανότητας ($|\psi|^2 dx$ - πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο σε στοιχείο όγκου $d^3 x$).

Συχνά μελετάμε κινούμενα σωματίδια, π.χ. στη σύγκρουση σωματιδίων. Έτσι χρειάζεται να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την *πυκνότητα ροής* \equiv "ρεύμα πιθανότητας j " μιας δέσμης σωματιδίων.

Από τη διατήρηση της πιθανότητας, ο ρυθμός ελάττωσης του αριθμού των σωματιδίων σε δεδομένο όγκο ισούται με την ολική ροή σωματιδίων που βγαίνουν από αυτόν τον όγκο, δηλ.

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \int \nabla \cdot \vec{j} dV$$

όπου n είναι μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο στοιχείο dS της επιφάνειας. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το *Θεώρημα Gauss*.

Έτσι οι πυκνότητες πιθανότητας και ροής συνδέονται με την εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (4)$$

όπου το ρεύμα πιθανότητας είναι:

$$\vec{j} = -\frac{i}{2m}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (5)$$

(άσκηση)

Για παράδειγμα μία λύση της (3)

$$\psi = N e^{ip \cdot x - iEt} \quad (6)$$

που περιγράφει ένα ελεύθερο σωματίδιο με ενέργεια E και ορμή p , έχει

$$\rho = |N|^2, \quad \vec{j} = \frac{p}{m} |N|^2 \quad (7)$$

Συναλλοίωτο Lorentz, 4-διανύσματα

Ένας ακρογωνιαίος λίθος της σύγχρονης Φυσικής είναι ότι οι Θεμελιώδεις Νόμοι έχουν την ίδια μορφή σε όλα τα συστήματα *Lorentz*, δηλ. σε συστήματα αναφοράς που έχουν μία ομοιόμορφη σχετική ταχύτητα. Οι βασικές εξισώσεις λέγεται ότι είναι *Lorentz συναλλοίωτες*.

Θυμίζουμε ότι η Ειδική Σχετικότητα βασίζεται στην υπόθεση ότι η ταχύτητα του φωτός, c , είναι ίδια σε όλα τα συστήματα *Lorentz*.

Ένας μετασχηματισμός *Lorentz* σχετίζει τις συντεταγμένες δύο τέτοιων συστημάτων αναφοράς. Το βασικό αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς *Lorentz* είναι η σχέση $c^2 t^2 - x^2$. (Ας ορίσουμε $x^0 = ct$, $c \equiv 1$)

$$x \equiv x^\mu \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

Γενικός μετασχηματισμός *Lorentz* $\Lambda = (\Lambda^\mu_\nu)$:

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = \Lambda^\mu_{\nu'} x^{\nu'} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu$$

- π.χ. 1: Οι συνήθεις στροφές στο χώρο $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$, R – γενικός ορθογώνιος 3×3 πίνακας $R^T R = 1$.

- π.χ. 1': Στροφή στο επίπεδο $x^1 - x^2$:
$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

- π.χ. 2: Μετασχηματισμός σε νέο σύστημα που κινείται με ταχύτητα v (boost = ώθηση)
- π.χ. 2': Για μετασχηματισμό *Lorentz*, όπου το νέο σύστημα κινείται με ταχύτητα v κατά μήκος του άξονα x^1 :

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cosh \omega & -\sinh \omega & 0 & 0 \\ -\sinh \omega & \cosh \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

όπου $\beta = \frac{v}{c}$ ($c=1$), $\cosh \omega = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \gamma$, $\tanh \omega = \beta$, επειδή $\cos(i\omega) = \cosh(\omega)$, $\sin(i\omega) = i \sinh(\omega)$ είναι ανάλογοι στροφής κατά μιγαδική γωνία $i\omega$.

Κάθε σύνολο τεσσάρων ποσοτήτων που μετασχηματίζονται όπως τα x^μ κάτω από μετασχηματισμούς *Lorentz* λέγεται *4-διάνυσμα*.

Εσωτερικά γινόμενα και ο μετρικός τανυστής

Για δύο 4-διανύσματα $A^\mu \equiv (A^0, A)$, $B^\mu \equiv (B^0, B)$ ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο $A \cdot B \equiv A^0 B^0 - A \cdot B$ το οποίο παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς *Lorentz*.

Λόγω του αρνητικού πρόσημου, είναι χρήσιμο να εισάγουμε ένα νέο είδος 4-διανύσματος $A_\mu \equiv (A^0, -A)$ που συνδέεται με το A^μ μέσω του μετρικού τανυστή

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ως εξής:} \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

Οπότε το εσωτερικό γινόμενο γράφεται:

$$A \cdot B = A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\nu B^\mu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$$

Εννοείται άθροιση πάνω σε επαναλαμβανόμενους δείκτες.

- π.χ. 1: Σύμφωνα με την Ειδική Σχετικότητα, η ολική ενέργεια E και η ορμή p ενός απομονωμένου συστήματος μετασχηματίζονται ως συνιστώσες ενός 4-διανύσματος

$$p^\mu \equiv \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \equiv (p^0, p^1, p^2, p^3). \quad (c=1)$$

- π.χ. 2: Το εσωτερικό γινόμενο $p^\mu p_\mu \equiv p \cdot p \equiv p^2 = E^2 - p^2$ είναι αναλλοίωτο.

Το απλούστερο σύστημα είναι ένα ελεύθερο σωματίδιο για το οποίο ισχύει

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

όπου m είναι η μάζα ηρεμίας του σωματιδίου.

- π.χ. 3: $p^\mu x_\mu \equiv p \cdot x = E \cdot t - p \cdot x$ αναλλοίωτη

- π.χ. 4: $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right), \quad \partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$ (άσκηση)
- $$\square^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$
- D' Alembertian αναλλοίωτος τελεστής

- π.χ. 5: Η συναλλοίωτη μορφή των $\boxed{E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}}$, $\boxed{p \rightarrow -i \nabla}$ είναι η $p^\mu \rightarrow i \partial^\mu$.

Eξίσωση Klein-Gordon

Η εξ. *Schr* (3) παραβιάζει το συναλλοίωτο *Lorentz* και έτσι δεν είναι κατάλληλη για σχετικιστικό σωματίδιο. Θα επαναλάβουμε τα ίδια βήματα όπως στη μη σχετικιστική Κβαντομηχανική αλλά αρχίζοντας από τη σχετικιστική σχέση ενέργειας – ορμής:

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (1)$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις τελεστών:

$$\rightarrow -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \phi = m^2 \phi \quad \text{K-G} \quad (2)$$

$$\text{ή } (\square^2 + m^2)\phi = 0 \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντας την K-G επί $-i\phi^*$ και τη συζυγή της επί $-i\phi$ και αφαιρώντας:

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[i \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[-i (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) \right] = 0 \quad (4)$$

$$\text{ή } j^\mu = (\rho, j) = i (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad (\text{άσκηση}) \quad (5)$$

$$\text{οπότε } \xrightarrow{(4)} \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (6)$$

Για παράδειγμα για ελεύθερο σωματίδιο με ενέργεια E και ορμή p που περιγράφεται από τη λύση K-G

$$\phi = N e^{ip \cdot x - iEt} \quad (7)$$

$$\rho = i(-2iE)|N|^2 = 2E|N|^2 \quad (8)$$

$\xrightarrow{(7)}$

$$j = -i(2ip)|N|^2 = 2p|N|^2 \quad (9)$$

$$\text{ή } \xrightarrow{(7)} \phi = N e^{-ip \cdot x} \quad (10)$$

$$\text{και } \xrightarrow{(8),(9)} j^\mu = 2p^\mu |N|^2 \quad (11)$$

Αλλά αντικαθιστώντας την (10) στην (3) έχουμε:

$$E = \pm (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2} \quad (12)$$

που είναι εξαιρετικά δυσάρεστο γιατί δείχνει ότι είναι δυνατόν να γίνουν μεταπτώσεις σε όλο και χαμηλότερες (αρνητικές) ενέργειες. Ένα δεύτερο πρόβλημα είναι ότι οι λύσεις με $E < 0$ είναι συσχετισμένες (μέσω της (8)) με αρνητική πυκνότητα πιθανότητας.

