ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΤΙΚΤΟΠΟΥΛΟΥ
Καθηγητή ΕΜΠ

Τ Α Λ Α Ν Τ Ω Σ Ε Ι Σ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Αθήνα, 2001

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

(Σημ.: Τά έδάφια πού σημειώνονται μέ σταυρό μπορούν νά παραλειφθούν σέ πρώτη ἀνάγνωση)

Ε Ι Σ Α Γ Ω Γ Η

Τό βοήθημα αὐτό ἀφορᾶ γενικά φαινόμενα ταλαντώσεων στά πλαίσια τῆς κλασικῆς φυσικῆς. Μέ τόν ὅρο ταλαντώσεις ἐννοοῦμε τίς μεταβολές ἑνός φυσικοῦ συστήματος γύρω ἀπό κάποια κατάσταση εὐσταθοῦς ἰσορροπίας. Τό θέμα ἔχει ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον γιατί σέ ταλαντώσεις ὑπόκειται μιά τεράστια ποικιλία φυσικῶν συστημάτων, ὅπως π.χ. μηχανικά συστήματα σωματιδίων καί στερεῶν, συνεχῆ ἐλαστικά μέσα, ἠλεκτρικά κυκλώματα, ἠλεκτρομαγνητικά πεδία κ.ἄ.

Ὅταν οἱ ἀποκλίσεις ἑνός φυσικοῦ συστήματος ἀπό τήν κατάσταση ἰσορροπίας εἶναι ἀρκετά μικρές, ἡ χρονική ἐξέλιξή του διέπεται προσεγγιστικά ἀπό γραμμικές διαφορικές ἐξισώσεις. Στά πλαίσια τῆς προσεγγίσεως αὐτῆς, πού εἶναι οὐσιαστικά καί ἡ μόνη περίπτωση μέ τήν ὁποία θά ἀσχοληθοῦμε ἐδῶ, ἡ συμπεριφορά ὅλων τῶν συστημάτων ἔχει κοινά βασικά χαρακτηριστικά πού σχετίζονται μέ τήν ἀκόλουθη θεμελιώδη ἰδιότητα: Ἕνα ταλαντούμενο σύστημα, ὁσοδήποτε πολύπλοκο, εἶναι ἰσοδύναμο μέ μιά συλλογή ἀπό ἁπλούς ἁρμονικούς ταλαντωτές ἀνεξάρτητους ὁ ἕνας ἀπό τόν ἄλλο, δηλ. ταλαντωτές πού δέν ἀλληλεπιδροῦν μεταξύ τους. Ἡ ἰδιότητα αὐτή κάνει δυνατή τήν ἑνοποιημένη παρουσίαση τοῦ θέματος.

Τό πρῶτο κεφάλαιο εἶναι ἀφιερωμένο στίς ἐλεύθερες καί ἐξαναγκασμένες ταλαντώσεις τοῦ ἁπλούστερου δυνατοῦ συστήματος: τοῦ ἁπλοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ. Στό δεύτερο κεφάλαιο γίνεται ἡ διερεύνηση τοῦ γενικοῦ συστήματος μέ πολλούς βαθμούς ἐλευθερίας καί ἀποδεικνύεται ἡ θεμελιώδης ἰδιότητα πού ἀναφέρθηκε παραπάνω. Σκιαγραφοῦνται ἐπίσης μέ συντομία οἱ συνέπειες τῆς κβάντωσης τοῦ ἁπλοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ καί οἱ ἀντίστοιχες προεκτάσεις τῆς θεμελιώδους ἰδιότητας στήν Κβαντική Φυσική.

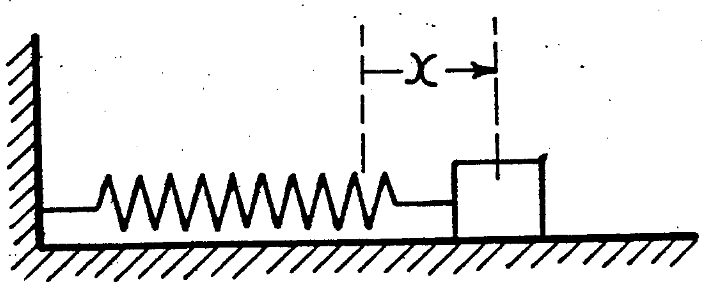
Στό τρίτο κεφάλαιο γίνεται ἐφαρμογή τῆς γενικῆς μεθόδου σέ εἰδικά παραδείγματα. Ἰδιαίτερη ἔμφαση δίνεται σέ θέματα όπως ή μετάβαση άπό ένα διακεκριμένο σύστημα σέ ένα συνεχές μέσο καί ή ύπαρξη κυματικῶν φαινομένων σέ συστήματα μέ τοπική άλληλεπίδραση. Τέλος, γίνεται ή διερεύνηση φαινομένων συντονισμοῦ καί είδικότερα τοῦ συντονισμοῦ μεταξύ συστημάτων σέ άσθενή σύζευξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΑΠΛΟΣ ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ

§1.1 Ἐλεύθερες Ταλαντώσεις

Ἀρχίζουμε μέ τή μελέτη τοῦ πιό ἁπλοῦ φυσικοῦ συστήματος πού ἐκτελεῖ ἐλεύθερες ταλαντώσεις γύρω ἀπό μιά θέση εὐσταθοῦς ἰσορροπίας: τόν ἁπλό ἤ μονοδιάστατο ἁρμονικό ταλαντωτή. Κάτω ἀπό αὐτόν τόν τίτλο κατατάσσουμε φυσικά συστήματα πού χαρακτηρίζονται ἀπό ἕνα φυσικό μέγεθος x πού ἡ ἐξάρτησή του ἀπό τό χρόνο t ὑπακούει σέ μιά γραμμική διαφορική ἐξίσωση δεύτερης τάξεως μέ σταθερούς συντελεστές. Ἴσως τό πιό ἐποπτικά ἄμεσο παράδειγμα εἶναι αὐτό τοῦ Σχ. 1. Ἡ μᾶζα Μ εἶναι συνδεδεμένη στήν ἄκρη ἑνός ἐλατηρίου μέ σταθερά Κ καί κινεῖται πάνω σέ ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο χωρίς τριβή (δηλ. ἡ δύναμη βαρύτητας δέν παίζει ρόλο).



Σχῆμα 1

῎Αν x εἶναι ἡ μετατόπιση ἀπό τή θέση ἰσορροπίας ἔχουμε:

$$M\ddot{x} = -Kx \tag{1.1}$$

ὅπου οἱ τελεῖες σημαίνουν παραγώγιση ὡς πρός t.

῾Η γενική λύση τῆς (1.1) μπορεῖ νά γραφτεῖ ὡς ἑξῆς:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{1.2}$$

ὅπου τό <u>πλάτος A</u> καί ἡ <u>σταθερά φάσης φ</u> προσδιορίζονται ἄν μᾶς δοθοῦν οἱ <u>ἀρχικές συνθῆκες</u>, δηλαδή ἡ θέση $x(t_0)$ καί ἡ ταχύτητα $\dot{x}(t_0)$ γιά κάποιο ἀρχικό χρόνο t_0.

῾Η κίνηση πού περιγράφεται ἀπό τήν (1.2) εἶναι <u>περιοδική</u>. ῾Η ποσότητα $\omega_0 = \sqrt{K/M}$ ὀνομάζεται κυκλική συχνότητα* καί συνδέεται μέ τή (συνηθισμένη) <u>συχνότητα</u> ν καί τήν περίοδο τῆς κίνησης T μέ τίς σχέσεις:

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \tag{1.3}$$

῎Αλλα παραδείγματα ἁπλοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ εἶναι:

(i) Τό μαθηματικό ἐκκρεμές (Σχ. 2) προσεγγιστικά γιά μικρές ἀποκλίσεις. ῾Η διαφορική ἐξίσωση γιά τήν τετμημένη x εἶναι $M\ddot{x} = -Mg\sin(x/\ell) \approx -M\frac{g}{\ell}x$. ῎Αρα ἡ συχνότητα εἶναι

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

(ii) Τό ἠλεκτρικό κύκλωμα τοῦ Σχ. 3 μέ ἕνα πυκνωτή χωρητικότητας C καί ἕνα πηνίο αὐτεπαγωγῆς L. Τό ρεῦμα I ἱκανοποιεῖ τή διαφορική ἐξίσωση $L\,d^2I/dt^2 = -C^{-1}I$. Προκύπτει μιά ἁρμονική μεταβολή τοῦ ρεύματος μέ

*῞Οπου δέν ὑπάρχει πρόβλημα συγχύσεως θά παραλείπουμε τό "κυκλική".

σέ δυναμική καί τανάπαλι. Στό κύκλωμα τοῦ Σχ. 3 ἡ ἐνέργεια ἀπό ἠλεκτροστατική (τοῦ πεδίου μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτῆ) μετατρέπεται σέ μαγνητική (τοῦ πεδίου τοῦ πηνίου) κ.ο.κ.

Στήν πράξη ὅλα τά συστήματα ἔχουν κάποια ἀπώλεια ἐνέργειας. Ξέρουμε ἀπό τήν καθημερινή ζωή ὅτι οἱ ἐλεύθερες ταλαντώσεις τους ἀργά ἤ γρήγορα σταματοῦν. Οἱ δυνάμεις "τριβῆς" ἔχουν τήν ἰδιότητα νά ἀντιτίθενται πάντοτε στήν κίνηση. Γιά νά τίς μελετήσουμε θά χρησιμοποιήσουμε ἕνα ἁπλό μοντέλο. Γιά τήν περίπτωση τοῦ Σχ. 1 θά βάλουμε στό δεξιό μέλος τῆς (1.1) ἕνα ὅρο "τριβῆς" ἀνάλογο πρός τήν πρώτη παράγωγο τῆς μεταβλητῆς x. Θά ἔχουμε τότε

$$M\ddot{x} = -Kx - M\Gamma\dot{x} \tag{1.6}$$

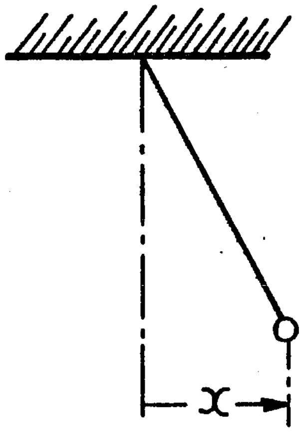
ὅπου $\Gamma > 0$.
Γενικά θά θεωρήσουμε τήν ἐξίσωση τῆς μορφῆς

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \Gamma\dot{x} = 0 \;, \tag{1.7}$$

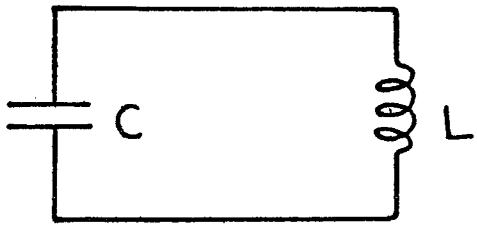
ὅπου Γ εἶναι θετική παράμετρος μέ διαστάσεις $(\text{χρόνος})^{-1}$.

Ἡ διαφορική ἐξίσωση (1.7) μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι διέπει τήν κίνηση τῆς μάζας τοῦ Σχ. 1, ἄν καί στήν πραγματικότητα ἡ δύναμη τριβῆς μέ τό ὁριζόντιο τραπέζι ἤ τόν ἀέρα δέν εἶναι ἀνάλογες πρός τήν ταχύτητα. Παρόλα αὐτά θά μελετήσουμε τήν (1.7) γιατί ἀποδίδει ποιοτικά καλά τά γενικά χαρακτηριστικά ἑνός συστήματος μέ ἀπώλειες ἐνέργειας καί ταυτόχρονα ἡ μαθηματική της διερεύνηση εἶναι ἁπλή γιατί ἐξακολουθοῦμε νά ἔχουμε μιά γραμμική διαφορική ἐξίσωση, ὅπως ἦταν καί ἡ (1.4). [Σημειῶστε ὅτι στήν περίπτωση τοῦ κυκλώματος τοῦ Σχ. 3, ἄν περιλάβουμε στό κύκλωμα μιά ὠμική ἀντίσταση R, πού στήν πραγματικότητα <u>πάντοτε</u> ὑπάρχει, τότε ἔχουμε τήν ἐξίσωση $L\ddot{I} + C^{-1}I + R\dot{I} = 0$, πού εἶναι ἀκριβῶς τῆς μορφῆς (1.7) μέ $\Gamma = R/L$ καί $\omega_0^2 = 1/LC$].

συχνότητα $\omega_0 = 1\sqrt{LC}$.



Σχῆμα 2



Σχῆμα 3

Κάθε ἕνα ἀπό τά παραπάνω συστήματα ἔχει μιά χαρακτηριστική συχνότητα ω_0 μέ τήν ὁποία ταλαντώνεται, ἄν ἀφεθεῖ ἐλεύθερο. Αὐτή ἡ συχνότητα ἐλεύθερης ταλαντώσεως λέγεται καί ἰδιοσυχνότητα τοῦ συστήματος.

Ἄν ἡ ἰδιοσυχνότητα εἶναι ω_0 ἡ διαφορική ἐξίσωση ἔχει σέ ὅλες τίς περιπτώσεις τή μορφή

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1.4}$$

Εἶναι ἀξιοσημείωτο ὅτι ἡ (1.4) συνεπάγεται ὅτι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2\right) = 0 \tag{1.5}$$

Ἄρα ἡ ποσότητα $\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό χρόνο, δηλ. διατηρεῖται. Πράγματι στά παραδείγματα πού μελετήσαμε ἡ παραπάνω ποσότητα εἶναι ἴση μέ κάποια σταθερά ἐπί τήν ὁλική ἐνέργεια τοῦ συστήματος πού διατηρεῖται, ἀφοῦ πρόκειται γιά συστήματα χωρίς κατανάλωση ἐνέργειας δηλ. μηχανικά συστήματα χωρίς τριβές καί κυκλώματα χωρίς ὠμική ἀντίσταση. Στά μηχανικά συστήματα τῶν Σχ. 1 καί 2 ἡ ὁλική ἐνέργεια κατά τή διάρκεια μιᾶς περιόδου μετατρέπεται ἀπό κινητική

Ἂν οἱ ἀπώλειες δέν εἶναι μεγάλες καί πιό συγκεκριμένα ἄν

$$\Gamma^2 < 4\omega_0^2$$

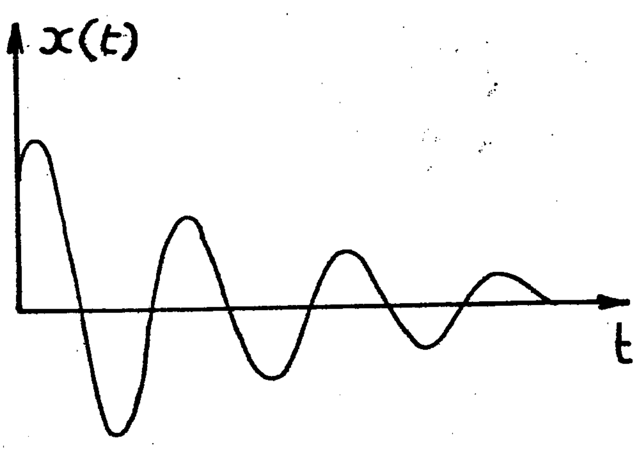
τότε εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι ἡ γενική λύση τῆς (1.7) εἶναι

$$x(t) = Ae^{-\Gamma t/2}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1.8)$$

ὅπου

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/4} = \omega_0\left(1 - \frac{\Gamma^2}{8\omega_0^2} + \ldots\right) \qquad (1.9)$$

Τό πλάτος Α καί ἡ σταθερά φάσης φ προσδιορίζονται ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες, ὅπως καί στήν (1.2). Ἡ γραφική παράσταση τῆς (1.8) στό Σχ. 4 δείχνει τά γνώριμα χαρακτηριστικά μιᾶς ταλάντωσης πού "σβύνει". Ὁ χαρακτηριστικός χρόνος ἀποσβέσεως $\tau = 1/\Gamma$ ὁρίζεται σάν ὁ χρόνος πού χρειάζεται γιά ἐλαττωθεῖ τό πλάτος στό $1/\sqrt{e}$ τῆς ἀρχικῆς του τιμῆς.



Σχῆμα 4

Εἶναι ἀξιοσημείωτο ὅτι ἡ ταλάντωση δέ γίνεται μέ κυκλική συχνότητα τήν ω_0 ἀλλά μέ τήν $\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/4}$ πού εἶναι λίγο μικρότερη. Γιά τό λόγο ω_0/Γ χρησιμοποιεῖται συνήθως ὁ ὅρος <u>παράγοντας ποιότητας</u> (quality factor) καί τό σύμβολο Q. Ἡ (1.9) δείχνει ὅτι ὅταν οἱ ἀπώλειες εἶναι πολύ μικρές (δηλ. ὁ Q πολύ μεγάλος) τότε ἡ διαφορά μεταξύ ω καί ω_0 εἶναι τῆς τάξεως τοῦ $1/Q^2$ (καί ὄχι $1/Q$). Ἐπομένως $\omega \approx \omega_0$ μέ καλή προσέγγιση. Δέ θά ἀσχοληθοῦμε μέ τήν περίπτωση μεγάλων ἀπωλειῶν δηλ. $\Gamma^2 > 4\omega_0^2$. Ἀρκεῖ νά ποῦμε ὅτι στήν περίπτωση αὐτή ἡ ποσότητα x δέν ταλαντοῦται καθόλου, ἀλλά οὐσιαστικά φθίνει ἐκθετικά.

§1.2 Ἐξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

Ἄς μελετήσουμε τώρα πῶς θά συμπεριφερθεῖ τό σύστημά μας ὅταν τοῦ ἐπιβληθεῖ μιά πρόσθετη "ἐξωτερική" δύναμη καί πιό συγκεκριμένα μιά δύναμη πού δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ποσότητα x τήν ἴδια ἤ τή χρονική της παράγωγο $\dot{x}$. Ἄν κάνουμε τήν ἁπλουστευτική παραδοχή ὅτι ἡ ἐξωτερική αὐτή δύναμη μεταβάλλεται μέ τό χρόνο μέ ἡμιτονοειδή τρόπο ἔχουμε τή διαφορική ἐξίσωση

$$M\ddot{x} = -Kx - M\Gamma\dot{x} + F_0\cos\omega t \qquad (1.10)$$

γιά τό σύστημα τοῦ Σχ. 1 ἤ γενικά τή μορφή*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \Gamma\dot{x} = f_0\cos\omega t \qquad (1.11)$$

Ἡ ἐξίσωση (1.11) εἶναι γραμμική ὡς πρός τήν x καί τίς παραγώγους της, ἀλλά δέν εἶναι <u>ὁμογενής</u> ὅπως ἡ (1.4) ἤ ἡ (1.7) δηλ. ὑπάρχει καί ὁ ἀνεξάρτητος ἀπό τήν x ὅρος $f_0\cos\omega t$. Ἡ γενική λύση μιᾶς μή ὁμογενοῦς γραμμικῆς ἐξίσωσης εἶναι τό ἄθροισμα μιᾶς ὁποιασδήποτε λύσης της καί τῆς γενικῆς λύσης της καί τῆς γενικῆς λύσης τῆς ἀντίστοιχης ὁμογενοῦς** δηλ. τῆς (1.7) στήν προκειμένη περίπτωση.

Γιά νά βροῦμε μιά λύση τῆς (1.11) κάνουμε τήν ἀντικατάσταση

*Στήν περίπτωση τοῦ κυκλώματος τοῦ Σχ. 3 στό ρόλο τῆς ἐξωτερικά ἐπιβεβλημένης δύναμης ἔχουμε μιά γεννήτρια ἐναλλασσομένου ρεύματος συχνότητας ω πού συνδέεται ἐν σειρά μέ τήν αὐτεπαγωγή καί τόν πυκνωτή.

**Οἱ βασικές ἰδιότητες γραμμικῶν ἐξισώσεων συνοψίζονται στό ἐδάφιο 1.6.

$$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{1.12}$$

στήν (1.11) ὁπότε προκύπτει

$$\{(\omega_0^2 - \omega^2)A - \omega\Gamma B\}\sin\omega t + \{\omega\Gamma A + (\omega_0^2 - \omega^2)B - f_0\}\cos\omega t = 0$$

Γιά νά ἰσχύει ἡ σχέση αὐτή γιά ὅλους τούς χρόνους t πρέπει οἱ συντελεστές τοῦ sinωt καί cosωt νά μηδενίζονται. Ἔτσι ἔχουμε δύο γραμμικές ἐξισώσεις γιά τά A καί B πού ἡ λύση τους μᾶς δίνει

$$A = f_0 \frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \tag{1.13α}$$

$$B = f_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \tag{1.13β}$$

Ὥστε ἡ γενική λύση τῆς (1.11) μπορεῖ νά γραφτεῖ ὡς ἑξῆς:

$$x(t) = A_1 e^{-\Gamma t/2}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/4}\; t + \varphi_1) +$$

$$+ f_0 \frac{\omega\Gamma\sin\omega t + (\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \tag{1.14}$$

ὅπου οἱ σταθερές A_1 καί φ_1 προσδιορίζονται ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες. Βλέπουμε ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος ἀποτελεῖ ἕνα μεταβατικό φαινόμενο πού συνίσταται σέ μιά ἀποσβεννύμενη ταλάντωση μέ συχνότητα $\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/4}$. Μετά ἀπό παρέλευση χρόνου t πολύ μεγαλύτερου τοῦ χαρακτηριστικοῦ χρόνου ἀπόσβεσης $1/\Gamma$ ἡ ταλάντωση αὐτή μπορεῖ νά ἀγνοηθεῖ. Μένουμε μέ τό δεύτερο ὅρο τῆς (1.14) πού ἀντιπροσωπεύει ταλάντωση μέ συχνότητα τή συχνότητα ω τῆς ἐξωτερικά ἐπιβεβλημένης δύναμης. Ἀπό δῶ καί μπρός θά συγκεντρώσουμε τήν προσοχή μας στήν "μόνιμη" αὐτή ταλάντωση πού δίνεται ἀπό τό δεύτερο ὅρο τῆς (1.14):

$$x(t) \cong f_0 \frac{\omega\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2} \sin\omega t + f_0 \frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2} \cos\omega t \tag{1.15}$$

ἤ

$$x(t) \cong f_0 \frac{\cos(\omega t+\varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}}, \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{\omega\Gamma}{\omega^2-\omega_0^2} \tag{1.15'}$$

Ἕνα ἐνδιαφέρον ἐρώτημα εἶναι: πόση ἰσχύς δίνεται στό σύστημα ἀπό τήν ἐξωτερική δύναμη; Ἡ ἰσχύς αὐτή εἶναι γενικά ἀνάλογη πρός τή δύναμη ἐπί τήν ταχύτητα $\dot{x}$, δηλ. $\dot{x}f_0\cos\omega t$. Αὐτό πού πραγματικά ἐνδιαφέρει εἶναι ἡ μέση τιμή τῆς ἰσχύος κατά τή διάρκεια μιᾶς περιόδου. Θά χρησιμοποιοῦμε τό σύμβολο $\langle\psi\rangle$ γιά τή μέση τιμή (ὡς πρός τό χρόνο) μιᾶς μεταβλητῆς ψ. Ἔχουμε λοιπόν γιά τήν ἰσχύ P

$$\langle P\rangle \simeq \langle f_0\dot{x}\cos\omega t\rangle \simeq \frac{1}{2} f_0^2 \frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2} \tag{1.16}$$

ἐπειδή $\langle\cos^2\omega t\rangle = 1/2$ καί $\langle\sin\omega t\,\cos\omega t\rangle = 0$. Ἡ ἰσχύς αὐτή ἀπορροφᾶται ἀπό τό σύστημα καί ἀποβάλλεται σάν θερμότητα τριβῶν ἤ Joule ἀνάλογα μέ τήν περίπτωση. Ἀπό τήν (1.16) βλέπουμε ὅτι ἡ ἀπορροφούμενη ἰσχύς εἶναι ἀνάλογη πρός τόν συντελεστή τοῦ sinωt στήν (1.15) δηλ. τοῦ ὅρου πού ἔχει διαφορά φάσης 90° ἀπό τή δύναμη. Γι'αὐτό ὁ συντελεστής αὐτός λέγεται <u>πλάτος ἀπορρόφησης</u>.