Άρα οι δυσκολίες είναι λύσεις με $E < 0$ και $\rho < 0$!!!

Εξίσωση Dirac

Στην περίπτωση της εξ. K-G είναι σαφές από προήλθε το πρόβλημα.

(α) Κατασκευάζοντας μία κυματική εξίσωση που αντιστοιχεί στη σχέση $E^2 = p^2 + m^2$ αμέσως επιτρέπουμε λύσεις με αρνητική ενέργεια.

(β) Η εξ. K-G έχει έναν όρο $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ με συνέπεια να οδηγηθούμε σε εξίσωση

συνέχειας με πυκνότητα πιθανότητας που περιέχει $\frac{\partial}{\partial t}$ και επομένως σε αρνητικές πιθανότητες για $E < 0$.

Ο Dirac προκειμένου να πάρει $\rho \geq 0$ απαίτησε μία εξίσωση γραμμική στο $\frac{\partial}{\partial t}$ και, για να είναι συναλλοίωτη, γραμμική και στο ∇ .

Συνεπώς απαίτησε την εξής γενική μορφή:

$$\left[i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \alpha \right] \psi(x) = 0 \quad (13)$$

όπου η φύση των συντελεστών γ^μ και της σταθεράς α πρέπει να προσδιοριστούν. Βέβαια, σύμφωνα με την Ειδική Σχετικότητα ισχύει η $E^2 = p^2 + m^2$ για ελεύθερο σχετικιστικό σωματίδιο (ηλεκτρόνιο). Οπότε ο Dirac απαίτησε συγχρόνως η ψ να ικανοποιεί την εξ. K-G. Προφανώς ανοίξαμε πάλι την πόρτα στις λύσεις με $E < 0$.

Η επιτυχία του Dirac ήταν να μετατρέψει αυτό το προφανές πρόβλημα σε έναν από τους μεγαλύτερους θριάμβους της Θεωρητικής Φυσικής!

Την απλή σχέση μεταξύ δύο μιγαδικών αριθμών u και v

$$u^2 + v^2 = (-iu - v)(iu - v) \quad (14)$$

την χρησιμοποιούμε για να γραμμικοποιήσουμε την εξ. K-G. Δοκιμάζουμε

$$\left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)\left(i\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - m\right)\psi(x) = 0 \quad (15)$$

Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς χρησιμοποιώντας τη μεταθετικότητα των $\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ αλλά σεβόμαστε τη σειρά των συντελεστών γ^μ, γ^ν (ώστε να μην αποκλείσουμε την πιθανότητα να είναι πίνακες)

$$\rightarrow \left[\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + m^2\right]\psi(x) = 0 \quad (16) \quad (\text{άσκηση})$$

Η (16) είναι ίδια με την K-G αν επιμείνουμε να ισχύει:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad (17)$$

Πώς μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι οι (17) ισχύουν;

Δοκιμάζουμε (1) μιγαδικούς αριθμούς (2) 2×2 πίνακες και καταλήγουμε ότι δεν μπορούν να ικανοποιήσουν τις (17). Αλλά η επόμενη δυνατότητα, όπως έδειξε ο *Dirac*, δηλ να είναι 4×4 πίνακες, δουλεύει!

Μία δόκιμη επιλογή των πινάκων *Dirac* είναι η εξής

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (18)$$

όπου κάθε όρος είναι 2×2 πίνακες.

(άσκηση)

Σημειώνουμε ότι ο γ^0 είναι Ερμιτιανός πίνακας ($(\gamma^0)^+ = \gamma^0$ και $(\gamma^0)^2 = I$) ενώ οι γ^j αντι-Ερμιτιανοί ($(\gamma^j)^+ = -\gamma^j$ και $(\gamma^j)^2 = -I$).

Η επιλογή των πινάκων *Dirac* δεν είναι μοναδική. Παίρνουμε ισοδύναμες αναπαραστάσεις των πινάκων *Dirac* αν μετασχηματίσουμε τα γ^μ με έναν αυθαίρετο (μη αποκλίνοντα) πίνακα S.

$$\gamma'^\mu = S^{-1} \gamma^\mu S \quad (19)$$

Τελικά η εξίσωση που έθεσε ως αξίωμα ο *Dirac* (1928) ήταν

$$\left[i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right] \psi(x) = 0 \quad (20)$$

όπου

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (21)$$

δηλ. ένα πεδίο με 4 συνιστώσες γνωστό ως σπίνορας *Dirac*.

Μία ισοδύναμη μορφή, επίσης γνωστή, προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την (20) επί γ^0 :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = \left(\vec{\alpha} \frac{1}{i} \vec{\nabla} + \beta m \right) \psi(x) \quad (22)$$

Στην αναπαράσταση (18) που διαλέξαμε τα α και β είναι Ερμιτιανοί πίνακες

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha = \gamma^0 \gamma), \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\beta = \gamma^0) \quad (23)$$

Διατηρούμενα ρεύματα

Για να κατασκευάσουμε τα ρεύματα προχωράμε όπως στην εξ. K-G, εκτός του ότι επειδή τώρα έχουμε εξίσωση πινάκων, πρέπει να θεωρήσουμε την Ερμιτιανή, αντί της μιγαδικής, συζυγή εξίσωση.

Η Ερμιτιανή συζυγή της εξ. *Dirac*

$$i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\gamma^j \frac{\partial \psi}{\partial x^j} - m\psi = 0, \quad j=1, 2, 3$$

είναι η:

$$-i \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \gamma^0 - i \frac{\partial \psi^+}{\partial x^j} (-\gamma^j) - m\psi^+ = 0 \quad (24)$$

Για να έχουμε συναλλοίωτη μορφή πρέπει να φύγει το $-$ στο $(-\gamma^j)$ και να μείνει στον πρώτο όρο. Επειδή

$$\gamma^0 \gamma^j = -\gamma^j \gamma^0$$

αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας την (24) από δεξιά επί γ^0 . Εισάγοντας τον *adjoint* (γραμμική) σπίνορα

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad (25)$$

παίρνουμε την (24) στη μορφή

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (26)$$

Τώρα μπορούμε να πάρουμε την εξίσωση συνέχειας πολλαπλασιάζοντας την εξ. *Dirac* (20) από αριστερά επί $\bar{\psi}$ και την (26) από δεξιά επί ψ και τις προσθέτουμε.

$$\begin{aligned} \rightarrow \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi &= 0 \\ \rightarrow \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

με $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \equiv j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) \quad (\text{άσκηση})$

Ιδιαίτερα η πυκνότητα πιθανότητας:

$$\begin{aligned} \rho \equiv j^0 &= \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^4 |\psi_i|^2 \end{aligned} \quad \text{θετικά ορισμένο!}$$

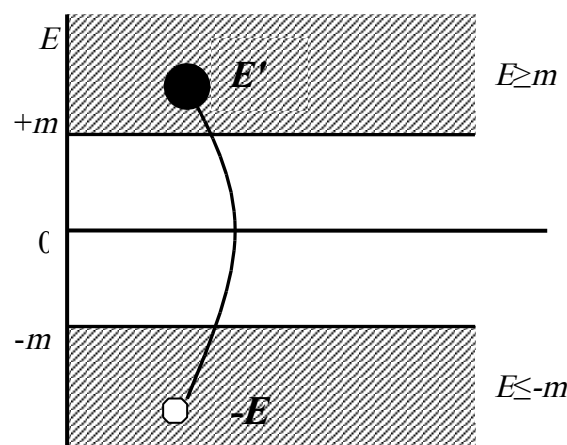
Μη αναμενόμενο δώρο ότι η εξ. *Dirac* περιγράφει σωματίδια με σπιν $1/2$!!!