$$A_{\alpha\pi o\rho.}(\omega) \equiv f_0 \frac{\omega\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2} \qquad (1.17)$$

῾Ο συντελεστής τοῦ $\cos\omega t$ στήν ἔκφραση (1.15) γιά τό $x(t)$ πού εἶναι σέ φάση μέ τήν ἐξωτερική δύναμη λέγεται <u>ἐλαστικό πλάτος</u> (τό ἐπίθετο σχετίζεται μέ τήν ἔκφραση "ἐλαστική κρούση" γιά κρούσεις χωρίς ἀπώλεια μηχανικῆς ἐνέργειας):

$$A_{\varepsilon\lambda}(\omega) = f_0 \frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2} \qquad (1.18)$$

῎Ετσι ἡ (1.15) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$x(t) = A_{\alpha\pi o\rho.}(\omega)\sin\omega t + A_{\varepsilon\lambda.}(\omega)\cos\omega t \qquad (1.19)$$

῾Η ἐξάρτηση τῶν πλατῶν $A_{\alpha\pi o\rho.}$, $A_{\varepsilon\lambda.}$ καί τῆς γωνίας φ (βλ. 1.15΄) ἀπό τή συχνότητα ω ἔχει ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον. ῞Οπως βλέπουμε στή γραφική παράσταση τοῦ Σχ. 5, γιά τήν περίπτωση μικρῆς ἀπώλειας δηλ. ὅταν*

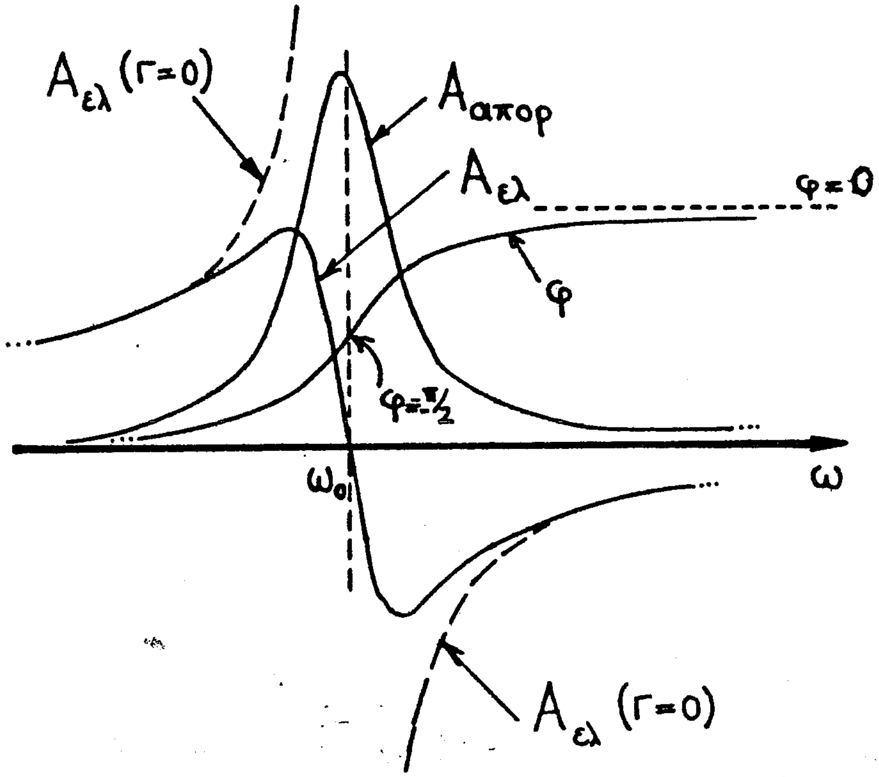
$$\Gamma \ll \omega_0$$

τό $A_{\alpha\pi o\rho.}$ ἔχει μέγιστο γιά $\omega \cong \omega_0$. Λέμε ὅτι γιά $\omega \cong \omega_0$ ἔχουμε <u>συντονισμό</u>. ῾Η καμπύλη τοῦ $A_{\acute{\alpha}\pi o\rho.}$ πέφτει ἀπότομα ὅταν ἀπομακρυνθοῦμε ἀπό τό μέγιστο καί παίρνει τιμή ἴση μέ τό μισό τοῦ μέγιστου στά σημεῖα

$$\omega \cong \omega_0 \pm \Gamma/2$$

---

*Τό σύμβολο << σημαίνει "πολύ μικρότερο ἀπό".



Σχῆμα 5

Μποροῦμε λοιπόν νά ποῦμε ὅτι ἡ καμπύλη τοῦ $A_{\alpha\pi o\rho.}$ ἔχει εὖρος

$$\Delta\omega = \Gamma \tag{1.20}$$

Ἔχουμε ἔτσι μιά ἁπλή σχέση μεταξύ τοῦ <u>εὔρους συντονισμοῦ</u> Δω καί τοῦ χαρακτηριστικοῦ χρόνου ἀπόσβεσης $\tau = 1/\Gamma$ τῶν ἐλεύθερων ταλαντώσεων (πού θά ἐκτελοῦσε τό σύστημα ἄν δέν ὑπῆρχε ἡ ἐξωτερική δύναμη):

$$\tau \cdot \Delta\omega = 1 \tag{1.21}$$

Ἕνας πρακτικός τρόπος νά προσδιορίσουμε πειραματικά τήν ἰδιοσυχνότητα ἑνός φυσικοῦ συστήματος εἶναι νά μετρήσουμε τήν ἀπόκρισή του σέ μιά ἐξωτερική "δύναμη" (ἤ τάση ἄν πρόκειται γιά κύκλωμα) γνωστῆς καί ρυθμιζόμενης συχνότητας. Ἡ ἰδιοσυχνότητα εἶναι ἐκείνη γιά τήν ὁποία θά ἔχουμε τό μέγιστο ἀπορροφούμενης ἰσχύος. Τό εὖρος Δω τοῦ συντονισμοῦ, μέσω τῆς (1.21), θά μᾶς δώσει καί τό χρόνο ἀποσβέσεως τῶν ἐλευθέρων ταλαντώσεων τοῦ συστήματος, πράγμα πού πολλές φορές εἶναι δύσκολο νά μετρηθεῖ ἀπ'εὐθείας.

Στό Σχ. 5 βλέπουμε ὅτι τό ἐλαστικό πλάτος μηδενίζεται καί ἐπομένως $\varphi=-\pi/2$ στή συχνότητα συντονισμοῦ. Μακρυά ὅμως ἀπό τή συχνότητα συντονισμοῦ δηλ. γιά $|\omega-\omega_0|>>\Gamma$ τό ἐλαστικό πλάτος εἶναι πολύ μεγαλύτερο τοῦ πλάτους ἀπορροφήσεως:

$$\frac{|A_{\varepsilon\lambda.}|}{A_{\acute{\alpha}\pi o\rho.}}=\frac{|\omega_0^2-\omega^2|}{\omega\Gamma}>>1$$

Αὐτό σημαίνει ὅτι ἄν ἐξετάζουμε τήν ἀπόκριση τοῦ συστήματος σέ ἐξωτερικές ἐπιδράσεις μέ συχνότητα ω μακρυά ἀπό τή συχνότητα συντονισμοῦ τότε μποροῦμε νά ἀγνοήσουμε τό πλάτος ἀπορροφήσεως καί νά γράψουμε προσεγγιστικά

$$x(t)\cong A_{\varepsilon\lambda}\cos\omega t=f_0\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\cos\omega t$$

'Αλλά, τότε ἀφοῦ $|\omega-\omega_0|>>\Gamma$ μποροῦμε νά ἀμελήσουμε καί τόν ὅρο $\omega^2\Gamma^2$ στόν παρονομαστή τοῦ $A_{\varepsilon\lambda}$ καί νά ἔχουμε

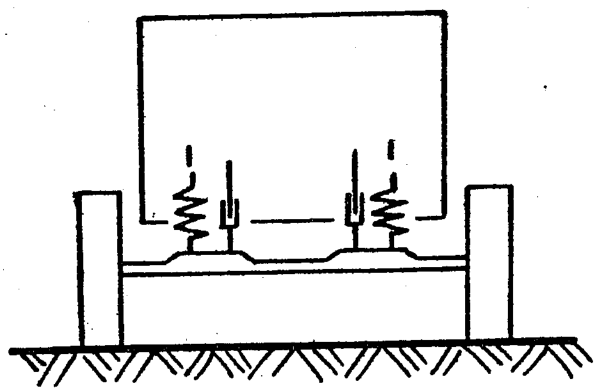
$$x(t)\approx\frac{f_0\cos\omega t}{\omega_0^2-\omega^2} \qquad (1.22)$$

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ (1.22) εἶναι ἡ μόνιμη λύση τῆς (1.11) γιά $\Gamma=0$. Ὅπως θά δοῦμε παρακάτω αὐτή εἶναι μιά γενική ἰδιότητα τῶν ἐξαναγκασμένων ταλαντώσεων:

<u>Μποροῦμε σέ πρώτη προσέγγιση νά ἀμελήσουμε τίς ἀπώλειες</u> (τριβή, ὠμικές ἀντιστάσεις κλπ.) <u>ἀρκεῖ νά μή βρισκόμαστε κοντά σέ συχνότητα συντονισμοῦ</u>.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Μόνωση ἔναντι ταλαντώσεων. Τό ἀμάξωμα ἑνός ὀχήματος στηρίζεται πάνω στό σύστημα τροχῶν καί ἀξόνων μέ ἐλατήρια καί ὑδραυλικά ἀμορτισέρ (Σχ. 6). Ἄν x_1 καί x_2 εἶναι οἱ κατακόρυφες μετατοπίσεις τοῦ ἀμαξώματος καί τῶν τροχῶν ἀπό τίς ἀντίστοιχες θέσεις ἰσορροπίας ἔχουμε (m = μάζα τοῦ ἀμαξώματος)

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - m\Gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$



Σχῆμα 6

Στήν παραπάνω ἐξίσωση ἡ σταθερά k χαρακτηρίζει τό σύστημα τῶν ἐλατηρίων καί ἡ $m\Gamma$ τά ἀμορτισέρ*. Ἡ μετατόπιση x_2 θεωρεῖται καθορισμένη σάν συνάρτηση τοῦ χρόνου ἀπό τίς ἀνωμαλίες τοῦ δρόμου καί τήν ταχύτητα τοῦ ὀχήματος. Συγκεκριμένα, ἄς ὑποθέσουμε ὅτι μεταβάλλεται ἁρμονικά μέ τό χρόνο: $x_2(t) = H\cos(\omega t)$. Ἐνδιαφέρει νά μελετηθεῖ ἡ ἀπόκριση τοῦ ἀμαξώματος $x_1(t)$. Ἀντικαθιστώντας στή διαφορική ἐξίσωση ἔχουμε

*Κάνουμε ἐδῶ τήν ἁπλουστευτική παραδοχή ὅτι ὁ ρόλος τῶν ἀμορτισέρ μπορεῖ νά παρασταθεῖ ἀπό ἕνα ὅρο ἀνάλογο μέ τή σχετική ταχύτητα μεταξύ τῶν ἄκρων του πού εἶναι ἴση μέ $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$.

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k}{m}x_1 - \Gamma\dot{x}_1 + H\frac{k}{m}\cos\omega t - H\omega\Gamma\sin\omega t$$

ἤ

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 - \Gamma\dot{x}_1 + H\sqrt{\omega_0^4 + \omega^2\Gamma^2}\cos(\omega t + \alpha)$$

ὅπου

$$\omega_0^2 = k/m\ , \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\omega\Gamma}{\omega_0^2}\right)$$

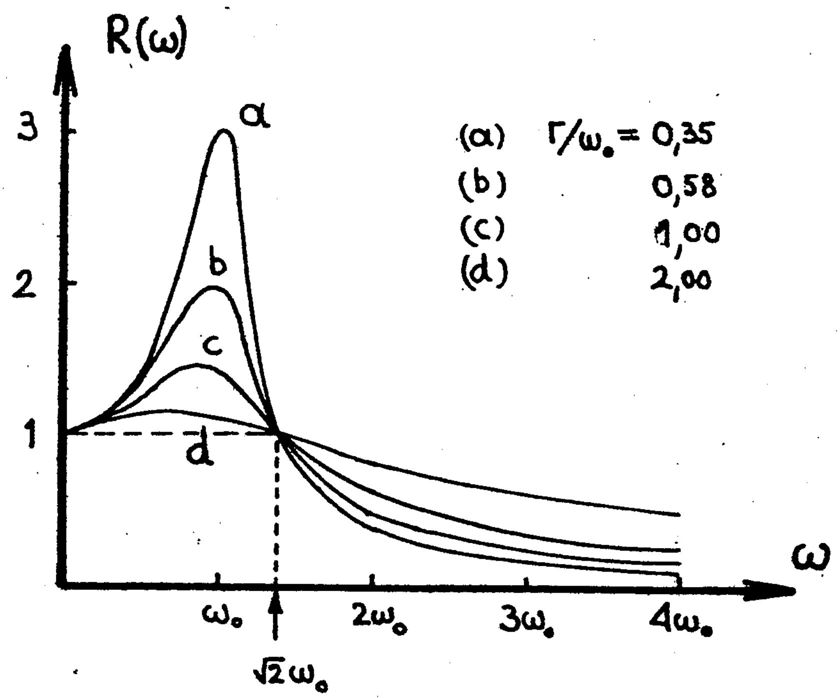
Σύμφωνα μέ τήν (1.15′) ἔχουμε τή λύση

$$\underline{x}(t) = R(\omega)H\cos(\omega t + \alpha + \varphi)$$

ὅπου

$$R(\omega) = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\Gamma}{\omega_0}\right)^2}{\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\Gamma}{\omega_0}\right)^2}}$$

Τό Σχ. 7 δίνει τή γραφική παράσταση τοῦ πλάτους ἀποκρίσεως $R(\omega)$ σάν συνάρτηση τοῦ λόγου ω/ω_0.



Σχῆμα 7

Παρατηροῦμε ὅτι τό σύστημα ἐξασθενίζει τό πλάτος τῶν ὑψισύχνων διαταράξεων ἀφοῦ γιά $\omega > \sqrt{2}\omega_0$ ἔχουμε $R(\omega) < 1$. Πρέπει λοιπόν νά ἐπιλεγοῦν τά ἐλατήρια ἔτσι ὥστε ἡ ἰδιοσυχνότητα $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ νά εἶναι χαμηλότερη ἀπό τίς συχνότητες διαταράξεων ω γιά τίς ὁποῖες ἐπιδιώκεται νά "μονωθεῖ" τό ἁμάξωμα. Ὁ ρόλος τῆς ἀπόσβεσης εἶναι νά μετριάζει τό πλάτος γιά συχνότητες γύρω ἀπό τή συχνότητα συντονισμοῦ ω_0, παρ'ὅλο πού αὔξηση τοῦ Γ προκαλεῖ αὔξηση τοῦ πλάτους γιά $\omega > \sqrt{2}\omega_0$.

§1.3 Χρήση Μιγαδικῶν Μεταβλητῶν

Οἱ ἀλγεβρικές πράξεις ἁπλοποιοῦνται ἄν ἀντί τῶν $\sin\omega t$ καί $\cos\omega t$ χρησιμοποιήσουμε τίς ἐκθετικές συναρτήσεις $e^{i\omega t}$ καί $e^{-i\omega t}$. Ἄς θεωρήσουμε πρῶτα τήν ὁμογενή ἐξίσωση (1.7) καί ἄς ζητήσουμε μιά λύση της τῆς μορφῆς

$$x(t) = Ce^{i\omega t} \tag{1.23}$$

Ἀντικαθιστώντας στήν (1.7) ἔχουμε

$$-\omega^2 + \omega_0^2 + i\omega\Gamma = 0$$

Ἄρα, ἡ ω πρέπει νά πάρει μιά ἀπό τίς δύο τιμές

$$\omega_\pm = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/4} + i\Gamma/2$$

Ἔχει λοιπόν ἡ (1.7) τίς δύο γραμμικά ἀνεξάρτητες* λύσεις $e^{-i\omega_\pm t}$ ὥστε ἡ γενική <u>μιγαδική</u> της λύση εἶναι ἕνας γραμμικός συνδυασμός τῶν δύο:

$$x_0(t) = C_1 e^{i\left[\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/4} + i\Gamma/2\right]t} + C_2 e^{i\left[-\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/4} + i\Gamma/2\right]t}$$

---

*Δύο συναρτήσεις $x_1(t)$ καί $x_2(t)$ λέγονται γραμμικά ἀνεξάρτητες ὅταν δέν ὑπάρχει ἀριθμός α τέτοιος ὥστε $x_1(t) = \alpha x_2(t)$ γιά <u>ὅλα</u> τά t.

ὅπου C_1, C_2 τυχόντες μιγαδικοί ἀριθμοί. Ἐπειδή ἐμεῖς ἐνδιαφερόμαστε γιά πραγματικές λύσεις $x(t)$, πρέπει ὁ C_2 νά εἶναι συζυγής τοῦ C_1:

$$C_2^* = C_1$$

Θέτουμε λοιπόν $C_1 = Ae^{i\varphi}/2$ καί $C_2 = Ae^{-i\varphi}/2$ μέ πραγματικά A καί φ καί ἔχουμε τελικά τήν (1.8).

Ἄς δοῦμε τώρα πῶς λύνεται ἡ μή ὁμογενής ἐξίσωση (1.11), μέ παρόμοιο τρόπο. Ἡ ἐξίσωση

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \Gamma\dot{x} = f_0 e^{i\omega t} \tag{1.24}$$

προφανῶς ἔχει λύση τῆς μορφῆς (1.23). Πράγματι ἄν ἀντικαταστήσουμε τήν (1.23) στήν (1.24) βρίσκουμε τή λύση

$$x_\omega(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma} f_0 e^{i\omega t}$$

Ἐπίσης ἡ ἐξίσωση

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \Gamma\dot{x} = f_0 e^{-i\omega t} \tag{1.24'}$$

ἔχει τή λύση

$$x_{-\omega}(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} f_0 e^{-i\omega t}$$

Ἀφοῦ ἡ (1.11) εἶναι τό ἡμιάθροισμα τῶν (1.24) καί (1.24'), ἔπεται ὅτι λύση τῆς (1.11) εἶναι τό ἡμιάθροισμα τῶν $x_\omega(t)$ καί $x_{-\omega}(t)$, δηλ.

$$x = \frac{1}{2}\left\{\frac{f_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma} + \frac{f_0 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}\right\} \tag{1.25}$$

πού εἶναι ἡ ἴδια μέ τήν (1.15). Ἡ γενική λύση (1.14) προκύπτει ἄν προσθέσουμε στήν (1.25) τή λύση τῆς ὁμογενοῦς ἐξίσωσης, δηλ. τή x_0.

§1.4 Τυχοῦσα Ἐξωτερική Δύναμη

Ἔχοντας λύσει τό πρόβλημα τῶν ἐξαναγκασμένων ταλαντώσεων γιά μιά ἁρμονική* δύναμη μιᾶς ὁποιασδήποτε συχνότητας ω βρίσκουμε ἀμέσως τή λύση καί γιά μιά δύναμη πού εἶναι ἄθροισμα ἁρμονικῶν ὅρων:

$$f(t) = f_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + f_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots \qquad (1.26)$$

Πράγματι ἐπειδή ἡ ἐξίσωση

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \Gamma\dot{x} = f(t)$$

εἶναι γραμμική ὡς πρός τήν ἄγνωστη συνάρτηση x ἡ γενική της λύση εἶναι ἡ γενική λύση τῆς ἀντίστοιχης ὁμογενοῦς, δηλ. τῆς [(1.7)] σύν τό ἄθροισμα τῶν μόνιμων λύσεων πού θά εἴχαμε ἄν κάθε ὅρος τοῦ ἀθροίσματος (1.26) ἐνεργοῦσε μόνος του (βλ. §1.6). Ἄρα ἔχουμε τή γενική λύση

$$x(t) = (\text{μεταβατικός ὅρος}) +$$

$$+ \sum_j f_j \left\{ \frac{\omega_j \Gamma}{(\omega^2 - \omega_j^2)^2 + \omega_j^2\Gamma^2} \sin(\omega_j t + \varphi_j) + \right.$$

---

*Στή Φυσική ὀνομάζουμε ἁρμονική μιά ποσότητα πού μεταβάλλεται μέ τό χρόνο σάν ἕνα ἡμίτονο ἤ ἕνα συνημίτονο ἤ γενικά σάν ἕνας γραμμικός συνδυασμός τῶν $e^{i\omega t}$ καί $e^{-i\omega t}$ μέ τήν ἴδια συχνότητα ω.

$$+\frac{\omega_0^2-\omega_j^2}{(\omega^2-\omega_j^2)^2+\omega_j^2\Gamma}\cos(\omega_j t+\varphi_j)\Bigg\} \qquad (1.27)$$

Ἐπειδή ὅπως θά δοῦμε παρακάτω μιά οὐσιαστικά τυχοῦσα δύναμη $f(t)$ μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ ἁρμονικές "συνιστῶσες", ὅπως στήν (1.26), ἡ παραπάνω παρατήρηση λύνει τό πρόβλημα καί γιά μιά τυχοῦσα δύναμη.

§1.5 Γραμμικοποίηση

Ἡ σπουδαιότητα τοῦ ἁπλοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ ἔγκειται στό ἑξῆς: ὁποιοδήποτε σύστημα πού χαρακτηρίζεται ἀπό ἕνα μέγεθος $x(t)$ καί πού ὑπακούει σέ μιά διαφορική ἐξίσωση τῆς μορφῆς

$$\ddot{x}=f(x,\dot{x}) \qquad (1.28)$$

ὅπου ἡ f εἶναι τέτοια ὥστε οἱ τιμές $x=0$, $\dot{x}=0$ νά ἀντιστοιχοῦν σέ εὐσταθῆ ἰσορροπία, συμπεριφέρεται κατά προσέγγιση σάν ἁπλός ἁρμονικός ταλαντωτής ὅταν οἱ ἀρχικές τιμές τῶν x καί $\dot{x}$ εἶναι ἀρκετά μικρές.

Πράγματι, ἄς ἀναπτύξουμε τήν f σέ σειρά δυνάμεων τῶν x καί $\dot{x}$ (ἐδῶ ὑποθέτουμε ὅτι ἡ f ἔχει τέτοιο ἀνάπτυγμα γιά ἀρκετά μικρά x καί $\dot{x}$)

$$f(x,\dot{x})=a_0+a_1x+b_1\dot{x}+a_2x^2+b_2\dot{x}^2+c_2x\dot{x}^2+\dots \qquad (1.29)$$

Ἡ συνθήκη εὐσταθοῦς ἰσορροπίας σημαίνει ὅτι $a_0=0$, $a_1<0$ καί $b_1\leq 0$. [Πράγματι γιά $x=\dot{x}=0$ πρέπει νά μηδενίζεται ἡ f. Ἄρα $a_0=0$ καί $f\cong a_1x+b_1\dot{x}$ γιά μικρές τιμές τῶν x καί $\dot{x}$. Γιά νά ἔχουμε εὐσταθῆ ἰσορροπία ὁ ὅρος a_1x πρέπει νά ἀντιπροσωπεύει δύναμη πού τείνει νά ἐπαναφέρει τό x στό μηδέν, ἄρα $a_1<0$. Ἐπίσης, γιά νά εἶναι ὁ $b_1\dot{x}$ ὅρος τριβῆς πρέπει $b_1\leq 0$.]

'Από τά παραπάνω προκύπτει ότι άν αρχικά τά x καί $\dot{x}$ εΐναι αρκετά μικρά θά παραμείνουν μικρά γιά πάντα καί έπομένως μπορούμε νά κάνουμε μιά άπλουστευτική προσέγγιση καί νά παραλείψουμε όλους τούς όρους τοῦ ἀναπτύγματος (1.29) έκτός τῶν γραμμικῶν δηλ. νά θέσουμε

$$f(x,\dot{x}) \simeq a_1 x + b_1 \dot{x} \qquad a_1 < 0, \quad b_1 \leq 0$$

'Υπό τίς συνθῆκες αὐτές τό σύστημά μας ὑπακούει προσεγγιστικά στή γραμμικοποιημένη ἐξίσωση

$$\ddot{x} = a_1 x + b_1 \dot{x}$$

δηλαδή συμπεριφέρεται σάν ἁπλός ἁρμονικός ταλαντωτής σέ ἐλεύθερη ταλάντωση.