Η ιστορία μας μέχρι τώρα συνοψίζεται ως εξής:

Εξ. *Klein – Gordon* $\left\{ \begin{array}{l} \text{αρνητικές πιθανότητες} \\ \text{αρνητικές ενέργειες} \end{array} \right.$

Εξ. *Dirac* $\left\{ \begin{array}{l} \text{θετικές πιθανότητες} \\ \text{αρνητικές ενέργειες} \end{array} \right.$

Ο *Dirac* ξεπέρασε το πρόβλημα των αρνητικών ενεργειών ως εξής. Έθεσε το αξίωμα ότι στο κενό, δηλ στην κατάσταση όπου δεν υπάρχουν $E > 0$ ηλεκτρόνια, όλες οι καταστάσεις με $E < 0$ είναι γεμάτες με ηλεκτρόνια (!), δηλ υπάρχει μία άπειρη θάλασσα ηλεκτρονίων. Έτσι η αρχή *Pauli* απαγορεύει σε ένα ηλεκτρόνιο με $E > 0$ να πέσει σε κατώτερο ενεργειακό επίπεδο.



Όμως θα μπορούσαμε να δημιουργήσουμε οπή στην θάλασσα των ηλεκτρονίων με $E \leq 0$ διεγείροντας ένα ηλεκτρόνιο από μία κατάσταση αρνητικής ενέργειας $-E$ σε μία κατάσταση με θετική ενέργεια E' . Τότε η απουσία ενός ηλεκτρονίου με φορτίο $-e$ και ενέργεια $-E$ ερμηνεύεται ως παρουσία ενός *αντισωματιδίου* (ποζιτρονίου) φορτίου $+e$ και ενέργειας E . Συνεπώς το τελικό αποτέλεσμα αυτής της διέγερσης είναι η παραγωγή ενός ζευγαριού σωματιδίων

$e^-(E) + e^+(E) \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{οδηγεί στην απαίτηση} \\ \text{μιας θεωρίας πεδίου} \end{array}$

$$\text{ενέργεια οπής} = -(-E) = E > 0$$

$$\text{φορτίο οπής} = -(-e) = e > 0$$

το οποίο προφανώς απαιτεί ενέργεια: $E + E \geq 2m$

Η πρόβλεψη του αντισωματιδίου αποτελεί μία από τις μεγαλύτερες προβλέψεις!!!

Τι γίνεται όμως με τις αρνητικές λύσεις της εξ. K-G; Είναι σαφές ότι η ίδια ιδέα δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε σωματίδια με μηδενικό σπιν, που δεν υπακούουν

στην απαγορευτική αρχή του *Pauli*. Συνεπώς εικόνα προκύπτει από την κβαντική θεωρία πεδίου. Εδώ περιοριζόμαστε ακόμα στην κβαντομηχανική.

Οι *Pauli – Weisskopf* ('34) αναβίωσαν την εξ. K-G εισάγοντας το φορτίο $-e$ στο j^μ και ερμηνεύοντάς το ως πυκνότητα φορτίου-ρεύματος του αρνητικά φορτισμένου σωματιδίου

$$j^\mu = -ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$$

Τώρα το $\rho = j^0$ παριστάνει πυκνότητα φορτίου, όχι πυκνότητα πιθανότητας κι έτσι αίρονται οι ενστάσεις. Με μία έννοια, που θα γίνει σαφέστερη, οι λύσεις με $E < 0$ μπορούν να θεωρηθούν ως σωματίδια με αντίθετο φορτίο δηλ. αντισωματίδια. Αντίθετα με τη θεωρία των οπών αυτή η ερμηνεία μπορεί να εφαρμοστεί και στα μποζόνια και στα φερμιόνια.

Η συνταγή για το πώς να χειριζόμαστε τις αρνητικές ενεργειακές καταστάσεις προτάθηκε από τους *Stückelberg* ('41) και *Feynman* ('48). Η ιδέα είναι ότι μία λύση με *αρνητική ενέργεια* περιγράφει ένα σωματίδιο, που διαδίδεται προς τα πίσω στο χρόνο, ή ισοδύναμα, ένα αντισωματίδιο που διαδίδεται προς τα μπρος στο χρόνο.

Ας θεωρήσουμε ένα πόνιο π^+ ενέργειας E , 3-ορμής p και φορτίου $+e$. Γνωρίζουμε από τις (7), (11) ότι το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα είναι

$$j^\mu_{em}(\pi^+) = (+e)2|N|^2(E, p), \quad (E, p) = p^\mu$$

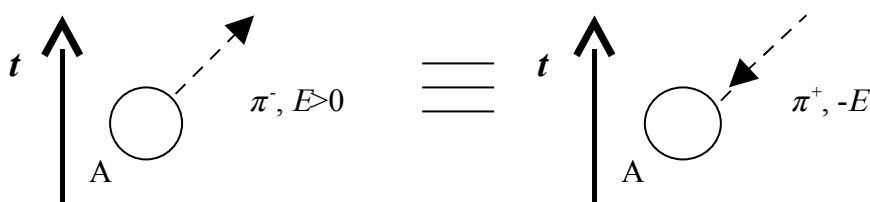
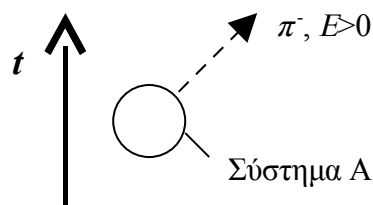
Ποιο θα είναι το ρεύμα για το π^- ; Δηλ. για σωματίδιο με θετική ενέργεια, αλλά αντίθετου φορτίου; Περιμένουμε:

$$j^\mu_{em}(\pi^-) = (-e)2|N|^2(E, p) = (e)2|N|^2(-E, -p) \\ ((E, p) : \text{όπως για το } \pi^+)$$

που είναι ίδιο με το ρεύμα $j^\mu_{em}(\pi^+)$ ενός π^+ αλλά με αρνητική 4-ορμή.

Ας δούμε τι συμβαίνει με το ολικό φορτίο και την ενέργεια ενός συστήματος A που εκπέμπει ένα π^- θετικής ενέργειας. Η ενέργεια του A ελαττώνεται κατά E και το φορτίο του ελαττώνεται κατά $(-e)$.

Αυτή η αύξηση φορτίου θα μπορούσε ισοδύναμα να δημιουργηθεί από απορρόφηση ενός π^+ , αλλά για να γίνει αυτή η διαδικασία απορρόφησης πλήρως ισοδύναμη με την διαδικασία εκπομπής το π^+ θα πρέπει να έχει αρνητική ενέργεια (γιατί το A έχασε ενέργεια με την εκπομπή). Έτσι φθάνουμε στην εξής ισοδυναμία:

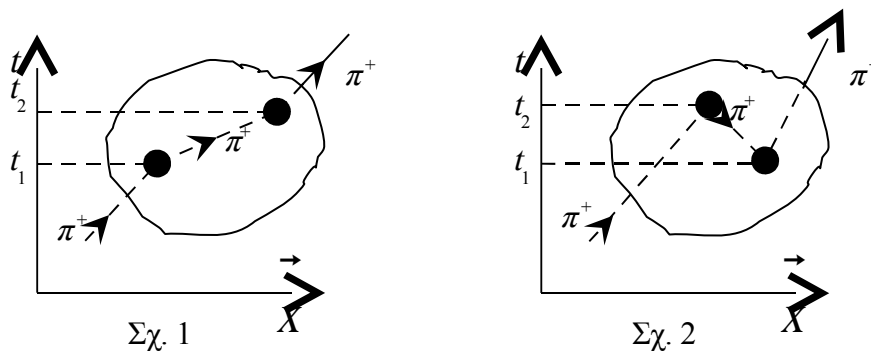


Δηλαδή η εκπομπή (απορρόφηση) αντισωματιδίου με 4-ορμή p^μ είναι φυσικά ισοδύναμη με την απορρόφηση (εκπομπή) σωματιδίου με 4-ορμή $-p^\mu$.

Με άλλα λόγια, λύσεις αρνητικής ενέργειας που πηγαίνουν προς τα πίσω στο χρόνο περιγράφουν λύσεις αντισωματιδίων θετικής ενέργειας που πηγαίνουν προς τα μπρος στο χρόνο. Ο λόγος που μπορεί να γίνει η παραπάνω ταυτοποίηση είναι απλά γιατί $e^{-i(-E)(-t)} = e^{-iEt}$!