Εὔκολα ἐπίσης μποροῦμε νά δείξουμε ὅτι σέ περίπτωση πού ὑπάρχει καί μιά "ἐξωτερική δύναμη" δηλαδή ὅταν ἀντί τῆς (1.28) ἔχουμε γενικότερα τή μορφή

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x}) + F(t)$$

πάλι ἡ γραμμικοποίηση εἶναι καλή προσέγγιση ἀρκεῖ, ἐκτός ἀπό τίς παραπάνω ἰδιότητες τῆς f, ἡ F(t) νά εἶναι ἀρκετά μικρή καί νά εἶναι παράγωγος μιᾶς ἀρκετά μικρῆς συνάρτησης [ἰσοδύναμα: τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t)dt \tag{1.30}$$

νά εἶναι ἀρκετά μικρό γιά τυχόντα t_1 καί t_2. Ἕνα παράδειγμα εἶναι τό $F(t) = f_0 \cos\omega t$ μέ μικρό πλάτος f_0].

Ἕνα πολύ γνωστό παράδειγμα γραμμικοποίησης εἶναι τό μαθηματικό ἐκκρεμές πού ἐξίσωση κίνησής του εἶναι

$$\ddot{x} = -g\sin(\frac{x}{\ell}) = -g\left[\frac{x}{\ell} - \frac{1}{6}(\frac{x}{\ell})^3 + \ldots\right]$$

Γιά μικρά πλάτη ταλαντώσεως κάνουμε γραμμικοποίηση άντικαθιστώντας προσεγγιστικά τό $\sin(x/\ell)$ μέ x/ℓ, όπότε έχουμε ένα άπλό άρμονικό ταλαντωτή.

Αύτή ή γραμμικοποίηση διαφορικών έξισώσεων γιά μικρές άποκλίσεις άπό εύσταθή ίσορροπία είναι, μιά πολύ χρήσιμη προσέγγιση πού έφαρμόζεται γενικά, δηλαδή καί σέ πολύπλοκα συστήματα πού χαρακτηρίζονται άπό περισσότερα τοῦ ένός μεγέθη $x_1(t)$, $x_2(t)$,.....

§1.6 †Γενικές Ίδιότητες Γραμμικῶν Έξισώσεων

Συνοψίζουμε έδῶ όρισμένες βασικές ίδιότητες τῶν γραμμικῶν έξισώσεων. Όρίζουμε τό σύμβολο $L(\psi)$ σάν ένα γραμμικό συνδυασμό τῆς συνάρτησης ψ καί τῶν παραγώγων της, έτσι ὥστε νά ίσχύουν οί σχέσεις

$$L(\lambda\psi) = \lambda L(\psi)$$

$$L(\psi + \varphi) = L(\psi) + L(\varphi)$$

όπου λ τυχόν άριθμός καί ψ, φ τυχοῦσες συναρτήσεις πού έχουν τόν άπαιτούμενο άριθμό παραγώγων [Παράδειγμα: $L(\psi) = 3\ddot{\psi} + 5\dot{\psi}$].

Μιά έξίσωση τῆς μορφῆς

$$L(\psi) = 0$$

λέγεται <u>γραμμική καί όμογενής</u> ὡς πρός τήν άγνωστη συνάρτηση ψ. Άπό τίς παραπάνω ίδιότητες εὔκολα συνάγεται ότι τό σύνολο τῶν συναρτήσεων - λύσεων τῆς έξισώσεως $L(\psi) = 0$ έχει τήν ίδιότητα

---

† Τό έδάφιο αύτό μπορεῖ νά παραλειφθεῖ σέ πρώτη άνάγνωση.

τῆς ὑπέρθεσης (ἤ ἐπαλληλίας): ἄν οἱ ψ_1 καί ψ_2 εἶναι λύσεις τότε λύση εἶναι καί κάθε γραμμικός συνδυασμός τους $\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2$, ὅπου λ_1, λ_2 τυχόντες ἀριθμοί. Στά μαθηματικά λέμε ὅτι οἱ λύσεις τῆς $L(\psi) = 0$ ἀποτελοῦν ἕνα γραμμικό (ἤ διανυσματικό) χῶρο.

῞Αν h εἶναι μιά δοσμένη συνάρτηση, ἡ ἐξίσωση

$$L(\psi) = h$$

λέγεται γραμμική καί μή ὁμογενής ὡς πρός τήν ἄγνωστη συνάρτηση ψ. ῞Αν ψ,φ εἶναι δύο ὁποιεσδήποτε λύσεις τῆς $L(\psi) = h$ τότε ἡ διαφορά τους $\psi - \varphi$ προφανῶς ἱκανοποιεῖ τήν ὁμογενή ἐξίσωση. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

῾Η γενική λύση μιᾶς μή ὁμογενοῦς γραμμικῆς ἐξίσωσης $L(\psi) = h$ εἶναι τό ἄθροισμα μιᾶς ὁποιασδήποτε λύσης της καί τῆς γενικῆς λύσης τῆς ἀντίστοιχης ὁμογενοῦς $L(\psi) = 0$.

᾿Επίσης εἶναι φανερό ὅτι ἄν ψ καί φ εἶναι λύσεις ἀντίστοιχα τῶν ἐξισώσεων

$$L(\psi) = h$$

$$L(\varphi) = g$$

τότε καί ἡ συνάρτηση $f = \psi + \varphi$ εἶναι λύση τῆς ἐξισώσεως

$$L(f) = h + g$$

Οἱ παραπάνω βασικές ἰδιότητες γενικεύονται κατά προφανή τρόπο στήν περίπτωση συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων μέ πολλές ἄγνωστες συναρτήσεις $\psi_1, \psi_2, \ldots$ τῆς μορφῆς:

$$\begin{aligned} L_1(\psi_1, \psi_2, \ldots) &= h_1 \\ L_2(\psi_1, \psi_2, \ldots) &= h_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_n(\psi_1, \psi_2, \ldots) &\quad h_n \end{aligned}$$

§1.7 Ἀναρμονικός Ταλαντωτής

Ἄς δοῦμε τώρα μέ συντομία πῶς συμπεριφέρεται ἕνα σύστημα ὅταν οἱ μή γραμμικοί ὅροι στό δεξιό μέλος τῆς (1.28) δέν εἶναι ἀμελητέοι. Θά πάρουμε σάν παράδειγμα τό σύστημα τοῦ Σχ. 1, ἀλλά μέ ἐλατήριο πού δέν ὑπακούει ἀκριβῶς τό νόμο τοῦ Hooke. Συγκεκριμένα, θά ὑποθέσουμε ὅτι ἀντί τῆς (1.1) ἰσχύει μιά σχέση τῆς μορφῆς*

$$M\ddot{x} = -Kx - \gamma x^3 \tag{1.31}$$

Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι ἡ παραπάνω σχέση δέν ἐπαληθεύεται ἀπό τή μορφή $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ γιά καμμιά τιμή τῆς ω. Ἄρα δέν ὑπάρχουν ἁρμονικές λύσεις. Αὐτό εἶναι γενική συνέπεια τῆς ὕπαρξης μή γραμμικῶν ὅρων. Γι'αὐτό τέτοιοι ὅροι λέγονται ἀναρμονικοί καί τό σύστημα ἀναρμονικός ταλαντωτής.

Παρ'ὅλο πού τό παραπάνω σύστημα δέν ἐκτελεῖ ἁρμονικές κινήσεις, ἐκτελεῖ περιοδικές κινήσεις γύρω ἀπό τή θέση ἰσορροπίας. Αὐτό μποροῦμε νά τό δοῦμε εὔκολα, ἄν παρατηρήσουμε ὅτι ἡ δυναμική ἐνέργεια εἶναι (βλ. Σχ. 8):

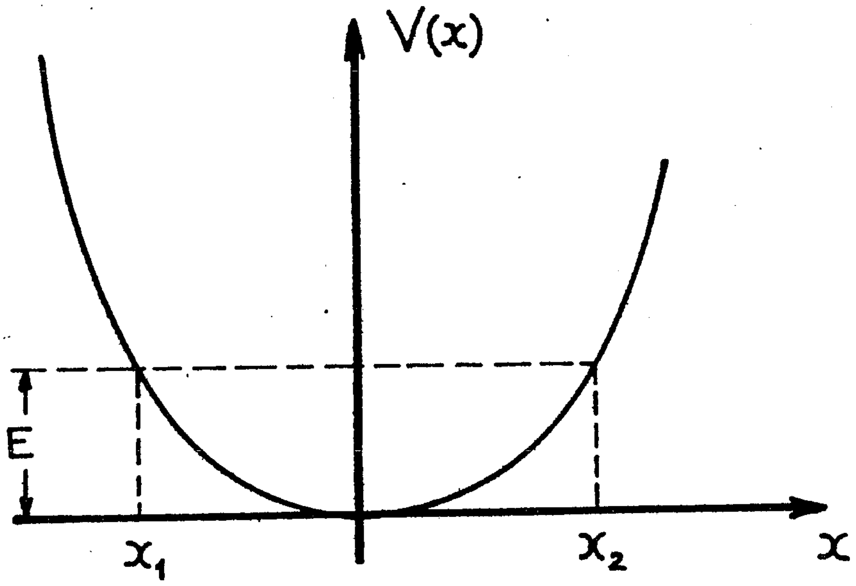
$$V(x) = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{4}\gamma x^4 \tag{1.32}$$

Ἡ ὁλική ἐνέργεια E εἶναι τό ἄθροισμα κινητικῆς καί δυναμικῆς

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + V(x) \tag{1.33}$$

καί διατηρεῖται, δηλ. $dE/dt = 0$. Μποροῦμε τώρα νά παρακολουθήσουμε τήν κίνηση μέ τή βοήθεια τοῦ Σχ. 8. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ παράμετρος γ εἶναι θετική, τότε γιά μιά ὁρισμένη τιμή τῆς E τό ὑλικό μας σημεῖο μπορεῖ νά βρίσκεται μόνο στό διάστημα ἀπό $x = x_1$ καί $x = x_2$. Στά ἄκρα τοῦ διαστήματος αὐτοῦ ἡ κινητική ἐνέργεια εἶναι μηδέν. Εἶναι δέ φανερό ὅτι ἡ κίνηση εἶναι παλινδρομική μεταξύ τῶν σημείων

*Θά μπορούσαμε νά εἴχαμε καί ὅρο ἀνάλογο τοῦ x^2 στό δεύτερο μέλος τῆς (1.31). Στήν περίπτωση αὐτή ἡ δύναμη ἐπαναφορᾶς δέν θά ἦταν συμμετρική ὡς πρός τό σημεῖο ἰσορροπίας $x = 0$ δηλ. δέ θά εἶχε τό ἴδιο μέτρο στά σημεῖα x καί $-x$.



Σχῆμα 8

x_1 καί x_2. Ἀπό τήν (1.33) βρίσκουμε

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{M}(E - V)}$$

Ἡ περίοδος T εἶναι ἴση μέ τό διπλάσιο τοῦ χρόνου πού χρειάζεται γιά τήν ἁπλή μετάβαση ἀπό τό x_1 στό x_2. Ἔχουμε λοιπόν

$$T = 2\int dt = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\dot{x}} = \sqrt{2M}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \tag{1.34}$$

Ἡ παραπάνω σχέση μᾶς δίνει τήν περίοδο T σάν συνάρτηση τῆς E καί ἰσχύει προφανῶς γιά ὁποιοδήποτε δυναμικό καί ὁποιαδήποτε τιμή τῆς E, τέτοια ὥστε νά ὑπάρχουν δύο σημεῖα "ἀναχάμψεως" x_1 καί x_2 ὅπως στό Σχ. 8. Βλέπουμε ἔτσι ὅτι στή γενική περίπτωση ἡ περίοδος ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐνέργεια E(ἤ, ἰσοδύναμα, ἀπό τό πλάτος τῆς ταλάντωσης). Μόνο στήν περίπτωση $V(x) \propto x^2$ δηλ. τοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ "τυχαίνει" τό ὁλοκλήρωμα στή σχέση (1.34) νά εἶναι ἀνεξάρτητο τῆς E. Ἐπομένως μόνο στήν περίπτωση τοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ ἔχουμε μία καί μόνη συχνότητα πού χαρακτηρίζει τό σύστημα καί εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ἐνέργεια ἤ ἀπό τό πλάτος τῆς ταλάντωσης.

Τί γίνεται ὅταν ἐπιβάλλουμε πάνω σέ ἕναν ἀναρμονικό ταλαντωτή μιά ἐξωτερική ἁρμονική διατάραξη (δύναμη) μέ συχνότητα ω; Ἄν στό δεύτερο μέλος τῆς (1.31) προσθέσουμε μιά ἁρμονική δύναμη, ἔχουμε μιά σχέση τῆς μορφῆς

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - s x^3 + f_0 \cos\omega t \qquad (1.35)$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή δέν ἔχει ἁρμονικές λύσεις δηλ. λύσεις τῆς μορφῆς $x(t) = A\cos(\omega t)$. Ἔχει ὅμως λύσεις <u>περιοδικές</u> μέ περίοδο ἴση μέ τήν περίοδο $2\pi/\omega$ τῆς ἐξωτερικῆς δύναμης. Ὅπως θά δοῦμε στό ἑπόμενο ἐδάφιο μιά περιοδική συνάρτηση μέ περίοδο $2\pi/\omega$ μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν ἄθροισμα ἁρμονικῶν ὅρων μέ συχνότητα $\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots$, δηλ. ἀκέραια πολλαπλάσια τῆς ω:

$$A_0 + D_1\cos(\omega t + \varphi_1) + D_2\cos(2\omega t + \varphi_2) + \ldots \qquad (1.36)$$

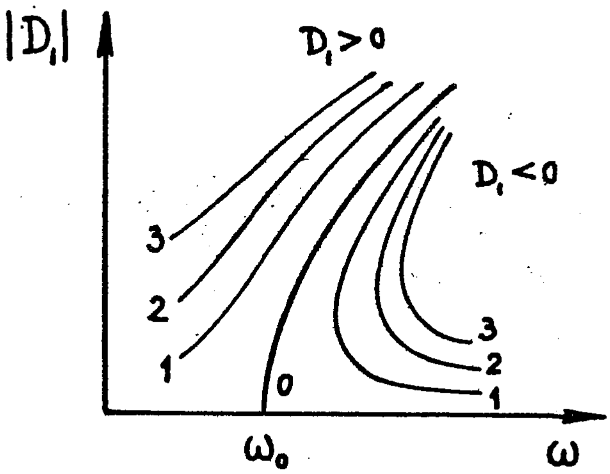
Εἰδικά ἡ (1.35) ἔχει λύση τῆς μορφῆς (1.36) μέ $A_0 = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = 0$ καί συγκεκριμένα

$$x(t) = D_1\cos\omega t + D_3\cos 3\omega t + \ldots \qquad (1.37)$$

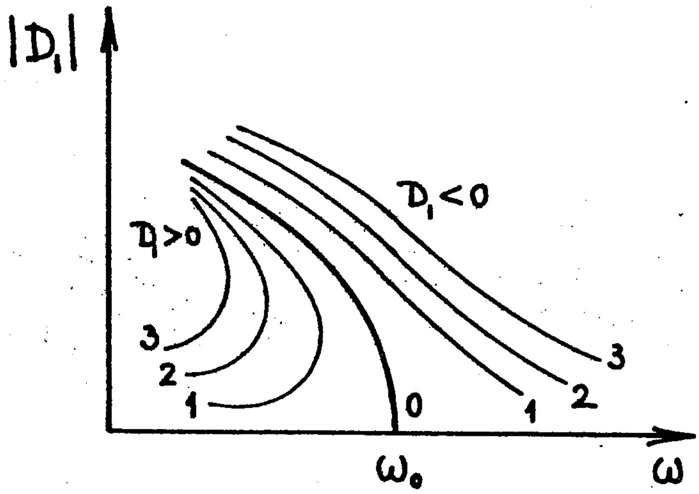
Ἄν ὁ συντελεστής s τοῦ ἀναρμονικοῦ ὅρου στήν (1.35) εἶναι μικρός τότε μπορεῖ νά δειχθεῖ ὅτι τά πλάτη D_n γιά $n>1$ εἶναι καί αὐτά μικρά τάξης μεγέθους s. Μέ αὐτές τίς προϋποθέσεις μποροῦμε νά γράψουμε <u>προσεγγιστικά</u> $x(t) \cong D_1\cos(\omega t)$, ὅπου τό πλάτος D_1 ἐξαρτᾶται ἀπό τή συχνότητα ω. Γενικά, ἀποδεικνύεται ὅτι τό πλάτος τῆς ἐξαναγκασμένης ταλάντωσης ἀκόμα καί ὅταν δέν ὑπάρχουν ἀπώλειες δέν αὐξάνει ἀπεριόριστα γιά καμμιά τιμή τῆς συχνότητας ω τῆς ἐξωτερικῆς διατάραξης, ἀντίθετα μέ ὅτι συμβαίνει μέ τούς ἁρμονικούς ταλαντωτές. Αὐτό ἄλλωστε εἶναι προφανῶς σχετικό μέ τό γεγονός ὅτι, ὅπως εἴδαμε παραπάνω, ἡ συχνότητα τῶν ἐλευθέρων ταλαντώσεων τοῦ ἀναρμονικοῦ ταλαντωτή ἐξαρτᾶται ἀπό τό πλάτος τους.

Τά Σχ. 9a καί 9b δείχνουν τήν ἐξάρτηση τοῦ πλάτους D_1 ἀπό τή συχνότητα τῆς διατάραξης ω γιά s > 0 καί s < 0 ἀντίστοιχα. 'Η καμπύλη 0 ἀντιστοιχεῖ σέ ἐλεύθερες ταλαντώσεις ($f_0=0$), ἐνῶ οἱ καμπύλες 1,2,3 ἀντιστοιχοῦν σέ διάφορες τιμές τῆς f_0.

'Εκτός ἀπό περιοδικές λύσεις μέ περίοδο ἴση μέ τήν περίοδο T τῆς ἁρμονικῆς δύναμης (T= 2π/ω) ἡ ἐξίσωση (1.35) ἔχει καί διάφορες περιοδικές λύσεις μέ περιόδους <u>μεγαλύτερες</u> ἀπό τήν T ὅπως π.χ. 2T,3T κ.λ.π. Τό ἐνδιαφέρον αὐτό φαινόμενο λέγεται "ὑποαρμονική ἀπόκριση" ἤ "ὑποπολλαπλασιασμός συχνότητας". (βλ. J.J. Stoker "Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems" Interscience Publishers, New York 1950).



(a)



(b)

Σχ.9

<u>§1.8 † 'Ανάλυση σέ 'Αρμονικές Συνιστῶσες. Σειρές καί 'Ολοκληρώματα Fourier</u>

Σέ προηγούμενη παράγραφο ἀναφέραμε ὅτι μιά τυχοῦσα συνάρτηση f(t) μπορεῖ νά παρασταθεῖ σάν ὑπέρθεση ἁρμονικῶν ὅρων τῆς μορφῆς Dcos(ωt+φ) μέ διάφορες συχνότητες ω, φάσεις φ καί πλάτη D.

Ἄς δοῦμε τώρα τί ἀκριβῶς σημαίνει ὁ ὅρος "ὑπέρθεση".

---

† Τό ἐδάφιο αὐτό μπορεῖ νά παραλειφθεῖ σέ πρώτη ἀνάγνωση.

Ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις:

α) Παίρνουμε πρῶτα τήν περίπτωση πού ἡ συνάρτηση f(t) εἶναι <u>περιοδική</u> μέ περίοδο T, δηλ. ἔχει τήν ἰδιότητα

$$f(t+T) = f(t) \tag{1.38}$$

Ὑπάρχει ἕνα μαθηματικό θεώρημα πού λέει ὅτι ἄν ἡ περιοδική συνάρτηση f(t) εἶναι ἀρκετά "ὁμαλή" (π.χ. ἄν ἔχει πεπερασμένο ἀριθμό σημείων ἀσυνέχειας στό διάστημα μιᾶς περιόδου) τότε μπορεῖ νά παρασταθεῖ μέ μιά σειρά ὅρων τῆς μορφῆς:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + D_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + D_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n\cos(\omega_n t + \varphi_n) \end{aligned} \tag{1.39}$$

ὅπου

$$\omega_1 = 2\pi/T$$

$$\omega_n = n\omega_1 , \quad n = 1,2,3,\dots \tag{1.40}$$

Ἕνα κύριο χαρακτηριστικό τῆς σειρᾶς (1.39) εἶναι ὅτι ἐμφανίζονται μόνον ὅροι μέ κυκλικές συχνότητες πού εἶναι <u>ἀκέραια πολλαπλάσια</u> τῆς βασικῆς $2\pi/T$. Ἄν θέσουμε

$$D_n\cos\varphi_n = A_n$$

$$-D_n\sin\varphi_n = B_n$$

μποροῦμε νά γράψουμε τή σειρά (1.39) ὑπό τή μορφή

$$\begin{aligned} f(t) = A_0 &+ A_1\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \dots + A_n\cos\left(n\,\frac{2\pi t}{T}\right) + \dots \\ &+ B_1\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \dots + B_n\sin\left(n\,\frac{2\pi t}{T}\right) + \dots \end{aligned} \tag{1.41}$$

Ἡ παραπάνω σειρά ἡμιτόνων καί συνημιτόνων λέγεται σειρά Fourier ἤ ἀνάπτυγμα κατά Fourier τῆς f. Ἄν μᾶς δοθεῖ ἡ f(t), βρίσκουμε τούς ἀντίστοιχους συντελεστές A_n, B_n κάνοντας τά ἀκόλουθα ὁλοκληρώματα*:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos\left(n\,\frac{2\pi t}{T}\right)dt \qquad (1.42)$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin\left(n\,\frac{2\pi t}{T}\right)dt$$

Σημ.: Οἱ παραπάνω σχέσεις προκύπτουν ἀμέσως ἄν ἀντικαταστήσουμε στά δεύτερα μέλη τους τήν f(t) μέ τή σειρά (1.41) καί κάνουμε τίς ὁλοκληρώσεις ὅρο πρός ὅρο, λαβαίνοντας ὑπόψη τά ὁλοκληρώματα

$$\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos\left(n\,\frac{2\pi t}{T}\right)\cos\left(n'\frac{2\pi t}{T}\right)dt = \delta_{nn'}$$

$$\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \sin\left(n\,\frac{2\pi t}{T}\right)\cos\left(n'\frac{2\pi t}{T}\right)dt = 0$$

$$\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \sin\left(n\,\frac{2\pi t}{T}\right)\sin\left(n'\frac{2\pi t}{T}\right)dt = \delta_{nn'}$$

*Ἡ τιμή τοῦ t_0 στά ὅρια ὁλοκλήρωσης εἶναι αὐθαίρετη ἀφοῦ ἡ f(t) εἶναι περιοδική μέ περίοδο T.

πού ἰσχύουν γιά τυχόντες θετικούς ἀκέραιους n καί n'. Τό σύμβολο $\delta_{nn'}$, λέγεται δέλτα τοῦ Kronecker καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς

$$\delta_{nn'} = 1 \quad \text{ὅταν} \quad n = n'$$
$$\text{ὅταν} \quad n \neq n'$$

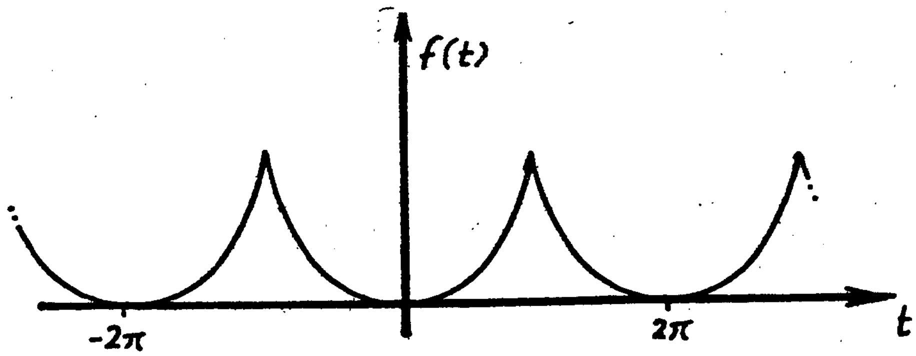
Ἄν ἡ f ἔχει πεπερασμένο ἀριθμό σημείων ἀσυνέχειας στό διάστημα μιᾶς περιόδου, τότε ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ σειρά Fourier (1.41) συγκλίνει στήν f(t) γιά τιμές τοῦ t γιά τίς ὁποῖες ἡ f εἶναι συνεχής, καί στό μέσο ὅρο

$$\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[f(t+\varepsilon)+f(t-\varepsilon)\right]$$

γιά τιμές τοῦ t γιά τίς ὁποῖες ἡ f εἶναι ἀσυνεχής*.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>: Ἡ συνάρτηση f(t) εἶναι ἴση μέ t^2 στό διάστημα $(-\pi,+\pi)$ καί εἶναι περιοδική μέ περίοδο 2π. Παριστάνεται γραφικά στό Σχ. 10. Ἡ σειρά Fourier γιά τή συνάρτηση αὐτή εἶναι

$$f(t) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{n^2}\right)\cos(nt)$$



Σχῆμα 10

---

*Ἡ μελέτη τῶν σειρῶν Fourier ἀποτελεῖ σήμερα ἕνα πολύ σημαντικό τομέα ἐρεύνης τῶν Μαθηματικῶν.

b) Ἡ δεύτερη περίπτωση ἀφορᾶ συναρτήσεις f(t) πού ὁρίζονται μέν γιά $-\infty < t < +\infty$ ἀλλά δέν εἶναι περιοδικές. Ἡ περίπτωση αὐτή μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν ὁριακή περίπτωση τῆς προηγούμενης στό ὅριο $T \to \infty$. Πράγματι στό διάστημα $[-T/2, T/2]$ μποροῦμε νά παραστήσουμε τήν (μή περιοδική) f μέ τή σειρά (1.41), ὅπου οἱ συντελεστές A_n, B_n δίνονται ἀπό τίς (1.42) μέ $t_0 = -T/2$. Φυσικά ἔτσι ἡ σειρά δέν θά παριστάνει τήν f ἔξω ἀπό τό διάστημα $[-T/2, T/2]$, ἀλλά ἄν πάρουμε τό ὅριο $T \to \infty$ θά ἔχουμε μιά ἔκφραση γιά τήν f πού θά ἰσχύει σέ ὅλο τόν πραγματικό ἄξονα.

Γιά νά βροῦμε σέ τί μετατρέπεται ἡ σειρά (1.41) γιά $T \to \infty$, παρατηροῦμε ὅτι γιά $T \to \infty$ ἡ διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικῶν συχνοτήτων $\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = 2\pi/T$ (βλ. (1.40)) τείνει στό μηδέν. Εἶναι φυσικό λοιπόν νά περιμένουμε ὅτι γιά $T = \infty$ ἔχουμε ἕνα συνεχές φάσμα συχνοτήτων ἀπό $\omega = 0$ ἕως ∞ καί ὅτι ἔτσι ἡ σειρά Fourier μετατρέπεται σέ ὁλοκλήρωμα.

Πράγματι ἄν θέσουμε

$$A_n = \frac{\Delta\omega}{\pi} A(\omega_n)$$

ἡ σειρά (1.41) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$f(t) = \frac{\Delta\omega}{\pi} A_0 + \frac{1}{\pi}\sum_n A(\omega_n)\cos(\omega_n t)\Delta\omega$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_n B(\omega_n)\sin(\omega_n t)\Delta\omega \qquad (-T/2 < t < T/2)$$

Γιά $T \to \infty$ δηλ. $\Delta\omega \to 0$ τά παραπάνω ἀθροίσματα τείνουν στά ἀντίστοιχα ὁλοκληρώματα καί ἔχουμε

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega t)d\omega + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(\omega)\sin(\omega t)d\omega \qquad (1.43)$$

$$(-\infty < t < +\infty)$$

Γιά δοθεῖσα f(t) οἱ συναρτήσεις A(ω), B(ω) δίνονται ἀπό τίς ἀκόλουθες σχέσεις

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt \qquad (1.44)$$

Οἱ σχέσεις αὐτές προκύπτουν ἀπό τίς (1.42) ἄν θέσουμε $t_0 = -T/2$, $n(2\pi/T) = \omega$ καί $A_n = (2/T)A(\omega)$ καί πάρουμε τό ὅριο $T \to \infty$.

Εἶναι εὔλογο ὅτι γιά νά συγκλίνουν τά ὁλοκληρώματα (1.44) πρέπει ἡ f(t) νά ὑπακούει σέ ὁρισμένους περιορισμούς ὡς πρός τή συμπεριφορά της γιά $t \to \pm\infty$. Μία ἱκανή συνθήκη γιά τή σύγκλιση τῶν (1.44) εἶναι νά συγκλίνει τό ὁλοκλήρωμα τοῦ $|f(t)|$ δηλ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty \qquad (1.45)$$

Τό συμπέρασμα εἶναι ὅτι μία ὁποιαδήποτε συνάρτηση πού ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη (1.45) μπορεῖ νά παρασταθεῖ σύμφωνα μέ τήν (1.43). Τά ὁλοκληρώματα τῆς (1.43) λέγονται <u>ὁλοκληρώματα</u> Fourier. Γιά μιά δοθεῖσα f οἱ συναρτήσεις - συντελεστές A(ω) καί B(ω) δίνονται ἀπό τίς (1.44).

Σέ ὁρισμένες περιπτώσεις οἱ σειρές καί τά ὁλοκληρώματα Fourier εἶναι πιό βολικό νά γράφονται μέ τή βοήθεια τῶν ἐκθετικῶν $e^{\pm i\omega t}$ ἀντί τῶν $\cos\omega t$ καί $\sin\omega t$ (βλ. §(1.3)).

Ἡ <u>ἐκθετική</u> μορφή τῆς σειρᾶς Fourier εἶναι

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t},$$

ὅπου

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-i\omega_n t} dt \qquad (1.46)$$

$$\omega_n = n \frac{2\pi}{T}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ἀντίστοιχα ἡ ἐκθετική μορφή τῶν (1.43) καί (1.44) εἶναι ἡ ἀκόλουθη

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

ὅπου (1.47)

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Μιά δοσμένη περιοδική συνάρτηση f(t) μπορεῖ νά ἀναπτυχθεῖ εἴτε μέ τή μορφή (1.41) εἴτε μέ τή μορφή (1.46). Εἶναι εὔκολο νά βρεθεῖ ἡ ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν συντελεστῶν A_n, B_n τῆς σειρᾶς (1.41) καί τῶν c_n τῆς σειρᾶς (1.46):

$$c_0 = A_0$$

$$c_{\pm n} = \frac{A_n \mp iB_n}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ἐπίσης, εἶναι εὔκολο νά δειχθεῖ ὅτι μεταξύ τῶν συναρτήσεων A(ω) καί B(ω) τῆς παραστάσεως (1.43) καί τῆς συνάρτησης C(ω) τῆς παραστάσεως (1.47) ὑπάρχει ἡ ἀκόλουθη σχέση

$$C(\pm\omega) = A(\omega) \mp iB(\omega) \qquad \text{γιά} \quad \omega > 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ὁλοκληρώματος Fourier: Ἔχουμε γιά $\Gamma > 0$

$$e^{-\Gamma|t|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma}{\Gamma^2+\omega^2}\, e^{i\omega t} d\omega$$

Ἑπομένως στή συνάρτηση $f(t) = e^{-\Gamma|t|}$ κατά τήν (1.47) ἀντιστοιχεῖ ἡ $C(\omega) = \Gamma/(\Gamma^2 + \omega^2)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.1 Ἐκφρᾶστε τήν κινητική καί τή δυναμική ἐνέργεια τοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ τοῦ Σχ. 1 (χωρίς τριβές) σάν συναρτήσεις τοῦ χρόνου t ὅταν οἱ ἀρχικές συνθῆκες εἶναι $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$. Δεῖξτε ὅτι καί οἱ δύο εἶναι περιοδικές συναρτήσεις τοῦ χρόνου μέ περίοδο τό μισό τῆς περιόδου τοῦ ταλαντωτῆ καί ὑπολογίστε τίς μέσες τιμές τους.

1.2 Τό πλάτος τῆς μόνιμης ἐξαναγκασμένης ταλάντωσης τοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ πού διέπεται ἀπό τήν ἐξίσωση (1.11) δέν γίνεται μέγιστο γιά $\omega = \omega_0$ ἀκριβῶς. Βρεῖτε τήν τιμή τῆς συχνότητας ω γιά τήν ὁποία τό πλάτος αὐτό γίνεται μέγιστο. Δεῖξτε ὅτι ἡ μέση τιμή τῆς κινητικῆς ἐνέργειας γίνεται μέγιστη γιά $\omega = \omega_0$.

1.3 Ἡ περίοδος ἑνός μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς μήκους ℓ πού ταλαντώνεται μέ μέγιστη γωνιακή ἀπόκλιση φ ἀπό τήν κατακόρυφο δίνεται ἀπό μιά σειρά δυνάμεων τοῦ φ:

$$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\ell/g}\,(1 + c_1\varphi^2 + c_2\varphi^4 + \dots)$$

Ὑπολογίστε τό συντελεστή c_1. Ἐκτιμῆστε πόσο μεγάλη πρέπει νά εἶναι ἡ γωνία φ ὥστε ἡ γραμμικοποίηση τῆς ἐξίσωσης τοῦ ἐκκρεμοῦς νά ὁδηγεῖ σέ σφάλμα 1% περίπου κατά τόν ὑπολογισμό τῆς περιόδου.

1.4 Ἀναπτύξτε σέ σειρά Fourier τήν περιοδική συνάρτηση:

$$f(t) = a \qquad 0 < t < \rho T$$

$$f(t) = b \qquad \rho T < t < T$$

όπου ρ άριθμός μεταξύ 0 καί 1, καί T ή περίοδος τῆς f.

1.5 Ἀναλύστε σέ ἁρμονικές συνιστῶσες τήν ἀκόλουθη συνάρτηση τοῦ χρόνου

$$f(t) = 1/a \quad \text{γιά} \quad |t - t_0| < a$$
$$= 0 \quad \text{γιά} \quad |t - t_0| > a$$

Μελετῆστε τό ὅριο $a \to 0$ στό ὁποῖο, ή συνάρτηση τείνει πρός τήν συνάρτηση $\delta(t - t_0)$ τοῦ Dirac. Βρεῖτε τίς ἁρμονικές συνιστῶσες τῆς $\delta(t - t_0)$.

1.6 Τό δυναμικό Lennard-Jones χαρακτηρίζει τά διατομικά μόρια καί εἶναι τῆς μορφῆς

$$u(r) = -\frac{b}{r^6} + \frac{a}{r^{12}}$$

ὅπου $a, b > 0$ καί r ή ἀπόσταση τῶν κέντρων τῶν ἀτόμων.

1. Ὑπολογίστε τή δύναμη μεταξύ τῶν ἀτόμων.
2. Σέ ποιά ἀπόσταση ἠρεμοῦν τά ἄτομα;
3. Ἄν τά ἄτομα ταλαντώνονται μέ μικρές ἀποκλίσεις ἀπό τή θέση ἠρεμίας, ποιά θἆναι ή συχνότητα ταλάντωσης;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΟΛΛΟΥΣ ΒΑΘΜΟΥΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

§2.1 Γενικά

Θά μελετήσουμε τώρα συστήματα μέ περισσότερους τοῦ ἑνός βαθμούς ἐλευθερίας, δηλαδή συστήματα πού χαρακτηρίζονται ἀπό περισσότερα τοῦ ἑνός φυσικά μεγέθη $q_1(t)$, $q_2(t),\ldots,q_n(t)$ ἐξαρτώμενα ἀπό τό χρόνο t. Θά δοῦμε ὅτι πολλά ἀπό τά χαρακτηριστικά τοῦ ἁπλοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ γενικεύονται.

Θά θεωρήσουμε συστήματα πού ὑπακούουν διαφορικές ἐξισώσεις, ἀνάλογες μέ τήν (1.28), οἱ ὁποῖες μᾶς δίνουν τίς δεύτερες παράγωγες $\ddot{q}_1,\ddot{q}_2,\ldots,\ddot{q}_n$ συναρτήσει τῶν $q_1,q_2,\ldots,$ q_n καί τῶν πρώτων παραγώγων τους $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n$. Εἶναι εὔκολο νά γενικεύσουμε τή διερεύνηση τοῦ ἐδαφίου 1.5 καί νά δείξουμε ὅτι προκειμένου γιά <u>μικρές</u> ταλαντώσεις γύρω ἀπό <u>εὐσταθῆ ἰσορροπία</u> μποροῦμε νά <u>γραμμικοποιήσουμε</u> τίς διαφορικές ἐξισώσεις. Ἔχουμε ἔτσι τήν ἀκόλουθη γενική μορφή τῶν γραμμικοποιημένων διαφορικῶν ἐξισώσεων:

$$
\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n + b_{11}\dot{q}_1 + b_{12}\dot{q}_2 + \ldots + b_{1n}\dot{q}_n \\
\ddot{q}_2 &= a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{24}q_n + b_{21}\dot{q}_1 + \ldots \qquad \ldots + b_{2n}\dot{q}_n \\
\ddot{q}_n &= a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \ldots + a_{nn}q_{n1} + b_{n1}\dot{q}_1 + \ldots \qquad \ldots + b_{nn}\dot{q}_n
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

ὅπου οἱ σταθεροί (δηλ. ἀνεξάρτητοι ἀπό τό χρόνο) συντελεστές a καί b ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι τέτοιοι ὥστε πράγματι τό σύστημα (2.1) νά περιγράφει μεταβολές "κοντά σέ μιά κατάσταση ἰσορροπίας". Πιό συγκεκριμένα, ὁποιεσδήποτε καί νά εἶναι οἱ ἀρχικές συνθῆκες (δηλ. οἱ τιμές τῶν q καί $\dot{q}$ γιά κάποιο χρόνο t_0) οἱ λύσεις τῆς (2.1), πρέπει νά προκύπτουν φραγμένες, δηλ. γιά $-\infty < t < \infty$ νά ὑπάρχει ἕνας ἀριθμός B ὥστε

$$|q_1(t)|\ ,\quad |q_2(t)|,\ldots\ |q_n(t)| < B \qquad (2.2)$$

Πιό "χειροπιαστή" συνθήκη ἀπό τή (2.2) γιά τούς συντελεστές a καί b θά βροῦμε παρακάτω.

Ἡ λύση τῆς (2.1) θά μᾶς δώσει ἐλεύθερες ταλαντώσεις τοῦ συστήματος. Θά ἐξετάσουμε ἐπίσης καί τίς ἐξαναγκασμένες ταλαντώσεις ὑπό τήν ἐπίδραση "ἐξωτερικῶν δυνάμεων". Οἱ ἀντίστοιχοι ὅροι $F_1(t)$, $F_2(t)$,... $F_n(t)$ προστίθενται ἀντίστοιχα στά δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (2.1).

Θά μελετήσουμε πρῶτα τήν περίπτωση $n=2$. Ἡ μέθοδος χειρισμοῦ τοῦ προβλήματος καί τά βασικά χαρακτηριστικά τῆς λύσης, ὅπως θά δοῦμε, μποροῦν μετά εὔκολα νά γενικευθοῦν γιά ὁποιοδήποτε n.

§2.2 Δύο Βαθμοί Ἐλευθερίας: Ἐλεύθερες Ταλαντώσεις Χωρίς Ἀπώλειες

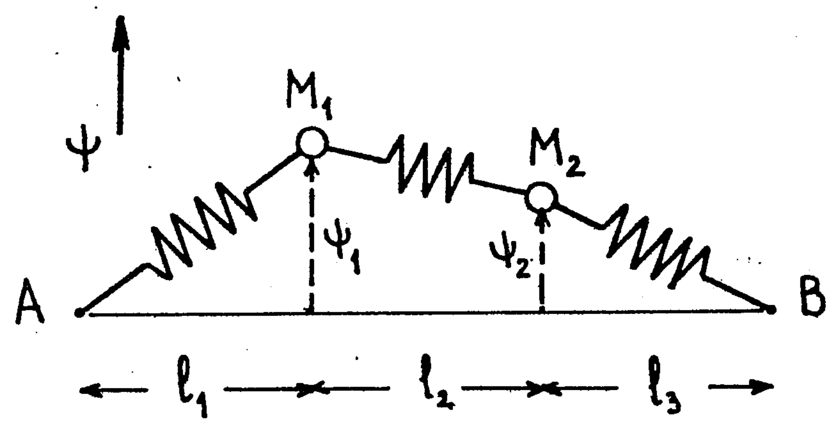
Ἀρχίζουμε μέ τή μελέτη τῶν ἐλευθέρων ταλαντώσεων χωρίς ἀπώλειες ἑνός συστήματος πού περιγράφεται ἀπό δύο μεγέθη $q_1(t)$ καί $q_2(t)$. Τό σύστημα (2.1) γιά $n=2$ καί $b_{11}=b_{12}=b_{21}=b_{22}=0$ γράφεται

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \\ \ddot{q}_2 &= a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Τά μεγέθη q_1, q_2 μπορεῖ π.χ. νά εἶναι οἱ δύο συντεταγμένες ἑνός ὑλικοῦ σημείου σέ ἕνα ἐπίπεδο ἤ οἱ τετμημένες δύο ὑλικῶν σημείων πάνω στόν ἴδιο ἄξονα ἤ πολικές γωνίες ἤ ἐντάσεις ρεύματος σέ δύο κλάδους ἑνός ἠλεκτρικοῦ κυκλώματος κλπ. Ἀλλά, ἄς δοῦμε πρῶτα ἕνα συγκεκριμένο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ μέ $n = 2$: Ἐγκάρσιες ταλαντώσεις. Δύο ὑλικά σημεῖα 1 καί 2 μέ μάζα M_1 καί M_2 προσδένονται μέ τά σταθερά σημεῖα A καί B καί μεταξύ τους μέσω τριῶν ἐλατηρίων μέ σταθερές K_1, K_2 καί K_3 (Σχ. 11). Στή θέση ἰσορροπίας τά A,1,2,B βρίσκονται πάνω στόν ἄξονα z καί τά ἐλατήρια ἔχουν καί τά τρία τήν ἴδια τάση T. Τά ὑλικά σημεῖα 1 καί 2 μποροῦν νά κινοῦνται μόνο κατά μία κατεύθυνση ψ κάθετη στόν ἄξονα z (διακεκομένες στό Σχ. 11). Δηλ. ἔχουμε μόνο "ἐγκάρσιες ταλαντώσεις".

Ἄν ψ_1 καί ψ_2 εἶναι σέ μιά δεδομένη χρονική στιγμή ἡ ἐγκάρσιες μετατοπίσεις τῶν 1 καί 2 ἀπό τή θέση ἰσορροπίας, τότε οἱ ἐπιμηκύνσεις τῶν ἐλατηρίων εἶναι ἀντίστοιχα :



Σχῆμα 11

$$\sqrt{\ell_1^2+\psi_1^2}-\ell_1\ ,\ \sqrt{\ell_2^2+(\psi_1-\psi_2)^2}-\ell_2,\ \sqrt{\ell_3^2+\psi_2^2}-\ell_3$$

Ἡ ψ συνιστῶσα τῆς συνολικῆς δύναμης πού ἐξασκοῦν τά ἐλατήρια πάνω στό 1 εἶναι ἑπομένως:

$$-\left[T+K_1\left(\sqrt{\ell_1^2+\psi_1^2}-\ell_1\right)\right]\frac{\psi_1}{\sqrt{\ell_1^2+\psi_1^2}}-$$

$$-\left[T+K_2\left(\sqrt{\ell_2^2+(\psi_1-\psi_2)^2}-\ell_2\right)\right]\frac{\psi_1-\psi_2}{\sqrt{\ell_2^2+(\psi_1-\psi_2)^2}} \quad (2.4)$$

Ἡ ἔκφραση (2.4) ἁπλοποιεῖται πολύ ἄν τήν γραμμικοποιήσουμε, δηλ. ἄν τήν ἀναπτύξουμε σέ σειρά δυνάμεων τῶν ψ_1 καί ψ_2 καί κρατήσουμε μόνο τούς γραμμικούς ὅρους. Αὐτό γίνεται εὔκολα ἄν πρῶτα παρατηρήσουμε ὅτι τά ἀναπτύγματα τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν δέν ἔχουν γραμμικούς ὅρους, π.χ.

$$\sqrt{\ell_1^2+\psi_1^2}=\ell_1+\frac{1}{2\ell_1}\psi_1^2-\frac{1}{8\ell_1^3}\psi_1^4+\ldots$$

Μποροῦμε λοιπόν νά θέσουμε $\psi_1=\psi_2=0$ κάτω ἀπό ὅλα τά ριζικά δηλ. νά ἀμελήσουμε ὅλες τίς ἐπιμηκύνσεις τῶν ἐλατηρίων , ὁπότε ἡ ἔκφραση (2.4) γίνεται πολύ ἁπλούστερη:

$$-\frac{T}{\ell_1}\psi_1-\frac{T}{\ell_2}(\psi_1-\psi_2)$$

Ἄρα ἡ διαφορική ἐξίσωση κίνησης γιά τή μάζα M_1 εἶναι:

$$M_1\ddot{\psi}_1=-T\left(\frac{1}{\ell_1}+\frac{1}{\ell_2}\right)\psi_1+\frac{T}{\ell_2}\psi_2 \quad (2.5)$$

Μέ παρόμοιο τρόπο προκύπτει καί ἡ διαφορική ἐξίσωση γιά τή μάζα M_2:

$$M_2\ddot{\psi}_2 = \frac{T}{\ell_2}\psi_1 - T\left(\frac{1}{\ell_2}+\frac{1}{\ell_3}\right)\psi_2 \qquad (2.6)$$

Τό σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων (2.5) καί (2.6) εἶναι τῆς μορφῆς (2.3), ὅπου οἱ συντελεστές a εἶναι οἱ ἑξῆς:

$$a_{11} = -\frac{T}{M_1}\left(\frac{1}{\ell_1}+\frac{1}{\ell_2}\right), \qquad a_{12} = \frac{T}{M_1\ell_2}$$

$$a_{21} = \frac{T}{M_2\ell_2}, \qquad a_{22} = -\frac{T}{M_2}\left(\frac{1}{\ell_2}+\frac{1}{\ell_3}\right)$$

Γιά νά βροῦμε τή γενική λύση τοῦ συστήματος (2.3) κυττᾶμε νά βροῦμε πρῶτα λύσεις ὅπου τά ψ_1 καί ψ_2 μεταβάλλονται μέ τό χρόνο <u>ἁρμονικά</u>, δηλ. ὅπως ὁ ἁπλός ἁρμονικός ταλαντωτής, ἀλλά μέ τήν ἴδια <u>συχνότητα</u> καί <u>φάση</u> γιά τό ψ_1 καί ψ_2. Ζητᾶμε δηλαδή νά βροῦμε λύσεις τῆς μορφῆς

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1\cos(\omega t+\varphi) \\ \psi_2 &= A_2\cos(\omega t+\varphi) \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Μιά μεταβολή τῆς μορφῆς (2.7) λέγεται <u>κανονικός τρόπος ταλάντωσης</u> ἤ <u>ἰδιοταλάντωση</u> τοῦ συστήματος. Ἀντικαθιστώντας τίς (2.7) στήν (2.3) ἔχουμε τίς ἀκόλουθες σχέσεις πού πρέπει νά ἱκανοποιοῦνται ἀπό τά πλάτη A_1 καί A_2:

$$\begin{aligned} (a_{11}+\omega^2)A_1 + a_{12}A_2 &= 0 \\ a_{21}A_1 + (a_{22}+\omega^2)A_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Τό σύστημα (2.8) εἶναι ὁμογενές καί γραμμικό γιά τά πλάτη A_1 καί A_2. Γιά νά ἔχει μή μηδενική λύση πρέπει ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν νά μηδενίζεται:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}+\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.9)$$

῾Η (2.9) εἶναι μιά δευτεροβάθμια ἐξίσωση ὡς πρός ω^2. Οἱ δύο ρίζες τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς πρέπει νά εἶναι <u>πραγματικές</u> καί <u>θετικές</u> ἀλλιῶς οἱ (2.7) δέν ἀντιπροσωπεύουν <u>φραγμένες</u> κινήσεις ὑπό τήν ἔννοια τῆς (2.2). Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ἡ συνθήκη (2.2) εἶναι ἰσοδύναμη μέ μιά πιό "χειροπιαστή" συνθήκη γιά τούς συντελεστές a: πρέπει νά εἶναι τέτοιοι ὥστε ἡ ἐξίσωση (2.9) νά ἔχει μόνο <u>πραγματικές καί θετικές λύσεις</u>. Γιά φυσικά συστήματα ἡ συνθήκη αὐτή γιά τούς συντελεστές a εἶναι οὐσιαστικά συνέπεια τῆς βασικῆς προϋπόθεσης ὅτι ἡ θέση $q_1 = q_2 = 0$ εἶναι θέση <u>εὐσταθοῦς ἰσορροπίας</u>*.