Υπάρχει μία διαφορά μεταξύ περιπτώσεων K-G και *Dirac*. Η περίπτωση *Dirac* είχε φτιαχτεί έτσι ώστε να εξασφαλίζει θετική πυκνότητα πιθανότητας ανεξάρτητα από το πρόσημο της ενέργειας. Για να κρατήσουμε την ισοδυναμία θα πρέπει να βάλουμε ένα επί πλέον αρνητικό σημείο με το χέρι κάθε φορά που έχουμε ένα φερμιόνιο αρνητικής ενέργειας στην τελικά κατάσταση.

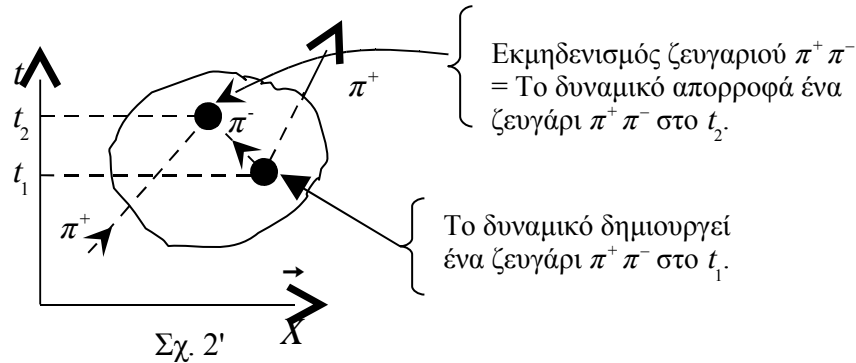
Ο φορμαλισμός περιγραφής κυματοσυνάρτησης ενός σωματιδίου χειρίζεται όχι μόνο τα αντισωματίδια αλλά είναι σε θέση να περιγράψει και καταστάσεις πολλών σωματιδίων. Για παράδειγμα ας δούμε τη διπλή σκέδαση ενός σωματιδίου (ας πούμε του π^+) από ένα δυναμικό σε 2^η τάξη στη *Θεωρία Διαταραχών*. Στη Μη-Σχετικιστική Κβαντομηχανική (ΜΣΚ) μπορούμε να ζωγραφίσουμε ένα χωρο-χρονικό διάγραμμα *Feynman* της τροχιάς του σωματιδίου.



Σύμφωνα με τον *Feynman* στη ΜΣΚ πρέπει να επιτρέψουμε την πιθανότητα τα σωματίδια να μπορούν να σκεδαστούν και προς τα πίσω στο χρόνο. Έτσι το σημαντικό νέο στοιχείο είναι ότι υπάρχουν δύο διαγράμματα που αντιστοιχούν στην ίδια παρατήρηση. Υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι διάταξης του χρόνου των δύο αλληλοεπιδράσεων που αντιστοιχούν στο ίδιο παρατηρήσιμο γεγονός.

Ερμηνεύουμε το δεύτερο διάγραμμα, χρησιμοποιώντας τη συνταγή του *Feynman*, επιτρέποντας λύσεις θετικής ενέργειας των π^+ να ταξιδεύουν μόνο προς τα μπρος στο χρόνο και λύσεις αρνητικής ενέργειας να ταξιδεύουν μόνο

προς τα πίσω στο χρόνο. Στο π^+ που ταξιδεύει προς τα πίσω από t_2 μέχρι t_1 πρέπει να αποδοθεί αρνητική ενέργεια, που είναι **ισοδύναμο** με ένα π^- θετικής ενέργειας που ταξιδεύει προς τα μπρος από t_1 μέχρι t_2 . Έτσι φθάνουμε στη φυσική διαδικασία που παριστάνεται στο σχ. 2'.



Το βασικό σημείο είναι ότι λύσεις αρνητικής ενέργειας που περιγράφουν ένα σωματίδιο χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν διαδικασίες που περιλαμβάνουν αντισωματίδια θετικής ενέργειας, αφού αλλάξουμε κατάλληλα τις αρχικές και τελικές καταστάσεις. Έτσι καταστάσεις πολλών σωματιδίων (όπως η διαδικασία δημιουργίας ζευγαριού $\pi^+ \pi^-$) μπορούν να αντιμετωπιστούν με το φορμαλισμό κυματοσυνάρτησης ενός σωματιδίου, αποφεύγοντας την πολυπλοκότητα της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου. Όλες οι δυνατές διαδικασίες είναι δυνατόν να περιγραφούν είτε χρησιμοποιώντας σωματίδια είτε αντισωματίδια (και κατά συνθήκη προτιμάμε τα σωματίδια).

- Το κενό είναι ένα πολύ σύνθετο περιβάλλον! Ζευγάρια από $\pi^+ \pi^-$ δημιουργούνται και καταστρέφονται ως αποτέλεσμα την συνταγής για το αντισωματίδιο.
- Το τελικώς αιτούμενο για σύγκριση με το πείραμα είναι να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε ρυθμούς μετάβασης και ενεργές διατομές. Για την ώρα όμως έχουμε στη διάθεσή μας μόνο κυματοσυναρτήσεις ελεύθερων σωματιδίων.

Πώς θα συμπεριλάβουμε τις αλληλεπιδράσεις; Όπως προκύπτει από την προηγούμενη συζήτηση ("απλή" και "διπλή" σκέδαση) η Θεωρία Διαταραχών θα είναι η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε πλάτη σκέδασης. Έτσι πρέπει να υπενθυμίσουμε τα κυριότερα αποτελέσματα της Θεωρίας Διαταραχών.

Σύντομη ανασκόπηση της μη σχετικιστικής χρονικά εξαρτημένης Θεωρίας Διαταραχών

Ας θεωρήσουμε ότι γνωρίζουμε τις λύσεις της εξ. *Schrödinger* για το ελεύθερο σωματίδιο:

$$H_0 \Phi_n = E_n \Phi_n \quad (1)$$

$$\text{με } \int_V \Phi_m^* \Phi_n d^3x = \delta_{mn} \quad (2)$$

όπου H_0 είναι ανεξάρτητη του χρόνου, ενώ για απλότητα θεωρούμε το σωματίδιο σε όγκο V .

Το ζητούμενο είναι να λύσουμε την εξ. *Schr.* για ένα σωματίδιο κινούμενο μέσα σε ένα δυναμικό αλληλεπίδρασης $V(\vec{x}, t)$,

$$(H_0 + V(\vec{x}, t))\Psi = i \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (3)$$

Κάθε λύση της (3) μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας το πλήρες σύστημα (2), ως

$$\Psi = \sum_n a_n(t) \Phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t} \quad (4)$$

Για να βρούμε τους άγνωστους συντελεστές $a_n(t)$, αντικαθιστούμε την (4) στην (3):

$$i \sum_n \frac{da_n}{dt} \Phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t} = \sum_n V(\vec{x}, t) a_n \Phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t} \quad (5)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (5) επί Φ_f^* , ολοκληρώνουμε πάνω στον όγκο και χρησιμοποιώντας την (2):

$$\frac{da_f}{dt} = -i \sum_n a_n(t) \int \Phi_f^* V \Phi_n d^3x \cdot e^{i(E_f - E_n)t} \quad (6)$$

δηλ έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα συζευγμένων γραμμικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης.