Πράγματι, γιατί ἄν μία ρίζα ρ τῆς (2.9) δέν ἦταν πραγματική θετική, ἡ ἀντίστοιχη τιμή τῆς ω δέν θά ἦταν πραγματική, ὁπότε τό $\cos(\omega t + \varphi)$ καί ἑπομένως οἱ μεταβλητές ψ_1, ψ_2 (βλ. 2.7) θά αὔξαιναν ἀπεριόριστα γιά $t \to \infty$. ᾽Αλλά αὐτό δέν εἶναι δυνατόν γιά φυσικά συστήματα ὅπου ὑπάρχει ἕνα διατηρούμενο μέγεθος, ὅπως ἡ ὁλική ἐνέργεια. Στό παραπάνω παράδειγμα (Σχ. 11) ἡ ὁλική ἐνέργεια εἶναι

$$E = \frac{1}{2} M_1 \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{\psi}_2^2 + V(\psi_1, \psi_2)$$

ὅπου ἡ δυναμική ἐνέργεια $V(\psi_1, \psi_2)$ δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$V(\psi_1,\psi_2) = \frac{1}{2} T\left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2}\right)\psi_1^2 + $$

$$+ \frac{T}{\ell_2} \psi_1\psi_2 + \frac{1}{2} T\left(\frac{1}{\ell_2} + \frac{1}{\ell_3}\right)\psi_2^2$$

᾽Αφοῦ στή θέση $\psi_1 = \psi_2 = 0$ ἔχουμε εὐσταθή ἰσορροπία, ἔπεται ὅτι σέ κάθε ἄλλη θέση (ψ_1, ψ_2) ἔχουμε μεγαλύτερη δυναμική ἐνέργεια. Αὐτό ἐπαληθεύεται εὔκολα ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ $V(\psi_1, \psi_2)$ εἶναι ἕνα ὁμογενές τετραγωνικό

*῾Η ἀνάλογη συνθήκη γιά <u>ἕνα</u> βαθμό ἐλευθερίας εἶναι ἡ ἀνισότητα $a_1 < 0$ στή σχέση (1.29).

τριώνυμο ώς πρός ψ_1,ψ_2 μέ διακρίνουσα άρνητική:

$$\left(\frac{T}{\ell^2}\right)^2 - T^2\left(\frac{1}{\ell_1}+\frac{1}{\ell_2}\right)\left(\frac{1}{\ell_2}+\frac{1}{\ell_3}\right) < 0$$

(Αύτό έπίσης σημαίνει ότι οί καμπύλες $V(\psi_1,\psi_2)$ = σταθ. είναι έλλείψεις). Είναι έπομένως φανερό ότι, άφοῦ ή όλική ένέργεια E διατηρεῖται, δέν είναι δυνατόν οί μεταβλητές ψ_1,ψ_2 νά πάρουν αύθαίρετα μεγάλες τιμές.

Έστω λοιπόν ρ_1 καί ρ_2 οί δύο τιμές τοῦ ω^2 πού ίκανοποιοῦν τήν (2.9). Οί συχνότητες $\omega_1 = \sqrt{\rho_1}$, $\omega_2 = \sqrt{\rho_2}$ είναι οί ίδιοσυχνότητες ή χαρακτηριστικές συχνότητες τοῦ φυσικοῦ συστήματος. Γιά κάθε μιά άπό αύτές τό σύστημα έξισώσεων (2.8) καθορίζει ένα λόγο πλατῶν $A_1:A_2$. Έχουμε έτσι δύο δυνατές κανονικές ταλαντώσεις τοῦ συστήματος: μία μέ ίδιοσυχνότητα ω_1:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ q_2 &= A_2^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{aligned} \qquad (2.10)$$

καί μία μέ ίδιοσυχνότητα ω_2:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ q_2 &= A_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Οί λόγοι πλατῶν $A_1^{(1)}/A_2^{(1)}$ καί $A_1^{(2)}/A_2^{(2)}$ καθορίζονται άπό τίς έξισώσεις (2.8) γιά $\omega = \omega_1$ καί $\omega = \omega_2$ άντίστοιχα:

$$A_1^{(j)}/A_2^{(j)} = -\frac{a_{12}}{a_{11} + \omega_j^2}, \quad j = 1,2 \qquad (2.12)$$

Ή γενική λύση τῆς (2.3) είναι μία ύπέρθεση κανονικῶν ταλαντώσεων:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= A_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ q_2(t) &= A_2^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \qquad (2.13)$$

όπου εμφανίζονται οί 8 παράμετροι $\omega_1, \varphi_1, A_1^{(1)}, A_2^{(1)}$, καί ω_2, $\varphi_2, A_1^{(2)}, A_2^{(2)}$. Από αυτές οί ω_1, ω_2 καί οί λόγοι $A_1^{(1)}/A_2^{(1)}$, $A_1^{(2)}/A_2^{(2)}$ καθορίζονται άπό τίς εξισώσεις (2.8) [δηλ. τίς (2.9) καί (2.12)]. Έτσι μένουν 4 αυθαίρετες παράμετροι πού σέ κάθε συγκεκριμένη περίπτωση προσδιορίζονται άπό πρόσθετα δεδομένα. Συνήθως τά πρόσθετα αυτά δεδομένα είναι οί λεγόμενες <u>αρχικές συνθήκες</u> δηλ. οί τιμές τών $q_1, \dot{q}_1, q_2 \dot{q}_2$ σέ μιά χρονική στιγμή $t = t_0$.

Ἄς επιστρέψουμε στό παράδειγμα τοῦ σχήματος 11 ὅπου γιά νά άπλοποιήσουμε τά πράγματα ὑποθέτουμε ἴσες μάζες καί ἴσα μήκη, δηλαδή:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 = M \\ \ell_1 &= \ell_2 = \ell_3 = \ell \end{aligned} \tag{2.14}$$

Τότε ή εξίσωση (2.9) μᾶς δίνει τίς ἰδιοσυχνότητες

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{T/M\ell} \\ \omega_2 &= \sqrt{3T/M\ell} \end{aligned} \tag{2.15}$$

μέ άντίστοιχους λόγους πλατῶν (άπό τήν (2.12)) $A_1/A_2 = 1$ καί -1 άντίστοιχα. Ἡ γενική λύση εἶναι ή (βλ. (2.13))

$$\begin{aligned} \psi_1 &= C_1\cos(\sqrt{\frac{T}{M\ell}}\, t + \varphi_1) + C_2\cos(\sqrt{\frac{3T}{M\ell}}\, t + \varphi_2) \\ \psi_2 &= C_1\cos(\sqrt{\frac{T}{M\ell}}\, t + \varphi_1) - C_2\cos(\sqrt{\frac{3T}{M\ell}}\, t + \varphi_2) \end{aligned} \tag{2.16}$$

πού περιέχει τίς 4 αυθαίρετες σταθερές $C_1, \varphi_1, C_2, \varphi_2$.

§2.3 Κανονικές μεταβλητές

'Από τή μορφή τῆς γενικῆς λύσης (2.13) εὔκολα συνάγεται ὅτι, ἄν ἀντί γιά τίς ποσότητες q_1, q_2 χρησιμοποιήσουμε γιά τήν περιγραφή τοῦ συστήματός μας τίς μεταβλητές $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ πού ὁρίζονται ἀπό τίς σχέσεις

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1^{(1)}\tilde{q}_1 + A_1^{(2)}\tilde{q}_2 \\ q_2 &= A_2^{(1)}\tilde{q}_1 + A_2^{(2)}\tilde{q}_2 \end{aligned} \qquad (2.17)$$

(ὅπου οἱ σταθερές $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}$ καί $A_1^{(2)}, A_2^{(2)}$ ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις (2.12), γιά $\omega = \omega_1$ καί $\omega = \omega_2$ ἀντίστοιχα), τότε ἡ γενική λύση παίρνει τήν ἀκόλουθη ἁπλή μορφή:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= C_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \tilde{q}_2 &= C_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \qquad (2.18)$$

'Υπό τή μορφή (2.18) τό σύστημά μας ἐμφανίζεται ἰσοδύναμο μέ δύο ἀνεξάρτητους ἁπλούς ἁρμονικούς ταλαντωτές. Πράγματι, ἄν κάνουμε ἐξ ἀρχῆς τήν ἀλλαγή μεταβλητῶν (2.17) στίς ἐξισώσεις (2.3) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_1 &= -\omega_1^2\tilde{q}_1 \\ \ddot{\tilde{q}}_2 &= -\omega_2^2\tilde{q}_2 \end{aligned} \qquad (2.19)$$

Μεταβλητές ὅπως οἱ $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ ὡς πρός τίς ὁποῖες ἔχουμε ἀποσύζευξη τῶν ἐξισώσεων (δηλ. τή μορφή (2.19)) λέγονται κανονικές μεταβλητές τοῦ συστήματος. Γιά κάθε κανονικό τρόπο ταλάντωσης ἔχουμε καί μιά ἀντίστοιχη κανονική μεταβλητή.

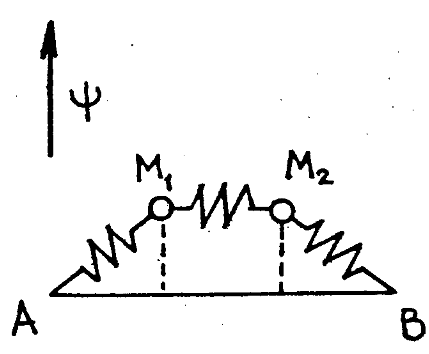
Πρέπει νά σημειωθεῖ τό ἑξῆς: ἄν τό $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ εἶναι ζεῦγος κανονικῶν μεταβλητῶν γιά ἕνα δεδομένο φυσικό σύστημα τότε, καί τό ζεῦγος $(\lambda_1\tilde{q}_1, \lambda_2\tilde{q}_2)$, ὅπου λ_1, λ_2 αὐθαίρετοι μή μηδενικοί πραγματικοί ἀριθμοί, εἶναι ἐπίσης κανονικές μεταβλητές. Αὐτό εἶναι φανερό ἀπό τή μορφή τῶν (2.19). Ὑπό τήν ἔννοια αὐτή οἱ κανονικές μεταβλητές δέν εἶναι ἀπόλυτα καθορισμένες.

Στό παράδειγμα τοῦ Σχ. 11 γιά ἴσες μάζες καί ἴσα μήκη (βλ. (2.14)) κανονικές μεταβλητές εἶναι οἱ ἑξῆς:

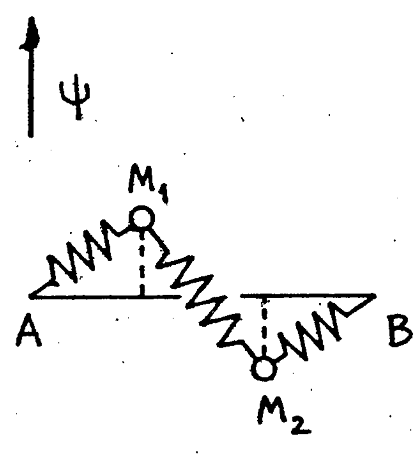
$\tilde{\psi}_1 = \psi_1 + \psi_2$ γιά τήν ἰδιοσυχνότητα $\omega_1 = \sqrt{T/M\ell}$

$\tilde{\psi}_2 = \psi_1 - \psi_2$ " " " $\omega_2 = \sqrt{3T/M\ell}$

- Οἱ ἀντίστοιχοι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης ἀπεικονίζονται στά σχήματα 12 καί 13. Τό Σχ. 12 παριστάνει τό σύστημα στόν κανονικό τρόπο ταλάντωσης μέ ἰδιοσυχνότητα $\sqrt{T/M\ell}$ ὁπότε ἔχουμε $\tilde{\psi}_2 \equiv 0$ (δηλ. $\psi_1 \equiv \psi_2$). Οἱ



Σχῆμα 12



Σχῆμα 13

δύο μάζες ἀνεβοκατεβαίνουν μαζί ἔτσι ὥστε τό μεσαῖο ἐλατήριο νά μένει πάντοτε ὁριζόντιο. Ἡ ταλάντωση μέ ἰδιοσυχνότητα $\sqrt{3T/M\ell}$ πού ἀπεικονίζεται στό Σχ. 13, χαρακτηρίζεται ἀπό τή σχέση $\tilde{\psi}_1 \equiv 0$ (δηλ. $\psi_1 \equiv -\psi_2$). Οἱ δύο μάζες βρίσκονται πάντοτε σέ θέσεις συμμετρικές ὡς πρός τό μέσο τοῦ εὐθ. τμήματος AB.

Παρατηροῦμε ὅτι γενικά μιά κανονική μεταβλητή εἶναι συλλογική μεταβλητή ὑπό τήν ἔννοια ὅτι ἡ τιμή της ἐξαρτᾶται ἀπό τήν κατάσταση ὅλων τῶν στοιχείων (μερῶν) τοῦ φυσικοῦ συστήματος. Ἀντίθετα, οἱ μεταβλητές πού συνήθως διαλέγουμε γιά νά περιγράψουμε ἕνα φυσικό σύστημα εἶναι τοπολογικά ἐντοπισμένες σέ συγκεκριμένα μέρη τοῦ συστήματος. Τέτοιες μεταβλητές εἶναι π.χ. οἱ συντεταγμένες ἑνός σημείου, ἡ ἔνταση ρεύματος σέ ἕνα κλάδο ἠλεκτρικοῦ κυκλώματος κ.ἄ. Στό παράδειγμά μας οἱ ψ_1 καί ψ_2 εἶναι μετατοπίσεις ὑλικῶν σημείων, δηλ. ἐντοπισμένες στά σημεῖα 1 καί 2 ἀντίστοιχα, ἐνῶ ἡ $\tilde{\psi}_1 = \psi_1 + \psi_2$ εἶναι συλλογική, δηλ. δέν χαρακτηρίζει ἕνα μόνο σημεῖο.

§2.4 Δύο Βαθμοί Ἐλευθερίας: Ἀπώλειες καί Ἐξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

Ἡ γενική μορφή τῶν δυναμικῶν ἐξισώσεων ἑνός συστήματος μέ ἁρμονικές ἐξωτερικές διαταράξεις τῆς ἴδιας συχνότητας ω εἶναι:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + b_{11}\dot{q}_1 + b_{12}\dot{q}_2 + f_1\cos\omega t \\ \ddot{q}_2 &= a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + b_{21}\dot{q}_1 + b_{22}\dot{q}_2 + f_2\cos\omega t \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Οἱ σχέσεις αὐτές ἁπλοποιοῦνται ἄν χρησιμοποιήσουμε πάλι τίς κανονικές μεταβλητές $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ ὅπως δίνονται ἀπό τίς σχέσεις (2.17). Οἱ ἐξισώσεις πού προκύπτουν ἄν ἀντικαταστήσουμε τίς q_1, q_2 σύμφωνα μέ τίς (2.17) στίς (2.20) εἶναι:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_1 &= -\omega_1^2\tilde{q}_1 - \Gamma_{11}\dot{\tilde{q}}_1 - \Gamma_{12}\dot{\tilde{q}}_2 + \tilde{f}_1\cos\omega t \\ \ddot{\tilde{q}}_2 &= -\omega_2^2\tilde{q}_2 - \Gamma_{21}\dot{\tilde{q}}_1 - \Gamma_{22}\dot{\tilde{q}}_2 + \tilde{f}_2\cos\omega t \end{aligned} \qquad (2.21)$$

ὅπου οἱ νέοι συντελεστές $\Gamma_{11},\ldots,\tilde{f}_1,\tilde{f}_2$ ὑπολογίζονται εὔκολα ἀπό τούς παλιούς $a_{11},\ldots,$ $b_{11},\ldots,$ f_1,f_2. Οἱ παραπάνω ἐξισώσεις μποροῦν νά λυθοῦν εὔκολα, ἄν μάλιστα χρησιμοποιήσουμε μιγαδικές μεταβλητές ὅπως στά §1.3 καί 1.4.

῞Ας ἀναζητήσουμε πρῶτα τίς <u>ἐλεύθερες ταλαντώσεις</u>, δηλαδή λύσεις τοῦ συστήματος (2.21) μέ $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 = 0$. ῞Αν στίς ἐξισώσεις (2.21) θέσουμε

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &\to C_1' e^{i\Omega t} \\ \tilde{q}_2 &\to C_2' e^{i\Omega t} \end{aligned} \qquad (2.22)$$

ὅπου C_1', C_2' καί Ω μιγαδικές παράμετροι βρίσκουμε ὅτι πρέπει νά ἐπαληθεύεται ἡ σχέση

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \Omega^2 + i\Omega\Gamma_{11} & i\Omega\Gamma_{12} \\ i\Omega\Gamma_{21} & \omega_2^2 - \Omega^2 + i\Omega\Gamma_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.23)$$

῾Η 4βάθμια αὐτή ἐξίσωση ὡς πρός Ω θά μᾶς δώσει 4 δυνατές τιμές γιά τήν παράμετρο Ω. Γιά λόγους ἀλγεβρικῆς ἁπλότητας θά περιοριστοῦμε ἐδῶ στήν ἐνδιαφέρουσα περίπτωση, ὅπου οἱ ἀπώλειες τοῦ συστήματος εἶναι μικρές. Συγκεκριμένα, θά ὑποθέσουμε ὅτι οἱ παράμετροι "τριβῆς" $\Gamma_{11},\Gamma_{12},\Gamma_{21},\Gamma_{22}$ εἶναι (i) τῆς ἴδιας τάξης μεγέθους μεταξύ τους καί (ii) πολύ μικρές μέ τήν έννοια:

$$\Gamma_{11},\Gamma_{12},\Gamma_{21},\Gamma_{22} << \omega_1,\omega_2,|\omega_1-\omega_2| \qquad (2.24)$$

Αὐτό σημαίνει ὅτι στήν (2.23) μποροῦμε σέ πρώτη προσέγγιση νά ἀμελήσουμε τόν ὅρο $\Omega^2\Gamma_{12}\Gamma_{12}$. Τότε ἡ (2.23) γίνεται:

$$(\Omega^2 - i\Gamma_{11}\Omega - \omega_1^2)(\Omega^2 - i\Gamma_{22}\Omega - \omega_2^2) \cong 0$$

ὥστε οἱ τέσσερες ρίζες τῆς (2.23) προσεγγιστικά θά εἶναι οἱ ἑξῆς:

$$\begin{aligned} &\pm\bar{\omega}_1 + i\Gamma_{11}/2 + \ldots \\ &\pm\omega_2 + i\Gamma_{22}/2 + \ldots \end{aligned} \qquad (2.25)$$

Τά ἀποσιωπητικά στίς ἐκφράσεις (2.25) ὑποδηλώνουν ὅρους πού παραλείφθηκαν γιατί ἦταν τετραγωνικοί, κυβικοί κλπ. ὡς πρός τούς συντελεστές Γ.

Οἱ ἐλεύθερες ταλαντώσεις τοῦ συστήματος προσδιορίζονται ἀπό τό πραγματικό μέρος τῆς μορφῆς (2.22):

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= \mathrm{Re}\left[C_1' e^{i(\omega_1+i\Gamma_{11}/2)t}\right] = C_1 e^{-\Gamma_{11}t/2}\cos(\omega_1 t+\varphi_1) \\ \tilde{q}_2 &= \mathrm{Re}\left[C_2' e^{i(\omega_2+i\Gamma_{11}/2)t}\right] = C_2 e^{-\Gamma_{22}t/2}\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \end{aligned} \qquad (2.26)$$

ὅπου οἱ νέες (πραγματικές) σταθερές $C_1, C_2, \varphi_1, \varphi_2$ θά καθοριστοῦν ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες.

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ παραπάνω λύσεις εἶναι ἐκεῖνες πού θά βρίσκαμε ἄν <u>ἐξ ἀρχῆς</u> θέταμε $\Gamma_{12}=\Gamma_{21}=0$ στίς (2.21), δηλαδή ἔχουμε πάλι <u>ἀποσύζευξη</u> τῶν κανονικῶν μεταβλητῶν.

Ὥστε: στήν περίπτωση μικρῶν ἀπωλειῶν* τό σύστημα εἶναι ἰσοδύναμο μέ δύο ἀνεξάρτητους ἁπλούς ἁρμονικούς ταλαντωτές μέ συχνότητες ω_1 καί ω_2 καί χρόνους ἀπόσβεσης $1/\Gamma_{11}$ καί $1/\Gamma_{22}$ ἀντίστοιχα.

Προχωρᾶμε τώρα στή διερεύνηση τῆς γενικῆς περιπτώσεως τοῦ συστήματος (2.21) ὅπου ὑπάρχουν καί ἐξωτερικές δυνάμεις ἁρμονικές μέ συχνότητα ω. Ὅπως καί στήν περίπτωση τοῦ ἁπλοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ, ἡ γενική λύση θά εἶναι ἡ μεταβατική ταλάντωση (2.26) (μεταβατική γιατί φθίνει ἐκθετικά μέ τήν πάροδο τοῦ χρόνου ἔτσι ὥστε γιά $t \gg \Gamma_{11}^{-1}, \Gamma_{22}^{-1}$ νά μπορεῖ νά παραλειφθεῖ) σύν μιά ὁποιαδήποτε ἁρμονική λύση τῆς (2.21) μέ συχνότητα ω (βλ. §1.6). Καί στήν περίπτωση αὐτή δείχνεται εὔκολα ὅτι ὅταν ἔχουμε μικρές ἀπώλεεες μποροῦμε νά θέσουμε $\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = 0$. Καταλήγουμε λοιπόν στό ἁπλό γενικό συμπέρασμα: Στήν περίπτωση μικρῶν ἀπωλειῶν οἱ κανονικές μεταβλητές ἀκολουθοῦν ἀνεξάρτητες ταλαντώσεις.

§2.5[†] n Βαθμοί Ἐλευθερίας

Ἡ διερεύνηση πού κάναμε γιά $n = 2$ γενικεύεται εὔκολα γιά συστήματα μέ ὁποιοδήποτε ἀριθμό n βαθμῶν ἐλευθερίας ὅταν ἔχουν μικρές μόνο ἀπώλειες. Ἔστω ὅτι οἱ ταλαντώσεις ἑνός τέτοιου συστήματος διέπονται ἀπό τίς σχέσεις

$$\ddot{q}_1 = a_{11}q_1 + \ldots + a_{1n}q_n + b_{11}\dot{q}_1 + \ldots + b_{1n}\dot{q}_n + f_1\cos(\omega t)$$

$$\ddot{q}_2 = a_{21}q_1 + \ldots\ldots\ldots + b_{21}\dot{q}_1 + \ldots + b_{2n}\dot{q}_n + f_2\cos(\omega t)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\ddot{q}_n = a_{n1}q_1 + \ldots\ldots\ldots + b_{n1}\dot{q}_1 + \ldots + b_{nn}\dot{q}_n + f_n\cos(\omega t)$$

---

*Ἡ ἔκφραση "μικρές ἀπώλειες" ἀπό δῶ καί πέρα θά σημαίνει ὅτι μποροῦμε νά ἀμελήσουμε ὅρους τετραγωνικούς ὡς πρός τούς συντελεστές Γ, σύμφωνα μέ τά προηγούμενα.

†Τό ἐδάφιο αὐτό μπορεῖ νά παραλειφθεῖ σέ πρώτη ἀνάγνωση.

ἤ συνοπτικά

$$\ddot{q}_k = \sum_{\ell} a_{k\ell} q_\ell + \sum_{\ell} b_{k\ell}\dot{q}_\ell + f_k \cos(\omega t) \qquad (2.27)$$

Θεωροῦμε πρῶτα τίς ἐλεύθερες ταλαντώσεις χωρίς ἀπώλειες δηλ. θέτουμε τίς παραμέτρους b καί f ἴσες μέ τό μηδέν ὁπότε ἔχουμε τό σύστημα

$$\ddot{q}_k = \sum_{\ell} a_{k\ell} q_\ell \qquad (2.28)$$

Κατ'ἀναλογία μέ τήν (2.7) θεωροῦμε μιά κανονική ταλάντωση τῆς μορφῆς

$$q_k = A_k \cos(\omega t + \varphi), \qquad k = 1,2,\ldots,n \qquad (2.29)$$

Ἄν ἀντικαταστήσουμε τήν (2.29) στίς σχέσεις (2.28) θά πάρουμε ἕνα ὁμογενές σύστημα ἐξισώσεων γιά τά A_k:

$$\sum_{\ell} (a_{k\ell} + \omega^2 \delta_{k\ell}) A_\ell = 0 \qquad (2.30)$$

Ἡ n ρίζες ὡς πρός ω^2 τῆς ἐξισώσεως

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \omega^2 & a_{12}, \ldots\ldots, a_{1n} & \\ a_{21} & a_{22} + \omega^2 \ \ldots\ldots & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{n1} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & a_{nn} + \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.31)$$

μᾶς δίνουν τίς ἰδιοσυχνότητες $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ τοῦ φυσικοῦ συστήματος. Γιά κάθε μιά ἀπό τίς τιμές αὐτές τῆς ω ὑπάρχουν ἀντίστοιχες n-άδες ἀριθμῶν $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ πού ἐπαληθεύουν τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2.30). Βέβαια, ἐπειδή τό σύστημα (2.30) εἶναι ὁμογενές προσδιορίζει μόνο τούς λόγους $A_1 : A_2 : A_3 \ldots : A_n$. Μπορoῦμε ὅμως νά διαλέξουμε μιά n-άδα ἀριθμῶν μέ τούς κατάλληλους λόγους γιά κάθε ω_j χωρίς νά χάσουμε γενικότητα:

$$\omega_j \longrightarrow (A_1^{(j)}, A_2^{(j)}, \ldots, A_n^{(j)}) \qquad (2.32)$$

Εἰσάγουμε τώρα τίς κανονικές μεταβλητές $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n$ σύμφωνα μέ τίς σχέσεις

$$q_k = \sum_j A_k^{(j)} \tilde{q}_j \tag{2.33}$$

Ἄν ἀντικαταστήσουμε τίς (2.33) στίς (2.28) βρίσκουμε ὅτι οἱ κανονικές μεταβλητές ἱκανοποιοῦν τίς ἁπλούστερες ἐξισώσεις:

$$\ddot{\tilde{q}}_k = -\omega_k^2 \tilde{q}_k \,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.34}$$

Μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι κανονικές μεταβλητές εἶναι μεταβλητές ὡς πρός τίς ὁποῖες τό σύστημα ἐξισώσεων (2.25) "διαγωνοποιεῖται" δηλ. τό μητρῶο τῶν συντελεστῶν τοῦ 2ου μέλους τῆς (2.28) γίνεται διαγώνιο.

Ἔτσι τό σύστημα ἀποδεικνύεται ἰσοδύναμο μέ ἕνα σύνολο ἀπό n ἀνεξάρτητους ἁπλούς ἁρμονικούς ταλαντωτές.

Οἱ ἐξισώσεις (2.34) ἔχουν τίς γενικές λύσεις:

$$\tilde{q}_k = C_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.35}$$

Ἄν ἀντικαταστήσουμε τίς (2.35) στίς (2.33) βρίσκουμε τή γενική μορφή ἐλεύθερων ταλαντώσεων πού περιέχει τίς 2n σταθερές: $C_1, C_2, \ldots, C_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$. Οἱ σταθερές αὐτές προσδιορίζονται σέ κάθε συγκεκριμένη περίπτωση ὅταν δοθοῦν οἱ ἀρχικές συνθῆκες, δηλ. οἱ τιμές τῶν $q_k, \dot{q}_k$ σέ κάποια χρονική στιγμή.

Θεωροῦμε τώρα τήν περίπτωση ἐξαναγκασμένων ταλαντώσεων μέ ἀπώλειες δηλ. τό πλῆρες σύστημα (2.27). Ἄν εἰσάγουμε πάλι τίς κανονικές μεταβλητές $\tilde{q}_k$, ὅπως ὁρίζονται ἀπό τίς σχέσεις (2.33), προκύπτει τό ἀκόλουθο (ἰσοδύναμο) σύστημα:

$$\ddot{\tilde{q}}_k = -\omega_k^2 \tilde{q}_k - \sum_\ell \Gamma_{k\ell} \dot{\tilde{q}}_\ell + \tilde{f}_k \cos(\omega t) \tag{2.36}$$

Όπως καί στήν περίπτωση 2 βαθμῶν ἐλευθερίας, μποροῦμε νά ἀμελήσουμε σέ πρώτη προσέγγιση τά μή διαγώνια στοιχεῖα τοῦ μητρώου τῶν συντελεστῶν Γ ὑπό τίς ἑξῆς προϋποθέσεις:

(i) Οἱ συντελεστές $\Gamma_{k\ell}$ εἶναι ὅλοι τῆς ἴδιας τάξης μεγέθους.

(ii) Οἱ συντελεστές $\Gamma_{k\ell}$ εἶναι πολύ μικρότεροι ἀπό τίς ἰδιοσυχνότητες $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ καί τίς διαφορές $|\omega_m - \omega_{m'}|$.

Οἱ συνθῆκες αὐτές οὐσιαστικά σημαίνουν ὅτι μποροῦμε νά ἀναπτύξουμε διάφορες ποσότητες σέ σειρά δυνάμεων ὡς πρός τούς $\Gamma_{k\ell}$ καί νά κρατήσουμε τούς πρώτους ὅρους. Ἄν πράγματι κάνουμε τό ἀνάπτυγμα αὐτό βλέπουμε ὅτι οἱ μή διαγώνιοι συντελεστές Γ ὑπεισέρχονται μόνο σέ ὅρους ἀνώτερης τάξεως πού μποροῦν νά παραμεληθοῦν σέ πρώτη προσέγγιση. Ἔτσι, τό σύστημα (2.36) παίρνει τή <u>διαγώνια</u> μορφή:

$$\ddot{\tilde{q}}_k = -\omega_k^2 \tilde{q}_k - \Gamma_{kk} \dot{\tilde{q}}_k + \tilde{f}_k \cos(\omega t) \qquad k = 1, 2, \ldots, n \quad (2.37)$$

Καταλήγουμε λοιπόν στό συμπέρασμα ὅτι τό σύστημα εἶναι ἰσοδύναμο μέ n ἀνεξάρτητους <u>ἁρμονικούς ταλαντωτές</u> μέ ἰδιοσυχνότητες $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ καί χρόνους ἀπόσβεσης $\Gamma_{11}^{-1}, \Gamma_{22}^{-1}, \ldots, \Gamma_{nn}^{-1}$ ἀντίστοιχα. Σημειωτέον ὅτι οἱ ἰδιοσυχνότητες προκύπτουν ἀπό λύση τῆς (2.28) δηλ. καθορίζονται ἀπό τούς συντελεστές $a_{k\ell}$ μόνο. Ἀντίθετα, οἱ συντελεστές Γ_{kk} καί $\tilde{f}_k$ ἐξαρτῶνται ὄχι μόνο ἀπό τούς ἀρχικούς συντελεστές $b_{k\ell}$ καί f_k ἀλλά καί ἀπό τούς $A_k^{(j)}$ δηλ. ἐξαρτῶνται καί ἀπό τούς $a_{k\ell}$.

Ἡ γενική λύση τῆς (2.27) προκύπτει ἄν ἀντικαταστήσουμε στήν (2.33), γιά κάθε κανονική μεταβλητή $\tilde{q}_k$, τήν ἀντίστοιχη γενική λύση τῆς ἐξίσωσης (2.37) σύμφωνα μέ τήν §1.3.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι καί ἡ ἀκόλουθη ἰδιότητα τοῦ ἁπλοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ ἰσχύει γιά <u>ὅλα</u> τά ταλαντούμενα συστήματα ὑπό τίς παραπάνω προϋποθέσεις:

'Η γενική λύση εἶναι τό ἄθροισμα τῆς μόνιμης λύσης πού ἔχει συχνότητα ἴση μέ τή συχνότητα τῆς ἐξωτερικῆς δύναμης σύν μιά γενική γραμμική ὑπέρθεση ἐλευθέρων ταλαντώσεων*. Μετά πάροδο χρόνου ἀρκετά μεγαλύτερη ἀπό ὅλους τούς χρόνους ἀποσβέσεως Γ_{11}^{-1}, Γ_{22}^{-1},..., τῶν ἐλευθέρων ταλαντώσεων, παραμένει μόνο ἡ μόνιμη λύση.

§2.6 Προεκτάσεις στήν Κβαντική Φυσική

Τό ἀποτέλεσμα τῆς ὅλης διερεύνησης τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ μπορεῖ νά συνοψιστεῖ ἁπλᾶ ὡς ἑξῆς: Ἕνα ταλαντούμενο σύστημα μέ n βαθμούς ἐλευθερίας πού ὑπακούει σέ γραμμικές διαφορικές ἐξισώσεις, ἰσοδυναμεῖ μέ n ἀνεξάρτητους ἁρμονικούς ταλαντωτές. Κάθε ἕνας ἀπό τούς ταλαντωτές αὐτούς χαρακτηρίζεται ἀπό μιά ἀντίστοιχη κανονική μεταβλητή.

'Η παραπάνω θεμελιώδης ἰδιότητα ἰσχύει γιά ὁποιοδήποτε n, ἀκόμα καί ἄπειρο. Ὅπως θά δοῦμε π.χ. στό ἑπόμενο κεφάλαιο μιά τεταμένη εὔκαμπτη χορδή ἔχει ἄπειρους βαθμούς ἐλευθερίας καί ἔτσι ἰσοδυναμεῖ μέ ἕνα ἄπειρο σύνολο ἁρμονικῶν ταλαντωτῶν μέ ἰδιοσυχνότητες πού ἀποτελοῦν μιά ἄπειρη ἀκολουθία $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$. Ἕνα ἄλλο παράδειγμα μέ ἰδιαίτερη σπουδαιότητα εἶναι ἡ ἠλεκτρομαγνητική ἀκτινοβολία. 'Επειδή οἱ βασικές ἐξισώσεις τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ, οἱ ἐξισώσεις Maxwell, εἶναι γραμμικές ὡς πρός τό ἠλεκτρικό καί τό μαγνητικό πεδίο, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἠλεκτρομαγνητική ἀκτινοβολία στό κενό συμπεριφέρεται ἐν γένει σάν ἕνα σύνολο ἀπό ἀνεξάρτητους ἁρμονικούς ταλαντωτές.

Παρ'ὅλο πού ἡ διερεύνησή μας ἔγινε στά πλαίσια τῆς κλασικῆς Φυσικῆς, θά πρέπει νά τονιστεῖ ὅτι ἡ παραπάνω

---

*Γιά τόν ἁπλό ἁρμονικό ταλαντωτή ἡ ἀντίστοιχη ἔκφραση εἶναι ἡ (1.14). Στό δεύτερο μέλος της ὁ πρῶτος ὅρος ἀντιπροσωπεύει ἐλεύθερη ταλάντωση καί ὁ δεύτερος τή μόνιμη λύση.

θεμελιώδης ἰδιότητα ἰσχύει ἀκόμα καί στήν Κβαντική Μηχανική: Συστήματα πού διέπονται ἀπό γραμμικές δυναμικές ἐξισώσεις ἀνάγονται σέ σύνολο ἁρμονικῶν ταλαντωτῶν. Στήν περίπτωση αὐτή βέβαια πρόκειται γιά κβαντικούς ἁρμονικούς ταλαντωτές.

Δέν θά ἐπεκταθοῦμε ἐδῶ στή διερεύνηση τοῦ κβαντικοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ πού ἀνήκει σέ ἕνα ἀπό τά πρῶτα κεφάλαια ἑνός μαθήματος Κβαντικῆς Μηχανικῆς. Γιά νά δώσουμε ὅμως μιά ἰδέα τοῦ πόσο πλούσιες σέ προεκτάσεις εἶναι οἱ σχετικά ἁπλές ἔννοιες πού παρουσιάσαμε, χρειάζεται νά ἀναφέρουμε μόνο ὅτι σύμφωνα μέ τήν Κβαντική Μηχανική ἡ (ὁλική) ἐνέργεια ἑνός ἁπλοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ μπορεῖ νά πάρει μόνο τίς διακεκριμένες τιμές

$$E_V = (N + 1/2)h\nu, \qquad N = 0,1,2,\ldots, \infty \qquad (2.38)$$

ὅπου ν εἶναι ἡ χαρακτηριστική συχνότητα τοῦ ταλαντωτῆ καί $h \cong 6.6 \times 10^{-27}$erg·sec εἶναι ἡ σταθερά τοῦ Planck. Τό ἁπλούστερο ἴσως παράδειγμα παρουσιάζουν τά μόρια τῶν διατομικῶν ἀερίων. Ὑπό ὁρισμένες συνθῆκες ἕνα διατομικό μόριο AB μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἁπλῶς σάν ἕνα σύστημα ἀπό δύο σωματίδια A καί B πού συνδέονται μεταξύ τους μέ ἕνα ἐλατήριο. Ἐκτελεῖ ἑπομένως τό μόριο ταλαντώσεις κατά μῆκος τῆς εὐθείας πού ἑνώνει τά δύο ἄτομα ἀκριβῶς σάν ἁπλός ἁρμονικός ταλαντωτής. Θά συμπεραίναμε λοιπόν ὅτι τό πλάτος καί ἑπομένως ἡ ἐνέργεια τοῦ ταλαντωτῆ μπορεῖ νά πάρει ὁποιαδήποτε τιμή ἀπό 0 ὥς ∞. Ὅμως στήν πραγματικότητα ἡ κλασική αὐτή ἄποψη εἶναι ἐσφαλμένη. Τό πείραμα δείχνει ὅτι ἡ ἐνέργεια ταλαντώσεως τοῦ μορίου παίρνει μόνο διακεκριμένες τιμές πού διαφέρουν μεταξύ τους κατά ἀκέραια πολλαπλάσια τοῦ hν, ὅπως προβλέπεται ἀπό τήν (2.38), ὅπου ν ἡ ἰδιοσυχνότητα τοῦ κλασικοῦ ταλαντωτῆ.

Ὅταν βέβαια πρόκειται γιά φαινόμενα ὅπου οἱ μεταβολές τῆς ἐνέργειας ταλάντωσης εἶναι πολύ μεγαλύτερες ἀπό hν, τότε μποροῦμε νά χρησιμοποιοῦμε τήν κλασική μηχανική σάν ἱκανοποιητική προσέγγιση. Γιά μακροσκοπικούς ταλαντωτές, ὅπως π.χ. αὐτός τοῦ Σχ. 1, ἡ κβαντική διερεύνηση θά ἦταν ἄσκοπη σχολαστικότητα.

Ἰδιαίτερη σπουδαιότητα γιά τή Φυσική ἔχουν ὁρισμένα συστήματα μέ πολλούς βαθμούς ἐλευθερίας στά ὁποῖα ἡ κβάντωση τῶν ἀντίστοιχων κανονικῶν ταλαντώσεων ὁδηγεῖ σέ μιά σωματιδιακή εἰκόνα. Ἡ ἐκπομπή π.χ. ἑνός φωτονίου συχνότητας ν ἀπό μιά φωτεινή πηγή δέν εἶναι παρά διέγερση ἑνός ἀπό τούς ταλαντωτές τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου, πού ἀναφέραμε παραπάνω, σέ στάθμη ἐνέργειας ἀνώτερη κατά hν. Πρέπει νά ἀναφέρουμε ἀκόμη, ὅτι ἡ εἰκόνα αὐτή παίζει πρωταρχικό ρόλο στίς σύγχρονες θεωρίες τῆς ὕλης, ἀφοῦ ὅλα τά στοιχειώδη σωματίδια ὅπως ἠλεκτρόνια, πρωτόνια κ.ἄ. περιγράφονται σήμερα σάν διεγέρσεις καταλλήλων πεδίων, ὅπως ἀκριβῶς τά φωτόνια περιγράφονται σάν διεγέρσεις τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου. Ἐπίσης, σάν ἕνα σημαντικό παράδειγμα ἀπό τή Φυσική τοῦ Στερεοῦ Σώματος, ἀναφέρουμε τά φωνόνια. Σέ πρώτη προσέγγιση, τά ἄτομα ἑνός στερεοῦ θεωροῦνται ὅτι ἀλληλεπιδροῦν μεταξύ τους μέ ἐλαστικές δυνάμεις δηλ. σάν νά συνδέονται γειτονικά ἄτομα μέ ἐλατήρια. Τά φωνόνια εἶναι οἱ κβαντικές διεγέρσεις τῶν κανονικῶν ταλαντώσεων τοῦ συστήματος τῶν ἀτόμων ἑνός στερεοῦ καί συμπεριφέρονται μέσα στό στερεό περίπου σάν πραγματικά σωματίδια.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2.1 Ἕνα σύστημα μέ δύο βαθμούς ἐλευθερίας χαρακτηρίζεται ἀπό τά μεγέθη $q_1(t)$ καί $q_2(t)$, τά ὁποῖα ὑπακούουν στίς ἐξισώσεις

$$\ddot{q}_1 = \omega_0^2 (8q_2 - 17q_1)$$

$$\ddot{q}_2 = \omega_0^2 (8q_1 - 17q_2)$$

ὅπου $\omega_0 = 100$ rad/s. Νά βρεθοῦν οἱ ἰδιοσυχνότητες τοῦ συστήματος καί οἱ ἀντίστοιχοι λόγοι πλατῶν τῶν μεγεθῶν q_1 καί q_2.

2.2 Ἕνα σῶμα S μέ μάζα M συνδέεται μέ τή βοήθεια τεσσάρων ἐλατηρίων μέ τίς σταθερές κορυφές ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλόγραμμου ABCD καί εἶναι ἐλεύθερο νά κινηθεῖ χωρίς τριβές στό ἐπίπεδο τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ. Ὅταν τό σῶμα S βρίσκεται στό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων AC καί BD τά ἐλατήρια ἔχουν τό φυσικό τους μῆκος.
Ἡ σταθερά τῶν ἐλατηρίων AS καί CS εἶναι k_1 καί ἡ σταθερά τῶν ἐλατηρίων BS καί DS εἶναι k_2. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν δύο ἰδιοσυχνοτήτων τῶν μικρῶν ταλαντώσεων τοῦ σώματος S σάν συνάρτηση τῶν k_1, k_2, M καί τῆς γωνίας Θ μεταξύ τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου.

2.3 Στό παράδειγμα τοῦ §2.3 δεῖξτε ὅτι ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια τοῦ συστήματος K εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα $K_1 + K_2$ ὅπου τό K_1 ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τήν κανονική μεταβλητή $\tilde{\psi}_1(t)$ καί τό K_2 ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τήν $\tilde{\psi}_2(t)$. Κάτι παρόμοιο ἰσχύει καί γιά τή δυναμική ἐνέργεια $V = V_1 + V_2$. Πῶς γενικεύεται ἡ ἰδιότητα αὐτή γιά ἕνα τυχόν ταλαντούμενο σύστημα (χωρίς ἀπώλειες);

2.4 Στό παράδειγμα τοῦ §2.3 ὑποθέστε ὅτι ὑπάρχουν καί δυνάμεις τριβῆς. Γιά κάθε μάζα πάρτε τό μέτρο τῆς δύναμης τριβῆς νά εἶναι ἴσο μέ τήν ταχύτητα ἐπί ἕνα συντελεστή ξ. Ὑπολογίστε τούς χαρακτηριστικούς χρόνους ἀπόσβεσης τῶν κανονικῶν ταλαντώσεων. Ὑποθέστε $M_1 = M_2 = M$ καί $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell$.

2.5 Ἀποδεῖξτε γενικά τή σχέση (2.37) ὑποθέτοντας ὅτι οἱ συντελεστές Γ εἶναι ἀρκετά μικροί μέ τήν ἔννοια πού δίνεται στό κείμενο.

2.6 Σύστημα μέ 2 βαθμούς ἐλευθερίας χαρακτηρίζεται ἀπό τά μεγέθη $q_1(t), q_2(t)$ πού ὑπακούουν στίς ἐξισώσεις:

$$\ddot{q}_1 = \omega_0^2 \ (8q_2 - 17q_1) - b_{11}q_1$$

$$\ddot{q}_2 = \omega_0^2 \ (8q_1 - 17q_2) - b_{22}q_2 + f\cos\omega t$$

ὅπου ω_0 γνωστό.

α) Θεωρῆστε ὅτι $b_{11} = b_{22} = f = 0$

(i) Ὑπολογίστε τίς ἰδιοσυχνότητες τοῦ συστήματος σάν πολλαπλάσια τοῦ ω_0.

(ii) Ὑπολογίστε τά πλάτη παίρνοντας τά $A_1^{(1)} = A_1^{(2)} = 1$.

(iii) Γράψτε (χωρίς ἀπόδειξη) τίς λύσεις γιά τίς κανονικές συντεταγμένες $\tilde{q}_i(t)$ καί γιά ἐντοπισμένες συντεταγμένες $q_i(t)$ συναρτήσει τῶν κανονικῶν $\tilde{q}_i(t)$.

(iv) Γράψτε (χωρίς ἀπόδειξη) τίς δύο διαφορικές ἐξισώσεις συναρτήσει τῶν $\tilde{q}_i(t)$.

(β) Θεωρῆστε τώρα ὅτι $b_{11} = b_{22} = f = 0$

(i) Γράψτε (χωρίς ἀπόδειξη) τίς δύο διαφορικές ἐξισώσεις συναρτήσει τῶν $\tilde{q}_i(t)$, ὑποθέτοντας ὅτι μποροῦν νά γίνουν ὅλες οἱ γνωστές προσεγγίσεις.

(ii) Γράψτε (χωρίς ἀπόδειξη) τή λύση $\tilde{q}_1(t)$. Σχεδιάστε τά κυριώτερα χαρακτηριστικά της. Ποῦ τείνει ἡ $\tilde{q}_1(t)$ γιά $t \to \infty$;

(iii) Ἐπαναλάβετε ὅλα τά ἐρωτήματα τῆς (ii) γιά τήν $\tilde{q}_2(t)$.

(γ) Ποιά θἆναι ἡ τελική (δηλαδή γιά $t \to \infty$) συμπεριφορά τῶν $q_1(t)$ καί $q_2(t)$;

Ὑπενθυμίζεται ἡ γενική λύση τοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ:

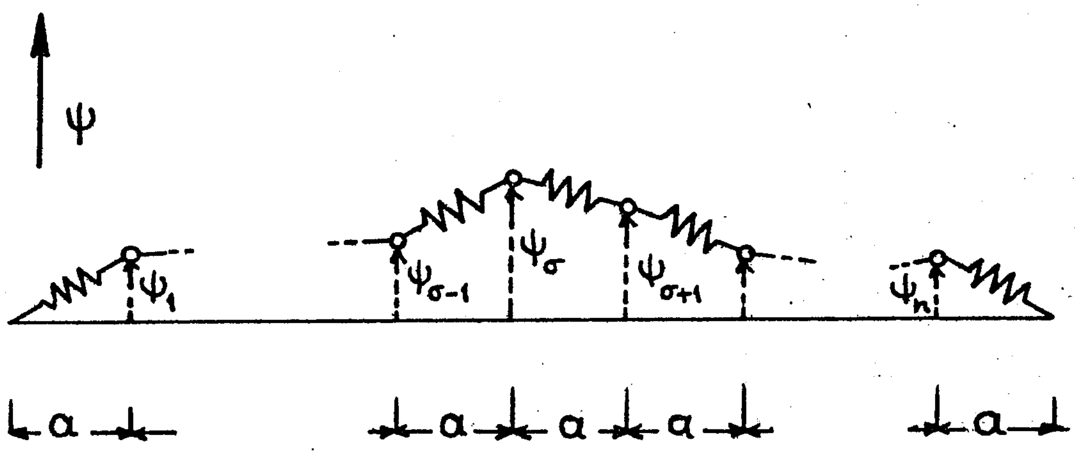
$$x(t) = Ae^{-\Gamma t/2} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/4}\, t + \varphi\right) + f_0 \frac{\omega\Gamma \sin\omega t + (\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

§3.1 Ἐγκάρσιες καί Διαμήκεις Ταλαντώσεις Σειρᾶς n Σωματιδίων

Θεωροῦμε τό σύστημα n σωματιδίων καί n + 1 ἐλατηρίων πού παριστάνει τό Σχ. 14. Στήν κατάσταση ἰσορροπίας τά σωματίδια βρίσκονται πάνω στόν ἄξονα z καί εἶναι ἐλεύθερα νά κινοῦνται μόνο κατά μιά κατεύθυνση ψ πού εἶναι κάθετη στόν ἄξονα z. Πρόκειται ἑπομένως γιά ἐγκάρσιες ταλαντώσεις. Τό



Σχῆμα 14

σύστημα αὐτό εἶναι γενίκευση τοῦ παραδείγματος τῆς §2.2. Ὅπως καί στό παράδειγμα ἐκεῖνο θά περιοριστοῦμε σέ μικρές μετατοπίσεις ἀπό τίς θέσεις ἰσορροπίας, ἔτσι ὥστε νά μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι οὔτε τό μῆκος οὔτε ἡ τάση τῶν ἐλατηρίων ἀλλάζει κατά τή διάρκεια τῆς κινήσεως. Μ'αὐτές τίς προϋποθέσεις τό σύστημα ὑπακούει σέ γραμμικές διαφορικές ἐξισώσεις.