Ας υποθέσουμε ότι πριν τη δράση του $V(x, t)$ το σωματίδιο βρίσκεται σε μία ιδιοκατάσταση i της αδιατάρακτης H_0 , δηλ σε χρόνο $t = -\frac{T}{2}$ έχουμε τις συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} a_i\left(-\frac{T}{2}\right) &= 1 \\ a_n\left(-\frac{T}{2}\right) &= 0 \quad \forall n \neq i \end{aligned} \quad (7)$$

και συνεπώς

$$\frac{da_f}{dt} = -i \int d^3 x \Phi_f^* V \Phi_i e^{i(E_f - E_i)t} \quad (8)$$

Υποθέτοντας ότι το $V(x, t)$ είναι μικρό και παροδικό, μπορούμε σε πρώτη προσέγγιση να θεωρήσουμε ότι οι αρχικές συνθήκες ισχύουν για όλους τους χρόνους,

$$a_f(t) = -i \int_{-\frac{T}{2}}^t dt' \int d^3 x \Phi_f^* V \Phi_i e^{i(E_f - E_i)t'} \quad (9)$$

και ιδιαίτερα μετά χρόνο $t = \frac{T}{2}$, που υποθέτουμε ότι η αλληλεπίδραση έχει τελειώσει, έχουμε:

$$a_f(t) = -i \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \int d^3 x \left[\Phi_f(\vec{x}) e^{-iE_f t} \right]^* \cdot V(\vec{x}, t) \cdot \left[\Phi_i(\vec{x}) e^{-iE_i t} \right] \equiv T_{fi} \quad (10)$$

που μπορεί να γραφτεί στη συναλλοίωτη μορφή:

$$T_{fi} = -i \int d^4 x \Phi_f^*(x) V(x) \Phi_i(x) \quad (11)$$

4-διάστατο
τελική
διαταρακτικό
αρχική
στοιχείο όγκου
κατάσταση
δυναμικά
κατάσταση

Αξιοσημείωτα παραδείγματα

π.χ. 1: $V(x, t) = V(x)$ δηλ. ανεξάρτητο του χρόνου.

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(10)} T_{fi} &= -i V_{fi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot e^{i(E_f - E_i)t} \\ &= -2\pi i V_{fi} \delta(E_f - E_i) \end{aligned} \quad (12)$$

όπου
$$V_{fi} = \int d^3x \Phi_f^*(x) V(x) \Phi_i(x) \quad (13)$$

Η συνάρτηση δ εκφράζει το γεγονός ότι η ενέργεια του σωματιδίου διατηρείται κατά τη μετάβαση από $i \rightarrow f$.

π.χ. 2: $V(x, t) = V(x) e^{-i\omega t}$

Το ολοκλήρωμα χρόνου του T_{fi} στην (10):

$$\int dt \cdot e^{iE_f t} e^{-i\omega t} e^{-iE_i t} = 2\pi\delta(E_f - E_i - \omega)$$

δηλ το σύστημα απορροφά ενέργεια από το δυναμικό.

π.χ. 3: $V(x, t) = V(x) e^{i\omega t}$

$$\xrightarrow{(10)} T_{fi} \propto \int dt \cdot e^{iE_f t} e^{i\omega t} e^{-iE_i t} = 2\pi\delta(E_f + \omega - E_i)$$

δηλ το δυναμικό απορροφά ενέργεια από το σύστημα. ■

Προφανώς μπορούμε να βελτιώσουμε την παραπάνω προσέγγιση βάζοντας το αποτέλεσμα (9) για το $a_n(t)$ στο δεξί μέρος της (6),

$$\rightarrow \frac{da_f}{dt} = \dots + (-i)^2 \left[\sum_{n \neq i} V_{ni} \int_{-\frac{T}{2}}^t dt' e^{i(E_n - E_i)t'} \right] \cdot V_{fn} e^{i(E_f - E_n)t} \quad (14)$$

Η διόρθωση στο T_{fi} είναι

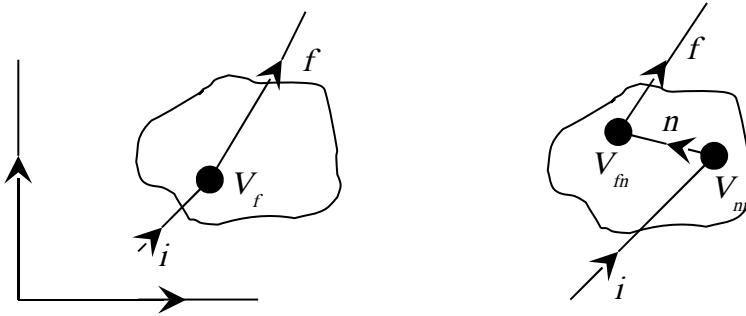
$$T_{fi} = \dots - \sum_{n \neq i} V_{fn} V_{ni} \int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot e^{i(E_f - E_n)t} \int_{-\infty}^t dt' \cdot e^{i(E_n - E_i)t'}$$

Για λόγους συνέπειας (με την αρχή απροσδιοριστίας) πρέπει να συμπεριλάβουμε στο εκθετικό του ολοκληρώματος στο dt' μια μικρή θετική ποσότητα ε που θα την αφήσουμε να τείνει στο μηδέν μετά την ολοκλήρωση.

$$\int_{-\infty}^t dt' e^{i(E_n - E_i - i\varepsilon)t'} = i \frac{e^{i(E_n - E_i - i\varepsilon)t}}{E_i - E_n + i\varepsilon}$$

Έτσι η διόρθωση 2^{ης} τάξης στο \square είναι:

$$T_{fi} = \dots - 2\pi i \sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{ni}}{E_i - E_n + i\epsilon} \delta(E_f - E_i)$$



Διαγράμματα *Feynman* που παριστάνουν τους πρώτους δύο όρους στη μη σχετικιστική διαταρακτική σειρά, που συνεισφέρουν στη μετάβαση $i \rightarrow f$. Τελικά για κάθε κορυφή αλληλεπίδρασης έχουμε έναν παράγοντα όπως τον V_{ni} και για τη διάδοση κάθε ενδιάμεσης κατάστασης έχουμε έναν διαδότη όπως τον $1/(E_i - E_n)$. Οι ενδιάμεσες καταστάσεις χαρακτηρίζονται ως "εν δυνάμει" με την έννοια ότι η ενέργεια δεν διατηρείται ($E_n \neq E_i$), αλλά βέβαια υπάρχει διατήρηση της ενέργειας μεταξύ της αρχικής και τελικής κατάστασης όπως υποδεικνύεται από την $\delta(E_f - E_i)$.

Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε τα παραπάνω ώστε να μπορέσουμε να χειριστούμε τόσο σχετικιστικά σωματίδια όσο και τα αντισωματίδιά τους.

Εξισώσεις Maxwell – διατήρηση ρεύματος – αναλλοίωτο βαθμίδας

Οι εξισώσεις *Maxwell* της Κλασσικής Ηλεκτροδυναμικής στο κενό:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \end{aligned} \quad (\alpha)$$

Ισχύουν τα εξής:

- (i) Οι εξισώσεις (α) είναι ισοδύναμες με την παρακάτω συναλλοίωτη εξίσωση για το A_μ :

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \quad (\beta)$$

όπου $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ (γ) είναι το 4-διάνυσμα ρεύματος ενώ το 4-διάνυσμα δυναμικού

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A}) \quad (\delta)$$

σχετίζεται με το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο με τις σχέσεις

$$\vec{E} = -\frac{\partial A}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\epsilon)$$

- (ii) Εισάγοντας τον αντισυμμετρικό τανυστή έντασης πεδίου (*field strength*)

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\zeta)$$

οι εξισώσεις *Maxwell* (α) παίρνουν τη μορφή

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (\eta)$$

- (iii) $\partial_\nu j^\nu = 0$ (θ)

- (iv) Τα E, B είναι αναλλοίωτα κάτω από το μετασχηματισμό (βαθμίδας)

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \quad (\iota)$$

όπου χ αυθαίρετη συνάρτηση του x .

Με βάση αυτή την ελευθερία οι εξισώσεις *Maxwell* (α) γράφονται στη μορφή

$$\square A^\mu = j^\mu \quad \text{με} \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\kappa)$$

Η απαίτηση $\partial_\mu A^\mu = 0$ είναι γνωστή ως συνθήκη *Lorentz*. Αλλά ακόμη και αφού επιβάλουμε αυτή τη συνθήκη έχουμε παραμένουσα ελευθερία στην επιλογή του δυναμικού A_μ , δηλ. μπορούμε ακόμη να κάνουμε το μετασχηματισμό (βαθμίδας)

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (\lambda)$$

όπου το Λ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\square \Lambda = 0 \quad (\mu)$$

Η (μ) εξασφαλίζει ότι η συνθήκη *Lorentz* συνεχίζει να ικανοποιείται.

Κβαντική Ηλεκτροδυναμική Σωματιδίων χωρίς σπιν

Αποφεύγουμε την πολυπλοκότητα που εισάγει το σπιν των quarks και λεπτονίων. Στόχος είναι η χρήση της Θεωρίας Διαταραχών με συναλλοίωτο τρόπο. Ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο **χωρίς σπιν** ικανοποιεί την εξ. K-G

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 \right) \Phi = 0 \quad (1)$$

Στην κλασική Ηλεκτροδυναμική η κίνηση σωματιδίου με φορτίο $-e$ σε ένα ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ εξετάζεται κάνοντας την αντικατάσταση

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + eA^\mu \quad (2)$$

Συνεπώς η αντίστοιχη κβαντομηχανική αντικατάσταση ($p^\mu \rightarrow i\partial^\mu$) είναι

$$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu + eA^\mu \quad (3)$$

οπότε η εξ. K-G γίνεται

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi = -V\Phi \quad (4)$$

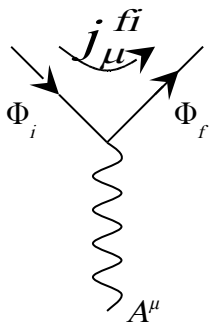
όπου η ηλεκτρομαγνητική διαταραχή είναι

$$V = -ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) - e^2 A^2 \quad (5)$$

(το αρνητικό πρόσημο στο δεξί μέλος της εξίσωσης (4) μπαίνει για συμφωνία με την εξ. *Schr.*)

Το V χαρακτηρίζεται από την παράμετρο e (σε φυσικές μονάδες $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \cong \frac{1}{137}$) οπότε το μικρό μέγεθός της συνιστά ότι μπορούμε να κάνουμε διαταρακτική ανάπτυξη του V σε δυνάμεις του α . Ήδη η συνεισφορά χαμηλότερης τάξης σε πλάτη σκέδασης είναι καλή προσέγγιση και θα παραλείψουμε τον όρο $e^2 A^2$ (αργότερα θα δούμε πιο θεμελιώδη λόγο).

Δουλεύοντας σε κατώτερη τάξη στη θεωρία διαταραχών το πλάτος T_{fi} (εξ. (11)) για τη σκέδαση ενός ηλεκτρονίου χωρίς σπιν από μία κατάσταση Φ_i σε μία Φ_f από ένα ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό A^μ είναι:



$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int \Phi_f^*(x) V(x) \Phi_i(x) d^4x \\ &= i \int \Phi_f^* i e (A^\mu \partial_\mu + \partial_\mu A^\mu) \Phi_i d^4x \end{aligned} \quad (6)$$

η παράγωγος δρα και στα δύο πεδία A^μ, Φ_i



$$\xrightarrow{(6)} T_{fi} = -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \quad (7)$$

όπου
$$j_\mu^{fi}(x) \equiv -ie(\Phi_f^*(\partial_\mu \Phi_i) - (\partial_\mu \Phi_f^*)\Phi_i) \quad (8)$$

$$^1 \int \Phi_f^* \partial_\mu (A^\mu \Phi_i) d^4x = - \int \partial_\mu \Phi_f^* A^\mu \Phi_i d^4x$$

ολοκλήρωση κατά παράγοντες αμελώντας τον επιφανειακό όρο δεδομένου ότι το δυναμικό μηδενίζεται για $t, |x| \rightarrow \pm\infty$

το οποίο, σύμφωνα με την προηγούμενη συζήτηση, μπορεί να θεωρηθεί ως το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα για τη μετάβαση του ηλεκτρονίου από την κατάσταση i στην f .

Αν το εισερχόμενο ηλεκτρόνιο χωρίς σπιν έχει 4-ορμή p_i , έχουμε:

$$\Phi_i(x) = N_i e^{-ip_i x} \quad (9)$$

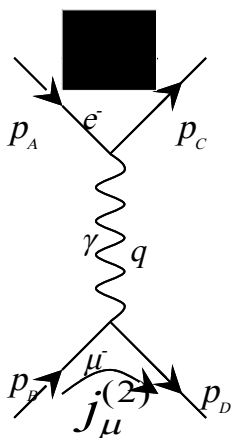
όπου N_i είναι η σταθερά κανονικοποίησης.

Χρησιμοποιώντας αντίστοιχη έκφραση και για την Φ_f :

$$\xrightarrow{(9) \rightarrow (8)} j_{\mu}^{fi}(x) = -e N_i N_f (p_i + p_f)_{\mu} e^{i(p_f - p_i)x} \quad (10)$$

Σκέδαση ηλεκτρονίου-μυονίου (χωρίς σπιν)

Θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της σκέδασης ηλεκτρονίου (χωρίς σπιν) από ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό A^{μ} για να υπολογίσουμε τη σκέδασή του από άλλο φορτισμένο σωματίδιο. Ας μελετήσουμε τη σκέδαση ηλεκτρονίου – μυονίου ώστε να αποφύγουμε ταυτοτικά σωματίδια. Το σχετικό διάγραμμα *Feynman* είναι:



Για τον υπολογισμό απλά πρέπει να συνδέσουμε το A^{μ} με την πηγή του που εδώ είναι το ρεύμα $j_{\mu}^{(2)}$ του μυονίου. Τα A^{μ} , $j_{\mu}^{(2)}$ συσχετίζονται μέσω των εξ. *Maxwell*,

$$\square A^{\mu} - \partial^{\mu} (\partial_{\nu} A^{\nu}) = j_{(2)}^{\mu} \quad (11)$$

που στη βαθμίδα *Lorentz*, $\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$

$$(12)$$

γίνονται: $\square A^{\mu} = j_{(2)}^{\mu} \quad (13)$

Το $j_{\mu}^{(2)}$ του μιονίου έχει βέβαια την ίδια μορφή με εκείνη του ηλεκτρονίου (εξ. (10)):

$$j_{(2)}^{\mu} = -eN_B N_D (p_D + p_B)^{\mu} e^{i(p_D - p_B)x} \quad (14)$$

όπου οι ορμές δίνονται στο σχήμα.

Δεδομένου ότι

$$\square e^{iqx} = -q^2 e^{iqx} \quad (15)$$

η λύση της (13) είναι

$$A^{\mu} = -\frac{1}{q^2} j_{(2)}^{\mu} \quad \text{με} \quad q = p_D - p_B \quad (16)$$

Έτσι το πλάτος της σκέδασης ηλεκτρονίου – μιονίου:

$$\xrightarrow{(16) \rightarrow (7)} T_{fi} = -i \int j_{\mu}^{(1)}(x) \left(-\frac{1}{q^2} \right) j_{(2)}^{\mu}(x) d^4 x \quad (17)$$

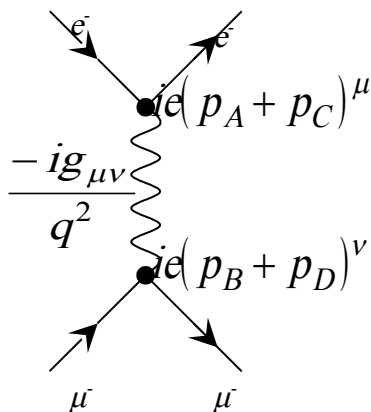
$$\xrightarrow{(10), (14) \rightarrow (17)} T_{fi} = -i N_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 M \cdot \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_B - p_A) \quad (18)$$

$$\text{όπου:} \quad -iM = (i\epsilon(p_A + p_C)^{\mu}) \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) (i\epsilon(p_B + p_D)^{\nu}) \quad (19)$$

(άσκηση)

- M – αναλλοίωτο πλάτος
- η δ εκφράζει τη διατήρηση ενέργειας – ορμής στη διαδικασία σκέδασης.

Σε αντιστοιχία με τα διαγράμματα *Feynman* της μη σχετικιστικής θεωρίας διαταραχών έχουμε τα συσχετισμένα με τη συναλλοίωτη μορφή της.