Γιά νά ἁπλουστέψουμε τή διερεύνηση θά ὑποθέσουμε ἀκόμη ὅτι τά ἐλατήρια ἔχουν ὅλα τήν ἴδια τάση T καί ὅτι τά σωματίδια ἔχουν ὅλα τήν ἴδια μάζα M. Ἐπίσης θά ὑποθέσουμε ὅτι οἱ θέσεις ἰσορροπίας τῶν σωματιδίων πάνω στόν ἄξονα z ἰσαπέχουν μεταξύ τους κατά a, ὅπως σημειώνεται στό Σχ. 14.

Ἄς ὀνομάσουμε $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ τίς ἐγκάρσιες μετατοπίσεις τῶν σωματιδίων καί ψ_0, ψ_{n+1} τίς ἐγκάρσιες μετατοπίσεις τοῦ ἀριστεροῦ ἄκρου τοῦ πρώτου ἐλατηρίου καί τοῦ δεξιοῦ ἄκρου τοῦ τελευταίου ἀντίστοιχα. Τότε ἡ ψ - συνιστῶσα τῆς δύναμης πού δρᾶ στό σωματίδιο σ καί ὀφείλεται στό ἐλατήριο πού βρίσκεται δεξιά του εἶναι $-(\psi_\sigma - \psi_{\sigma+1})T/a$. Ἡ ἀντίστοιχη δύναμη πού ὀφείλεται στό ἐλατήριο πού βρίσκεται ἀριστερά τοῦ σωματιδίου εἶναι $-(\psi_\sigma - \psi_{\sigma-1})T/a$. Μέ αὐτές τίς προϋποθέσεις γράφουμε τίς ἀκόλουθες ἐξισώσεις τοῦ Νεύτωνα γιά τά n σωματίδια.

$$M\ddot{\psi}_1 = -T\,\frac{\psi_1 - \psi_0}{a} - T\,\frac{\psi_1 - \psi_2}{a}$$

$$M\ddot{\psi}_2 = -T\,\frac{\psi_2 - \psi_1}{a} - T\,\frac{\psi_2 - \psi_3}{a}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M\ddot{\psi}_n = -T\,\frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{a} - T\,\frac{\psi_n - \psi_{n+1}}{a}$$

Οἱ παραπάνω σχέσεις μποροῦν νά γραφτοῦν συνοπτικά:

$$M\ddot{\psi}_\sigma = -T\,\frac{\psi_\sigma - \psi_{\sigma-1}}{a} - T\,\frac{\psi_\sigma - \psi_{\sigma+1}}{a} \qquad (3.1)$$

ὅπου $\sigma = 1,2,\ldots,n$. Ἔχουμε λοιπόν n ἐξισώσεις γιατί τίς $n+2$ ἄγνωστες συναρτήσεις $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n+1}$. Γιά νά προχωρήσουμε στή λύση ἐπιβάλλουμε "ὁριακές συνθῆκες" γιά τίς μετατοπίσεις τῶν ἄκρων τοῦ συστήματος, δηλ. τίς ψ_0 καί ψ_{n+1}. Ἄς ὑποθέσουμε λοιπόν ὅτι τά ἄκρα εἶναι <u>σταθερά</u>, δηλαδή

$$\psi_0 = \psi_{n+1} = 0$$

Ἔτσι, μένουν n ἄγνωστες συναρτήσεις τοῦ χρόνου. Γιά νά βροῦμε τούς κανονικούς τρόπους ταλαντώσεως θέτουμε

$$\psi_\sigma = A_\sigma \cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad \sigma = 0,1,\ldots,n+1 \tag{3.2}$$

Ἀντικαθιστώντας στήν (3.1) παίρνουμε τό σύστημα

$$\left(2 - \frac{Ma}{T}\,\omega^2\right) A_\sigma - A_{\sigma-1} - A_{\sigma+1} = 0 \tag{3.3}$$

ὅπου $\sigma = 1,2,\ldots,n$ καί $A_0 = A_{n+1} = 0$. Στή γενική περίπτωση ἡ λύση ἑνός συστήματος σάν τό (3.3) δέν εἶναι ἁπλή. Ὅμως, ἐπειδή ὑποθέσαμε ἴσες μάζες, ἴδια ἐλατήρια καί ἴδιες ἀποστάσεις μεταξύ σωματιδίων, οἱ συντελεστές τῶν ἀγνώστων στό (3.3) δέν ἐξαρτῶνται ἀπό τό δείκτη σ. Τέτοια συστήματα ἔχουν λύσεις τῆς μορφῆς

$$A_\sigma = C \sin(\sigma\theta + \beta) \tag{3.4}$$

Πράγματι, ἄν ἀντικαταστήσουμε τή μορφή (3.4) στήν (3.3), βρίσκουμε ὅτι ἐπαληθεύεται ἀρκεῖ νά διαλέξουμε τήν παράμετρο θ ἔτσι ὥστε

$$2 - \frac{Ma}{T}\,\omega^2 - 2\cos\theta = 0 \tag{3.5}$$

Ἐπίσης, ἐπειδή $A_0 = A_{n+1} = 0$, προκύπτει ἀπό τήν (3.4) ὅτι $\sin(\sigma\theta + \beta) = 0$ γιά $\sigma = 0$ καί $\sigma = n+1$. Ἄρα, πρέπει νά ἔχουμε

$$\beta = 0$$

$$\theta = h\,\frac{\pi}{n+1}\ , \quad h = 1,2,\dots,n \qquad (3.6)$$

Λύση ἔχουμε βέβαια γιά <u>τυχόντα</u> ἀκέραιο h, ἀλλά σημειῶστε ὅτι τό $h=0$ ἀποκλείεται γιατί ἀντιστοιχεῖ στήν τετριμένη λύση $A_\sigma = 0$ καί ὅτι δυό τιμές τοῦ h πού διαφέρουν κατά $n+1$ ἀντιστοιχοῦν στά ἴδια πλάτη A_σ (αὐτό προκύπτει εὔκολα ἀπό τίς σχέσεις (3.6) καί (3.4). Ἄρα ἀρκεῖ νά θεωρήσουμε τίς τιμές $h = 1,2,3,\dots,n$ καί μόνο αὐτές.

Λύνοντας τήν (3.5) ὡς πρός ω παίρνουμε

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{Ma}(2-2\cos\theta)} = 2\sqrt{\frac{T}{Ma}}\,\sin\frac{\theta}{2}$$

Συμπεραίνουμε ὅτι σέ κάθε ἀκέραιο h ἀπό 1 ὥς n, ἀντιστοιχεῖ ἕνας κανονικός τρόπος ταλάντωσης κατά τόν ὁποῖο ἡ ἐγκάρσια μετατόπιση τοῦ σ-στοῦ σωματιδίου εἶναι

$$\psi_\sigma^{(h)}(t) = C\sin\left(\sigma\,\frac{h\pi}{n+1}\right)\cos(\omega_h t + \varphi) \qquad (3.7)$$

Ἡ ἰδιοσυχνότητα ω_h δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

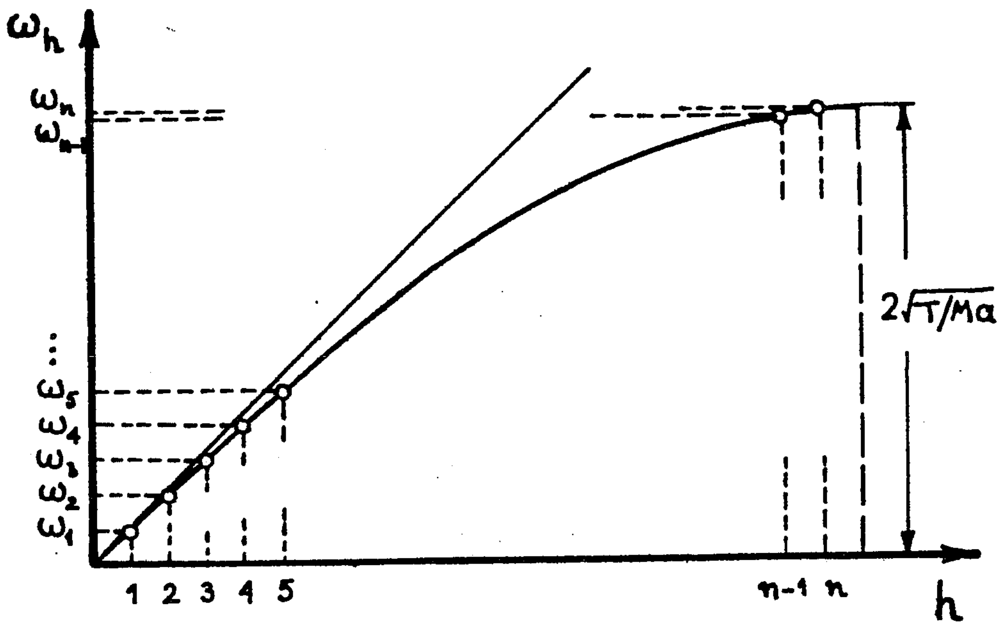
$$\omega_h = 2\sqrt{\frac{T}{Ma}}\,\sin\left(\frac{h}{n+1}\,\frac{\pi}{2}\right), \quad h = 1,2,\dots,n \qquad (3.8)$$

Τό Σχ. 15 παριστάνει γραφικά τήν ἐξάρτηση τῆς ἰδιοσυχνότητας ω_h ἀπό τό δείκτη h. Σημειῶστε ὅτι ὅσο πιό μεγάλος εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν σωματιδίων n τόσο πιό πυκνά καλύπτουν οἱ ἰδιοσυχνότητες τό διάστημα ἀπό $\omega = 0$ ὥς $\omega = 2\sqrt{T/Ma}$.*

Τό Σχ. 16 δίνει τή γεωμετρική μορφή τοῦ συστήματος ὅταν αὐτό ταλαντώνεται κατά κανονικούς τρόπους μέ ἰδιοσυχνότητες $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Οἱ ἡμιτονοειδεῖς αὐτές μορφές προκύπτουν

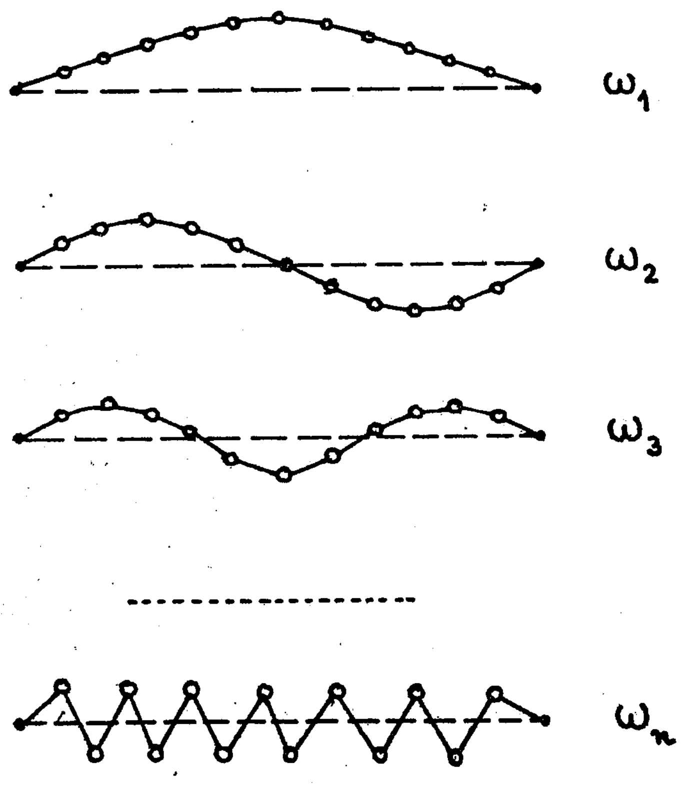
---

*Ὑποθέτουμε ἐδῶ ὅτι τό T/Ma μένει σταθερό καθώς τό n αὐξάνει ἀπεριόριστα.



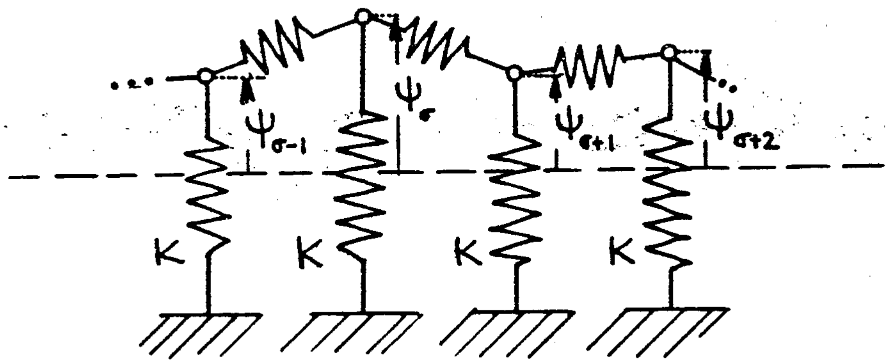
Σχῆμα 15

ἀπό τήν (3.7) γιά μιά τιμή τοῦ χρόνου t.



Σχῆμα 16

Μιά <u>ένδιαφέρουσα γενίκευση</u> τοῦ παραπάνω συστήματος εἶναι ἡ ἀκόλουθη: Θεωροῦμε ὅτι, ἐκτός ἀπό τά ἐλατήρια πού συνδέουν γειτονικά σωματίδια, ὑπάρχουν καί ἐλατήρια <u>ἐγκάρσια</u> πού συνδέουν τά σωματίδια μέ σταθερά σημεῖα (Σχ. 17). Τά τελευταῖα ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι πανομοιότυπα μεταξύ τους μέ σταθερά ἐλατηρίου K καί ἔχουν τό φυσικό τους μῆκος ὅταν τά σωματίδια βρίσκονται στή θέση ἰσορροπίας (Γιά $K=0$ τό σύστημα αὐτό προφανῶς συμπίπτει μέ αὐτό τοῦ Σχ. 14).



Σχῆμα 17

Οἱ βασικές σχέσεις εἶναι οἱ ἴδιες μέ ἐκεῖνες τοῦ προηγούμενου συστήματος μέ μικρές μόνο τροποποιήσεις.

Πράγματι, οἱ ἐξισώσεις τοῦ Νεύτωνα γιά τά σωματίδια, ἀντί τῶν (3.1) εἶναι

$$M\ddot{\psi}_\sigma = -T\,\frac{\psi_\sigma - \psi_{\sigma-1}}{a} - T\,\frac{\psi_\sigma - \psi_{\sigma+1}}{a} - K\psi_\sigma \qquad (3.9)$$

ὅπου ἔχει προστεθεῖ ὁ τελευταῖος ὅρος πού εἶναι ἡ δύναμη ἐπαναφορᾶς τοῦ σ-στοῦ ἐγκάρσιου ἐλατηρίου. Τό σύστημα (3.3) γίνεται

$$\left(2 - \frac{Ma}{T}\,\omega^2 + \frac{Ka}{T}\right)A_\sigma - A_{\sigma-1} - A_{\sigma+1} = 0 \qquad (3.10)$$

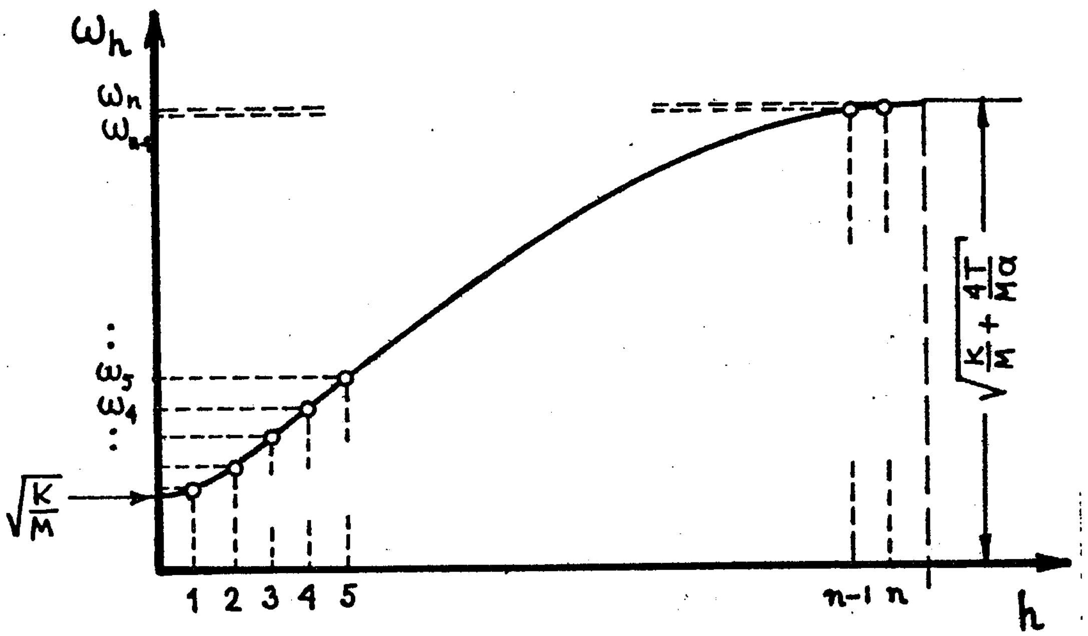
Θέτουμε καί στήν περίπτωση αύτή $A_\sigma = C\,\sin(\sigma\theta + \beta)$, όπότε βρίσκουμε άντί τής (3.5) τή σχέση

$$2 - \frac{Ma}{T}\,\omega^2 + \frac{Ka}{T} - 2\cos\theta = 0 \qquad (3.11)$$

Ύποθέτουμε σταθερά άκρα, δηλ. $\psi_0 = \psi_{n+1} = 0$ ή $A_0 = A_{n+1} = 0$. Έτσι, έχουμε καί πάλι τίς τιμές (3.6) γιά τίς παραμέτρους β καί θ. Τελικά, οί ίδιοσυχνότητες είναι οί έξής:

$$\omega_h = \sqrt{\frac{K}{M} + \frac{4T}{Ma}\,\sin^2\left(\frac{h}{n+1}\,\frac{\pi}{2}\right)}\ , \qquad h = 1,2,\ldots,n \qquad (3.12)$$

Γραφική παράσταση τοῦ ω_h σάν συνάρτησης τοῦ δείκτη h δίνει τό Σχ. 18.

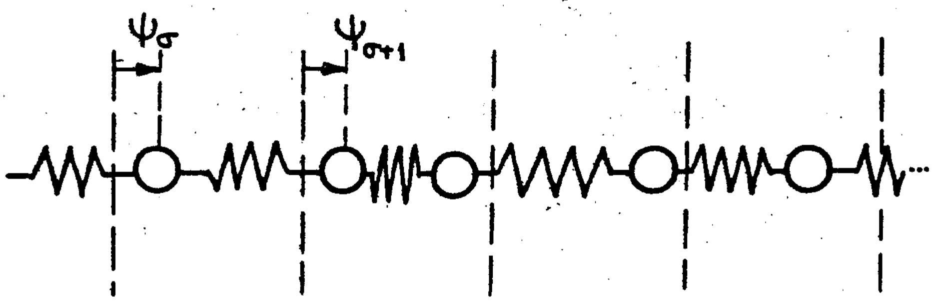


Σχῆμα 18

Παρατηροῦμε ὅτι,ὅταν τό n εἶναι μεγάλος ἀριθμός οἱ ἰδιοσυχνότητες καλύπτουν πυκνά τό διάστημα

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}} < \omega_h < \sqrt{\frac{K}{M} + \frac{4T}{Ma}} = \Omega_2 \qquad (3.13)$$

Ἐντελῶς ἀνάλογη διερεύνηση ἰσχύει καί γιά τίς <u>διαμήκεις</u> ταλαντώσεις μιᾶς σειρᾶς σωματιδίων καί ἐλατηρίων ὅπως αὐτή τοῦ Σχ. 19.



Σχῆμα 19

Τά σωματίδια στό σύστημα αὐτό μποροῦν νά κινοῦνται μόνο κατά τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα z. Οἱ ἀντίστοιχες μετατοπίσεις $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ ἀπό τή θέση ἰσορροπίας ἱκανοποιοῦν σχέσεις ἴδιες μέ τίς (3.1), ὅπου ὅμως ὁ λόγος T/a ἔχει ἀντικατασταθεῖ ἀπό τή σταθερά K τῶν ἐλατηρίων. Ἑπομένως, <u>ὅλες</u> οἱ σχέσεις πού ἰσχύουν γιά ἐγκάρσιες ταλαντώσεις μετατρέπονται σέ ἀντίστοιχες γιά τίς διαμήκεις ταλαντώσεις ἄν γίνει ἡ ἀντικατάσταση $T \rightarrow Ka$. Ἔτσι, ἄν τά ἄκρα τοῦ συστήματος κρατηθοῦν σταθερά, βρίσκουμε ὅτι οἱ ἰδιοσυχνότητες τοῦ συστήματος εἶναι

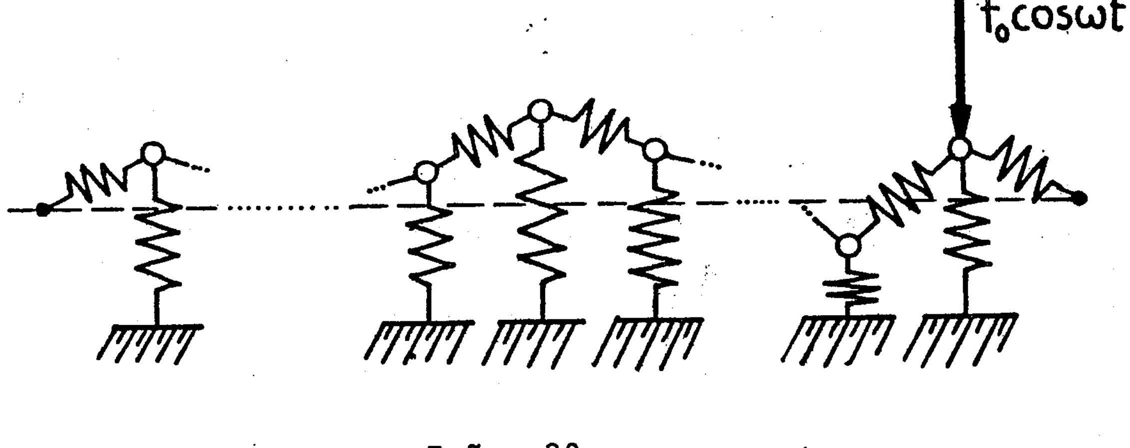
$$\omega_h = 2\sqrt{\frac{K}{M}} \sin\left(\frac{h}{n+1}\,\frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad h = 1,2,\ldots,n \qquad (3.7')$$

§3.2† Φίλτρα

Στήν §1.2 εἴδαμε πώς ἡ παρεμβολή ἑνός συστήματος ἐλατηρίων μεταξύ ἁμαξώματος καί τροχῶν μπορεῖ νά ἐξασθενίσει ἐκλεκτικά τή μετάδοση στό ἁμάξωμα ἑνός τροχοφόρου ταλαντώσεων μιᾶς περιοχῆς συχνοτήτων. Αὐτό εἶναι ἕνα χαρακτηριστικό παράδειγμα φίλτρου, δηλ. ἑνός κατάλληλου συστήματος πού παρεμβάλλεται γιά νά μεταφέρει ταλαντώσεις ἀπό ἕνα σύστημα S_1 σέ ἕνα ἄλλο S_2 μέ ἀποτέλεσμα νά φθάνουν ὁρισμένες ἁρμονικές συνιστῶσες ἀρκετά ἐξασθενημένες καί ἄλλες ἀρκετά ἐνισχυμένες.