Για παράδειγμα το σχήμα αναπαριστάει τη σκέδαση ηλεκτρονίου – μιονίου χωρίς σπιν σε τάξη e^2 (ή α) και το πλάτος δίνεται από τις (18), (19). Αυτό είναι το διάγραμμα *Feynman* κατώτερης τάξης. Η κυματιστή γραμμή παριστάνει ένα φωτόνιο που ανταλλάσσεται μεταξύ των λεπτονίων και ο συσχετισμένος παράγοντας $-ig_{\mu\nu}/q^2$

ονομάζεται διαδότης του φωτονίου (εμπεριέχει δείκτες *Lorentz* λόγω σπιν). Το 4-διάνυσμα ορμής q του φωτονίου προσδιορίζεται από τη διατήρηση της 4-ορμής στις κορυφές. Παρατηρούμε ότι το $q^2 \neq 0$ και συνεπώς ονομάζουμε το φωτόνιο εν δυνάμει (*virtual*) ή *oH-mass shell*. Με κάθε κορυφή του διαγράμματος συσχετίζουμε τους παράγοντες του σχήματος, δηλ. περιέχει την ηλεκτρομαγνητική "σταθερά" e και ένα δείκτη 4-διανύσματος που εξασφαλίζει τη σύνδεση με τον δείκτη του φωτονίου. Τα διάφορα "-" και i έχουν μπει ώστε να δίνουν συνεπή διαγράμματα ανώτερης τάξης. Αξιοσημείωτο είναι ότι το γινόμενο των 3 παραγόντων δίνει $-iM$.

Ενεργός Διατομή και Αναλλοίωτο Πλάτος

Ένα βασικό αιτούμενο της όλης διαδικασίας που αναπτύχθηκε είναι να συσχετιστούν τα θεωρητικά μοντέλα και οι υπολογιστικές τεχνικές με πειραματικά μετρήσιμες ποσότητες.

Αρχίζουμε προσδιορίζοντας το N στη κυματοσυνάρτηση ελεύθερου σωματιδίου (K-G)

$$\Phi = Ne^{-ipx} \quad (20)$$

Υπενθυμίζουμε την αντίστοιχη πυκνότητα πιθανότητας $\rho = 2E|N|^2$. Το ότι $\rho \sim E$ εξισορροπεί τη συστολή του d^3x ώστε να παραμένει ο αριθμός των σωματιδίων ρd^3x αναλλοίωτος. Συνεπώς αντί να κάνουμε αναγωγή στη μονάδα:

$$\int_V \rho dV = \int_V 2E|N|^2 dV = 1 \rightarrow N = \left(\frac{1}{2EV} \right)^{1/2}$$

κάνουμε αναγωγή σε 2^E σωματίδια:

$$\int_V \rho dV = 2E \rightarrow N = \frac{1}{V^{1/2}} \quad (21)$$

ώστε το N να μην εξαρτάται από το E .

Επίσης σημειώνουμε ότι η συνάρτηση δ στην (12) εξέφραζε τη διατήρηση της ενέργειας στη μεταβολή $i \rightarrow f$. Λόγω της αρχής της αβεβαιότητας αυτό σημαίνει ότι οι καταστάσεις i και f χωρίζονται από άπειρο χρόνο και η ποσότητα $|T_{fi}|^2$ δεν έχει ακριβές νόημα. Έτσι είναι πιο λογικό να ορίσουμε την ποσότητα:

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T} \quad (22)$$

ως πιθανότητα μετάβασης στη μονάδα χρόνου, ή ρυθμό μετάβασης. Υψώνοντας στο τετράγωνο την (12) έχουμε:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{T} \delta(E_f - E_i) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \cdot e^{i(E_f - E_i)t} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{T} \delta(E_f - E_i) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \quad ^1 \\ &= 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \end{aligned} \quad (22)$$

Η (22) παίρνει φυσικό νόημα ύστερα από ολοκλήρωση πάνω σε ένα σύνολο αρχικών και τελικών καταστάσεων. Στα στοιχειώδη σωματίδια συνήθως αρχίζουμε με προσδιορισμένη αρχική κατάσταση και τελειώνουμε με ένα σύνολο τελικών καταστάσεων. Αν $\rho(E_f)$ είναι η πυκνότητα των τελικών καταστάσεων τότε $\rho(E_f)dE_f$ είναι ο αριθμός καταστάσεων στο ενεργειακό διάστημα E_f μέχρι $E_f + dE_f$. Ολοκληρώνουμε πάνω σε αυτή την πυκνότητα επιβάλλοντας τη διατήρηση της ενέργειας:

$$\begin{aligned} \rightarrow W_{fi} &= 2\pi \int dE_f \rho(E_f) |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \\ &= 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_i) \end{aligned} \quad (23)$$

Αυτός είναι ο χρυσός κανόνας του Fermi. Συνεπώς στη διαδικασία $A + B \rightarrow C + D$ ο ρυθμός μετάβασης στη μονάδα όγκου είναι

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{TV}$$

όπου T είναι το χρονικό διάστημα της αλληλεπίδρασης και το πλάτος μετάβασης είναι

$$T_{fi} = -iN_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) M \quad (24)$$

¹ Κρατάμε τη δ όπως είναι και δεν παίρνουμε ακόμη το όριο του ολοκληρώματος, ωστόσο λόγω της προηγούμενης δ παίρνουμε $E_f = E_i$.

Υψώνοντας την (24) στο τετράγωνο μία συνάρτηση δ παραμένει και το $(2\pi)^4$ επί την άλλη δίνει TV (υπολογισμός ίδιος με αυτόν που οδήγησε στην (22)). Με χρήση της (21):

$$\rightarrow W_{fi} = (2\pi)^4 \frac{\delta^4(p_C + p_D - p_A - p_B) |M|^2}{V^4} \quad (25)$$

Τα πειραματικά αποτελέσματα στη σκέδαση $AB \rightarrow CD$ συνήθως εκφράζονται στη μορφή ενεργού διατομής ($E\Delta$). Η $E\Delta$ σχετίζεται με το ρυθμό μετάβασης με τη σχέση

$$E\Delta = \frac{W_{fi}}{(\text{αρχική ροή})} (\text{αριθμός τελικών καταστάσεων}) \quad (26)$$

- Για ένα σωματίδιο η κβαντική θεωρία περιορίζει τον αριθμό των τελικών καταστάσεων σε όγκο V με ορμές σε όγκο d^3p να είναι $\frac{Vd^3p}{(2\pi)^3}$. (άσκηση)

Αλλά εδώ έχουμε $2E$ σωματίδια στο όγκο V :

$$\rightarrow \frac{\text{αριθμός τελικών καταστάσεων}}{\text{σωματίδιο}} = \frac{Vd^3p}{(2\pi)^3 2E} \quad (27)$$

Άρα για σωματίδια C, D που σκεδάστηκαν σε στοιχεία ορμής d^3p_C, d^3p_D έχουμε

$$\text{αριθμός διαθέσιμων τελικών καταστάσεων} = \frac{Vd^3p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{Vd^3p_D}{(2\pi)^3 2E_D} \quad (28)$$

- Την αρχική ροή είναι ευκολότερο να την υπολογίσουμε στο σύστημα εργαστηρίου. Ο αριθμός των σωματιδίων της δέσμης που διέρχονται από τη μονάδα επιφάνειας στη μονάδα χρόνου είναι:

$$\left| \overline{v_A} \right| 2E_A/V \quad \left(\text{δηλ. } \frac{\text{σωματ.}}{ST} = \frac{x \text{σωματ.}}{xST} = \frac{1}{xS} \frac{x \text{σωματ.}}{T} = \frac{1}{V} V \text{σωματ.} \right)$$

και ο αριθμός των σωματιδίων στόχων στη μονάδα όγκου είναι $2E_B/V$. Για να έχουμε ένα μέτρο της εισερχόμενης πυκνότητας ανεξάρτητο της κανονικοποίησης παίρνουμε:

$$\text{αρχική ροή} = \left| \overline{v_A} \right| \frac{2E_A}{V} \frac{2E_B}{V} \quad (29)$$

Συνδυάζοντας όλα αυτά βρίσκουμε τη διαφορική διατομή $d\sigma$ σε σκέδαση με $d^3 p_C$, $d^3 p_D$:

$$d\sigma = \frac{V^2}{|\vec{v}_A| 2E_A 2E_B} \frac{1}{V^4} |M|^2 \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \cdot \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3 p_C}{2E_C} \frac{d^3 p_D}{2E_D} V^2 \quad (30)$$

Το V απαλείφεται και στο εξής κανονικοποιούμε στη μονάδα του όγκου $\rightarrow N=1$ στην (21).

Φυσικό νόημα ΕΔ: Η εμφάνιση του αριθμού των τελικών καταστάσεων σε συνδυασμό με τον αριθμό μετάβασης W_{fi} παριστάνει τον αριθμό των σκεδαζομένων σωματιδίων n_s στη μονάδα χρόνου (στην (26)).

Η εμφάνιση της ροής (στην (26)) εξασφαλίζει ότι ο ρυθμός μετάβασης είναι ανεξάρτητος από τον αριθμό των σωματιδίων που είναι παρόντα στη δέσμη ή στο στόχο που χρησιμοποιούνται σε κάποιο πείραμα. Ο λόγος είναι ότι επιθυμούμε η ΕΔ να παριστάνει μία εσωτερική πιθανότητα σκέδασης, δηλ. την εσωτερική ένταση της αλληλεπίδρασης $AB \rightarrow CD$.

Έτσι διαιρούμε (στην (26)) με τον αριθμό σωματιδίων στο στόχο n_t και τη ροή της δέσμης $n_b v_b$ που μετράει τον αριθμό των σωματιδίων της δέσμης που διαπερνούν τη μονάδα επιφάνειας κάθετης στην ταχύτητα δέσμης στη μονάδα χρόνου (v_b είναι η σχετική ταχύτητα δέσμης – στόχου εάν ο στόχος δεν είναι σταθερός).

Συνεπώς η (26) γράφεται συμβολικά ως:

$$n_s = (n_b v_b) n_t \sigma \quad (31)$$

όπου n_s ο ρυθμός μετρήσεων, $(n_b v_b)$ η ροή της δέσμης, n_t αριθμός σωματιδίων στο στόχο και σ είναι μια σταθερά που περιέχει τη Φυσική (!).

- Η ΕΔ σ εκφράζει πράγματι την εσωτερική πιθανότητα σκέδασης. Έχει διαστάσεις επιφάνειας (από έλεγχο διαστάσεων στην (31)). Συμβολικά γράφουμε την $d\sigma$ στην (30) ως:

$$d\sigma = \frac{|M|^2}{F} dQ \quad (32)$$

$$\text{όπου} \quad d\sigma = (2\pi)^4 \cdot \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3 p_C}{2E_C} \frac{d^3 p_D}{2E_D} V^2 \quad (33)$$

είναι ο (*Lorentz* αναλλοίωτος) παράγοντας φάσεων (οι ποσότητες $\frac{d^3 p_C}{2E_C}$ και $\frac{d^3 p_D}{2E_D}$ είναι *Lorentz* αναλλοίωτα) και F η προσπίπτουσα ροή στο σύστημα εργαστηρίου,

$$F = |\vec{v}_A| 2E_A 2E_B \quad (34)$$

$$\text{με } |\vec{v}_A| = \frac{p_A}{E_A}.$$

άσκηση: Τα dQ , F είναι *Lorentz* αναλλοίωτα.

Ρυθμός Διάσπασης – M

Η απόδειξη του τύπου που δίνει τους ρυθμούς διάσπασης γίνεται σε ανάλογες γραμμές. Ο διαφορικός ρυθμός για τη διάσπαση $A \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$ σε στοιχεία ορμής $d^3 p_1, \dots, d^3 p_n$ των σωματιδίων της τελικής κατάστασης είναι:

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_A} |M|^2 \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \dots \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - p_1 - \dots - p_n) \quad (35)$$

Ο τύπος είναι της μορφής των (32), (33). $2E_A$ είναι ο αριθμός των σωματιδίων που διασπώνται στη μονάδα όγκου και M είναι το αναλλοίωτο πλάτος που έχει υπολογιστεί από το σχετικό διάγραμμα *Feynman*.

Ο ολικός ρυθμός διάσπασης, Γ είναι το άθροισμα των επί μέρους ρυθμών για όλα τα κανάλια διάσπασης. Προφανώς ο ρυθμός είναι

$$\Gamma = - \frac{dN_A}{dt} / N_A \quad (36)$$

και οδηγεί στον εκθετικό νόμο διάσπασης των σωματιδίων A ,

$$N_A(t) = N_A(0) e^{-\Gamma t}$$

Το Γ^1 λέγεται χρόνος ζωής του σωματιδίου A .

Εξίσωση Dirac (συνέχεια)

Λύσεις της εξ. Dirac

Ας δούμε την ακριβή μορφή των λύσεων ελεύθερου σωματιδίου. Σε αναλογία με τη μη σχετικιστική περίπτωση, όπου γράφουμε ένα γενικό σπίνορα για σωματίδια με σπιν με παραγοντοποιημένες λύσεις.

$$\Psi = \chi \cdot (\text{επίπεδο κύμα}), \quad (1)$$

όπου χ σπίνορας 2 συνιστωσών, αναζητούμε λύσεις της εξ. *Dirac* της μορφής

$$\Psi = \omega \cdot e^{-ipx}, \quad (2)$$

όπου ω είναι τώρα σπίνορας 4 συνιστωσών που πρέπει να προσδιοριστεί και e^{-ipx} λύση επίπεδου κύματος όπως στην περίπτωση K-G.

Αντικαθιστούμε την (2) στην εξ. *Dirac*

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \Psi \quad (3)$$

χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (4)$$

Για να αξιοποιήσουμε τη μορφή (4) των πινάκων α , β χωρίσουμε τον σπίνορα ω σε δύο 2-συνιστωσών σπίνορες ϕ και χ .

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\rightarrow E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mI & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -mI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (6)$$

(άσκηση)

που παριστάνει δύο συζευγμένες εξ. για τα ϕ , χ .

$$(E - m)\phi = \sigma \cdot p\chi \quad (7)$$

$$(E + m)\chi = \sigma \cdot p\phi \quad (8)$$

Το (6) ή (7), (8) αποτελούν ομογενές γραμμικό σύστημα εξισώσεων ως προς ϕ , χ και συνεπώς έχει μη τετριμμένες λύσεις μόνο στην περίπτωση μηδενικής ορίζουσας των συντελεστών:

$$\begin{vmatrix} (E - m)I & -\sigma \cdot p \\ -\sigma \cdot p & (E + m)I \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$(\sigma \cdot p)^2 = p^2 I \quad (10)$$

(που προκύπτει άμεσα από την ταυτότητα:

$$(\sigma \cdot a)(\sigma \cdot b) = a \cdot b I + i\sigma \cdot (a \times b) \quad (\text{άσκηση})$$

$$\rightarrow E = \pm (p^2 + m^2)^{1/2} \equiv p^0 \quad (11)$$

δηλ. έχει λύσεις θετικής και αρνητικής ενέργειας, όπως ήδη γνωρίζουμε.

Ας θεωρήσουμε πρώτα το σωματίδιο σε ηρεμία, δηλ. $p = 0$. Τότε η (6) γίνεται:

$$E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (12)$$

που έχει ιδιοτιμές:

$$E = m, m, -m, -m \quad (13)$$

και ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Προφανώς οι δύο πρώτες λύσεις αντιστοιχούν σε $E > 0$ άρα σύμφωνα με προηγούμενη συζήτηση περιγράφουν ένα σωματίδιο με $E > 0$ (ηλεκτρόνιο με φορτίο $-e$). Οι άλλες δύο λύσεις με $E < 0$ ερμηνεύεται ότι περιγράφουν ένα αντισωματίδιο με $E > 0$ (ποζιτρόνιο με φορτίο $+e$).

Για $p \neq 0$ έχουμε να λύσουμε τη γενική εξ. (6), που χωρίζεται στις (7) και (8).