Σάν πιό ἀποτελεσματικά φίλτρα μποροῦν νά χρησιμέψουν συστήματα μέ πολλούς βαθμούς ἐλευθερίας. Ἕνα μηχανικό ἐπίσης παράδειγμα εἶναι τό σύστημα μαζῶν καί ἐλατηρίων πού μελετήσαμε στήν §3.1 (Σχ. 17). Ἄς ὑποθέσουμε, ὅτι ἐνῶ ἐξακολουθοῦμε νά κρατᾶμε τά ἄκρα τοῦ συστήματος αὐτοῦ σταθερά (δηλ. $\psi_0 = \psi_{n+1} = 0$), ἐφαρμόζουμε στή n-στή μάζα μιά ἁρμονική δύναμη μέ συχνότητα ω (Σχ. 20):

$f_0 \cos(\omega t)$



Σχῆμα 20

†Τό ἐδάφιο αὐτό μπορεῖ νά παραλειφθεῖ σέ πρώτη ἀνάγνωση.

Εἶναι φανερό ὅτι ὅλες οἱ σχέσεις (3.9) θά ἰσχύουν ἐκτός ἀπό τήν τελευταία (γιά $\sigma = n$) στό δεύτερο μέλος τῆς ὁποίας πρέπει τώρα νά περιληφθεῖ ἡ ἐξωτερική δύναμη. Ἔχουμε λοιπόν:

$$M\ddot{\psi}_\sigma = -T\,\frac{\psi_\sigma - \psi_{\sigma-1}}{a} - T\,\frac{\psi_\sigma - \psi_{\sigma+1}}{a} - K\psi_\sigma$$

γιά $\sigma = 1, 2, \ldots, n-1$ (3.9′)

$$M\ddot{\psi}_n = -T\,\frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{a} - T\,\frac{\psi_n - \psi_{n+1}}{a} - K\psi_n + f\cos(\omega t)$$

καί $\psi_0 = \psi_{n+1} = 0$.

Πρόκειται οὐσιαστικά γιά ἐξαναγκασμένες ταλαντώσεις ἑνός συστήματος μέ n βαθμούς ἐλευθερίας. Σύμφωνα μέ τή γενική μέθοδο πού ἀναπτύχθηκε στό δεύτερο κεφάλαιο, ἀναζητοῦμε μιά ἁρμονική λύση τῶν (3.9′) μέ συχνότητα τή συχνότητα ω τῆς ἐξωτερικῆς δύναμης. Θέτουμε λοιπόν

$$\psi_\sigma = A_\sigma \cos(\omega t)\ , \quad \sigma = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.14)$$

ὁπότε προκύπτει τό ἀκόλουθο σύστημα γιά τά πλάτη A_σ:

$$\left(2 - \frac{Ma}{T}\,\omega^2 + \frac{Ka}{T}\right)A_\sigma - A_{\sigma-1} - A_{\sigma+1} = 0$$

γιά $\sigma = 1, 2, \ldots, n-1$ (3.15)

$$\left(2 - \frac{Ma}{T}\,\omega^2 + \frac{Ka}{T}\right)A_n - A_{n-1} - A_{n+1} = f\,\frac{a}{T}$$

καί $A_0 = A_{n+1} = 0$.

Προχωροῦμε στή λύση τοῦ συστήματος (3.15) ἀντικαθιστώντας τή μορφή

$$A_\sigma = C \sin(\sigma\Theta) \quad , \qquad \sigma = 1,2,\ldots,n \; , \tag{3.16}$$
(όχι όμως γιά $\sigma = n+1$)

Οἱ n −1 πρῶτες ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (3.15) εἶναι ἀκριβῶς οἱ ἴδιες μέ τίς ἀντίστοιχες ἐξισώσεις τοῦ (3.10). Ἐπομένως ἡ μορφή (3.16) τίς ἐπαληθεύει ἀρκεῖ νά ἰσχύει ἡ ἴδια σχέση μεταξύ Θ καί ω πού εἴχαμε βρεῖ στήν §3.1:

$$2 - \frac{Ma}{T}\omega^2 + \frac{Ka}{T} - 2\cos\Theta = 0 \tag{3.11}$$

Ἀπό τίς πρῶτες n −1 ἐξισώσεις δέν προκύπτει ἔτσι κανένας περιορισμός γιά τήν πολλαπλασιαστική σταθερά C μιά καί εἶναι ὅλες ὁμογενεῖς. Ἀντίθετα, ἡ n-στή ἐξίσωση εἶναι μή ὁμογενής (ἐπειδή ἡ ἐξωτερική δύναμη δρᾶ πάνω στή n-στή μάζα) καί, ἄν γίνει χρήση τῆς (3.11) γράφεται

$$-C \sin[(n+1)\Theta] = f\,\frac{a}{T} \tag{3.17}$$

Ἔτσι, ἡ τελευταία αὐτή ἐξίσωση προσδιορίζει τήν πολλαπλασιαστική σταθερά

$$C = -f\,\frac{a}{T}\,\frac{1}{\sin[(n+1)\Theta]} \tag{3.18}$$

Ἀναφέρουμε συγκριτικά ὅτι στή διερεύνηση τῶν ἐλευθέρων ταλαντώσεων τοῦ συστήματος πού κάναμε στήν §3.1, εἴχαμε $f = 0$, ὁπότε ἡ n-στή ἐξίσωση (3.17) ἦταν κι αὐτή ὁμογενής: $C \sin[(n+1)\Theta] = 0$. Ἔτσι, δέν προσδιόριζε τήν C ἀλλά περιόριζε τή Θ σέ μιά ἀπό τίς τιμές $\pi/n+1$, $2\pi/n+1$, $3\pi/n+1 \ldots n\pi/n+1$, οἱ ὁποῖες καί καθορίζουν ἀπό τήν (3.11) τίς ἰδιοσυχνότητες τῶν ἐλευθέρων ταλαντώσεων.

Συνδυάζοντας τίς σχέσεις (3.14), (3.16) καί (3.18) ἔχουμε τίς μετατοπίσεις τῶν n μαζῶν σάν συνάρτηση τοῦ χρόνου

$$\psi_\sigma(t) = -f\frac{a}{T}\,\frac{\sin(\sigma\Theta)}{\sin[(n+1)\Theta]}\cos(\omega t) \tag{3.19}$$

ὅπου ἡ παράμετρος θ καθορίζεται σάν συνάρτηση τῆς συχνότητας ω τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως ἀπό τήν (3.11).

Ἡ γενική λύση τῶν (3.9′) εἶναι τό ἄθροισμα τῆς (3.19) σύν μιά ὑπέρθεση ἐλεύθερων ταλαντώσεων (βλ. §2.5). Θά συγκεντρώσουμε ὅμως τώρα τήν προσοχή μας στή λύση (3.19) πού εἶναι καί ἡ μόνιμη λύση, ἀφοῦ οἱ ἐλεύθερες ταλαντώσεις ὑποθέτουμε ὅτι τελικά, μετά ἀπό πάροδο ἀρκετά μεγάλου χρόνου, θά ἀποσβεστοῦν, ἄν λάβουμε ὑπόψη καί κάποιες ἀπώλειες στό σύστημα.

Παρατηροῦμε ὅτι στήν ἔκφραση (3.19) ὁ παρονομαστής $\sin[(n+1)\theta]$ μηδενίζεται ὅταν $\theta = h\pi/n+1$ $(h = 1,2,\ldots,n)$. Αὐτό συμβαίνει ὅταν ἡ συχνότητα ω τῆς ἐξωτερικῆς δύναμης συμπίπτει μέ μιά ἀπό τίς ἰδιοσυχνότητες τοῦ συστήματος ω_1, $\omega_2,\ldots,\omega_n$ [βλ. σχέση (3.8)]. Ἰσχύει λοιπόν ὅτι καί γιά τόν ἁπλό ἁρμονικό ταλαντωτή: Ἄν ἀμελήσουμε τίς τριβές, τά πλάτη ταλαντώσεως γίνονται ἀπείρως μεγάλα ὅταν ἡ ἐξωτερική δύναμη γίνει ἴση μέ μιά ἀπό τίς ἰδιοσυχνότητες τοῦ συστήματος.

Δέ θά ἐπεκτείνουμε τή διερεύνησή μας στήν περίπτωση ὅπου ὑπάρχουν ἀπώλειες στό σύστημα, ἄν καί αὐτό μπορεῖ νά γίνει εὔκολα στήν περίπτωση μικρῶν ἀπωλειῶν, ἄν ἀκολουθηθεῖ ἡ γενική μέθοδος τοῦ δευτέρου κεφαλαίου. Σημειώνουμε μόνο ὅτι ὅταν οἱ ἀπώλειες εἶναι μικρές, ἡ ἔκφραση (3.19) (ὅπου ἔχουν ἀγνοηθεῖ τελείως οἱ ἀπώλειες) εἶναι ἱκανοποιητική ἐκτός ἄν ἡ συχνότητα ω ἔχει πλησιάσει σέ μιά ἀπό τίς ἰδιοσυχνότητες. Ἡ ἰδιότητα αὐτή εἶναι πάλι γενίκευση ἀντίστοιχης ἰδιότητας τοῦ ἁπλοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ [Σημ.: Ἡ (3.19) ἀντιστοιχεῖ στήν (1.22) τοῦ ἁπλοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ. Ἐνδιαφέρουσα π.χ. εἶναι ἡ σύγκριση τῆς (3.19) γιά $n = 1$ μέ τήν (1.22)].

Ἄς δοῦμε τώρα πῶς τό σύστημα λειτουργεῖ σάν φίλτρο. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ σχέση (3.11) ἐπαληθεύεται γιά πραγματικές τιμές τῆς παραμέτρου θ μόνο ὅταν

$$-1 \leq 1 - \frac{Ma}{2T}\,\omega^2 + \frac{Ka}{2T} \leq 1$$

δηλ. ὅταν ἡ συχνότητα ω ἱκανοποιεῖ τίς ἀνισότητες

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}} \leq \omega \leq \sqrt{\frac{K}{M} + \frac{4T}{Ma}} = \Omega_2 \qquad (3.20)$$

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι τό διάστημα (Ω_1, Ω_2) περιέχει ὅλες τίς ἰδιοσυχνότητες τοῦ συστήματος [βλ. (3.12)].

Σέ περίπτωση πού ἡ συχνότητα ω τῆς ἐξωτερικῆς δύναμης εἶναι <u>ἐκτός</u> τοῦ διαστήματος (3.20), ἡ σχέση (3.11) μᾶς δίνει <u>μιγαδικές</u> τιμές γιά τήν θ. Πράγματι, ἡ ποσότητα

$$\xi = 1 - \frac{Ma}{2T}\,\omega^2 + \frac{Ka}{2T} = \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - 2\omega^2}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} \qquad (3.21)$$

εἶναι μεγαλύτερη τοῦ 1 γιά $\omega < \Omega_1$ καί μικρότερη τοῦ -1 γιά $\omega > \Omega_2$. Ἀντίστοιχα, οἱ λύσεις τῆς (3.11) ὡς πρός θ (δηλ. τῆς $\cos\theta = \xi$) εἶναι:

$$\begin{aligned} &\omega < \Omega_1 \,, \quad \theta = \pm ir \\ &\omega > \Omega_2 \,, \quad \theta = \pm\pi \pm ir \end{aligned} \qquad (3.22)$$

ὅπου

$$r = \ln(|\xi| + \sqrt{\xi^2 - 1}) \qquad (3.23)$$

Ἔτσι, γιά τιμές τῆς ω ἐκτός τοῦ διαστήματος (Ω_1, Ω_2), γιά τίς ὁποῖες ἡ παράμετρος θ εἶναι φανταστική, μποροῦμε νά γράψουμε τήν (3.19) κάνοντας χρήση τῆς μεταβλητῆς r ὡς ἑξῆς:

$$\psi_\sigma(t) = - f\frac{a}{T}\,\frac{\sinh(\sigma r)}{\sinh[(n+1)r]}\cos(\omega t)\,, \quad \Omega < \Omega_1 \qquad (3.19')$$

$$= (-1)^{n-\sigma} f\frac{a}{T}\,\frac{\sinh(\sigma r)}{\sinh[(n+1)r]}\cos(\omega t)\,, \quad \omega > \Omega_2$$

ὅπου ἡ r καθορίζεται σάν συνάρτηση τῆς ω ἀπό τίς σχέσεις (3.21) καί (3.23).

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἡ ποσότητα $(n+1)r$ εἶναι μεγάλος ἀριθμός, δηλ.

$$(n+1)r >> 1 \qquad (3.24)$$

Τό ὑπερβολικό ἡμίτονο, γιά μεγάλες τιμές τοῦ ὀρίσματός του, αὐξάνει ἐκθετικά:

$$\sinh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2}e^{x} \qquad (3.25)$$

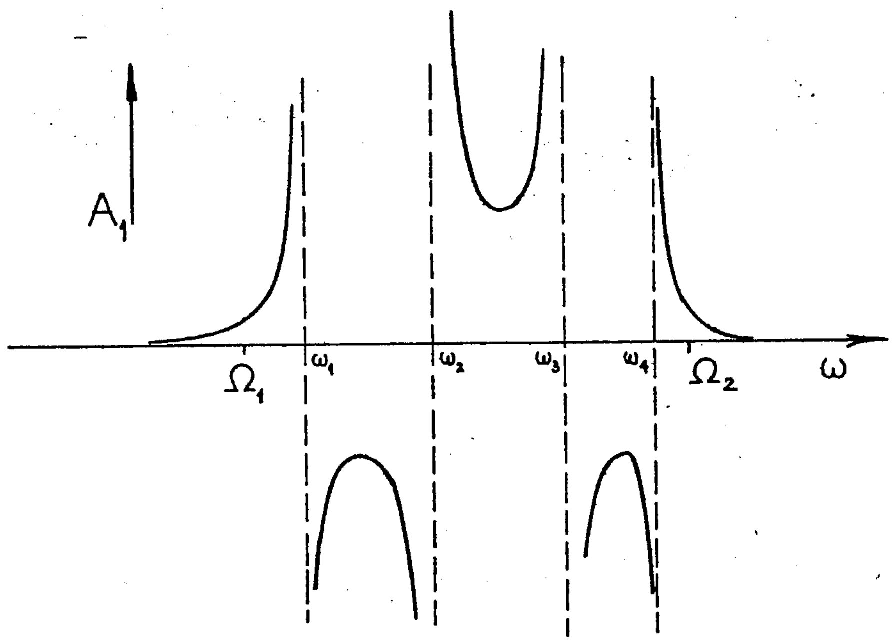
Ἄν, ἐπομένως, στήν παράσταση (3.19') ὁ δείκτης σ εἶναι ἀρκετά μεγάλος, δηλ. τῆς αὐτῆς τάξης μεγέθους, μέ τόν n, τότε καί τά δύο ὑπερβολικά ἡμίτονα μποροῦν ἀσυμπτωτικά νά ἀντικατασταθοῦν μέ ἐκθετικές συναρτήσεις, σύμφωνα μέ τήν (3.25). Ἔτσι προκύπτει

$$\psi_\sigma(t) \cong -f\,\frac{a}{T}\,e^{-(n-\sigma+1)r}\cos(\omega t)\,, \quad \omega < \Omega_1 \qquad (3.26)$$

$$\cong (-1)^{n-\sigma} f\frac{a}{T}\,e^{-(n-\sigma+1)r}\cos(\omega t)\,, \quad \omega > \Omega_2$$

Ἡ παραπάνω ἔκφραση δείχνει ὅτι τό πλάτος τῆς ἐξαναγκασμένης ταλάντωσης <u>φθίνει ἐκθετικά</u> μέ τήν ἀπόσταση ἀπό τό σημεῖο ὅπου ἐπιβάλλεται ἡ ἐξωτερική δύναμη δηλ. ἀπό τή n-στή μάζα. Μέ ἄλλα λόγια τό πλάτος ἀκολουθεῖ γεωμετρική πρόοδο ἀπό τή μιά μάζα στή γειτονική της: $\psi_{\sigma-1} = e^{-r}\psi_\sigma$. Συμπεραίνουμε ὅτι διαταράξεις μέ συχνότητες ἐκτός τοῦ διαστήματος (Ω_1, Ω_2) ἀποσβέννυνται ἀποτελεσματικά κατά τή μετάδοσή τους μέσα ἀπό ἕνα ἀρκετά μεγάλο ἀριθμό μαζῶν (καί ἐλατηρίων) τοῦ συστήματος. Τό σύστημα, ἐπομένως, λειτουργεῖ σάν φίλτρο γιά τίς συχνότητες αὐτές.

Οἱ συχνότητες Ω_1 καί Ω_2 λέγονται <u>συχνότητες ἀποκοπῆς</u>. Ὅπως προκύπτει ἀπό τά παραπάνω, αὐτό δέν σημαίνει πώς πέρα ἀπό τίς συχνότητες αὐτές ἔχουμε <u>τέλεια</u> ἀπόσβεση, ἀλλά ὅτι ἰσχύει (προσεγγιστικά) ὁ ἐκθετικός νόμος ἀποσβέσεως τῶν διαδοχικῶν πλατῶν σύμφωνα μέ τή σχέση (3.26). Τό Σχ.21 δίνει γιά $n=4$ γραφική παράσταση τοῦ πλάτους A_1 σάν συνάρτηση τῆς συχνότητας ω. Τό πλάτος αὐτό ἀπειρίζεται στά σημεῖα $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ καί εἶναι ἀμελητέο ἔξω ἀπό τό διάστημα (Ω_1, Ω_2).



Σχῆμα 21

Τό σύστημα συζευγμένων ἠλεκτρικῶν κυκλωμάτων τοῦ Σχ. 22 λειτουργεῖ κι αὐτό σάν φίλτρο μέ συμπεριφορά ἐντελῶς ἀνάλογη μέ τό μηχανικό φίλτρο πού μελετήσαμε. Πράγματι εἶναι εὔκολο νά διαπιστωθεῖ ὅτι μέ τήν ἀντιστοίχηση

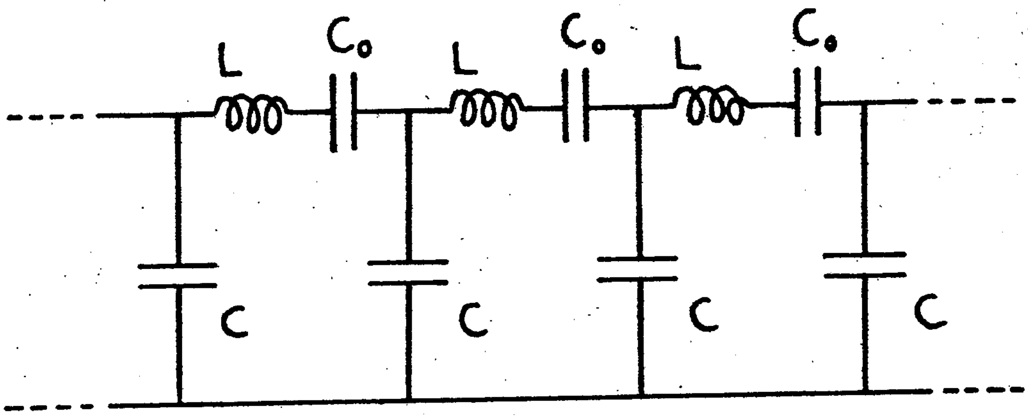
$L \longrightarrow M$

$C^{-1} \longrightarrow T/a$

$C_0^{-1} \longrightarrow K$

οἱ βασικές σχέσεις πού διέπουν τά δύο συστήματα εἶναι οἱ ἴδιες. Ἔτσι, ἕνα σύστημα πού ἔχει τή δομή τοῦ Σχ. 22 καί πού ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα ἀρκετά μεγάλο ἀριθμό διαδοχικῶν βρόχων λειτουργεῖ σάν φίλτρο διαπερατό ἀπό ἐναλλασσόμενα ρεύματα μέ συχνότητες ω στό διάστημα

$$\frac{1}{\sqrt{LC_0}} < \omega < \sqrt{\frac{1}{LC_0} + \frac{4}{LC}}$$



Σχῆμα 22

§3.3 Τό Συνεχές Μέσο σάν Ὅριο

Ἄς θεωρήσουμε πάλι τό σύστημα τοῦ σχήματος 14. Θά μελετήσουμε τώρα τήν ὁριακή περίπτωση ὅπου ἡ ἀπόσταση a καί ἡ μάζα M τείνουν στό μηδέν ἔτσι ὥστε νά μένει σταθερός ὁ λόγος $\rho = M/a$ (δηλ. ἡ μάζα ἀνά μονάδα μήκους ἐπάνω στόν ἄξονα z):

$$\begin{aligned} & M \longrightarrow 0 \\ & a \longrightarrow 0 \\ & \frac{M}{a} = \rho \end{aligned} \qquad (3.27)$$

Γιά νά γίνει διαισθητικά καλύτερα ἀντιληπτό τό ὅριο αὐτό μποροῦμε πρῶτα νά ἀντικαταστήσουμε νοερά τά ἐλατήρια μέ κομμάτια ἀπό ἀβαρές νῆμα. Τότε, παίρνοντας τό ὅριο θά ἔχουμε ἕνα νῆμα ἤ καλύτερα μιά ἰδεατά εὔκαμπτη χορδή μέ συνεχή καί ὁμοιόμορφη κατανομή μάζας πού χαρακτηρίζεται ἀπό τή γραμμική πυκνότητα ρ καί ἔχει τάση T. Μέ αὐτόν τόν τρόπο θά μελετήσουμε τίς ταλαντώσεις τῆς χορδῆς, δηλ. ἑνός <u>συνεχοῦς</u> μέσου, σάν ὁριακή περίπτωση ἑνός <u>διακεκριμένου</u> συστήματος.

Ἀρχίζουμε ἀπό τή σχέση (3.1). Ὁρίζουμε μιά διπλά παραγωγίσιμη συνάρτηση $\psi(z,t)$ τέτοια ὥστε:

$$\psi_\sigma(t) = \psi(\sigma a,t) \ , \qquad k=1,2,\ldots,n \qquad \left(L=(n+1)a\right)$$

Στό ὅριο $a \to 0$ ἔχουμε τό ἀνάπτυγμα Taylor:

$$\psi_{\sigma\pm 1}(t) = \psi((\sigma\pm 1)a,t) = \psi(\sigma a,t) \pm a\,\frac{\partial\psi}{\partial z}(\sigma a,t) + $$

$$+\frac{1}{2}\,a^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(\sigma a,t) + 0(a^3) \qquad (3.28)$$

ὅπου τό σύμβολο $0(a^3)$ ὑποδηλώνει ὅρο τάξεως a^3. Ἄν τώρα ἀντικαταστήσουμε τά $\psi_{\sigma\pm 1}$ ἀπό τήν (3.28) στήν (3.1), διαιρέσουμε καί τά δύο μέλη της μέ a, καί πάρουμε τό ὅριο $a \to 0$ θά προκύψει ἡ σχέση

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{3.29}$$

'Η σχέση αὐτή εἶναι πράγματι ἡ διαφορική ἐξίσωση πού διέπει τίς μικρές ἐγκάρσιες μετατοπίσεις $\psi(z,t)$ μιᾶς ἀπόλυτα εὔκαμπτης χορδῆς. 'Η χορδή εἶναι ὁμογενής μέ γραμμική πυκνότητα ρ καί τείνεται μέ τάση T.

"Αν τά ἄκρα τῆς χορδῆς κρατηθοῦν σταθερά, π.χ. στά σημεῖα $z=0$ καί $z=L$, οἱ ἐλεύθερες ταλαντώσεις της θά χαρακτηρίζονται ἀπό ἰδιοσυχνότητες πού θά προκύψουν ἀπό τήν (3.8) ἄν πάρουμε τό ὅριο $a\to 0$. 'Επειδή τό $(n+1)a$ εἶναι ἴσο μέ τό μῆκος τῆς χορδῆς L ἔχουμε

$$\omega_h = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\,\frac{2}{a}\,\sin\left(\frac{ha}{L}\,\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow[a\to 0]{} \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\,h \tag{3.30}$$

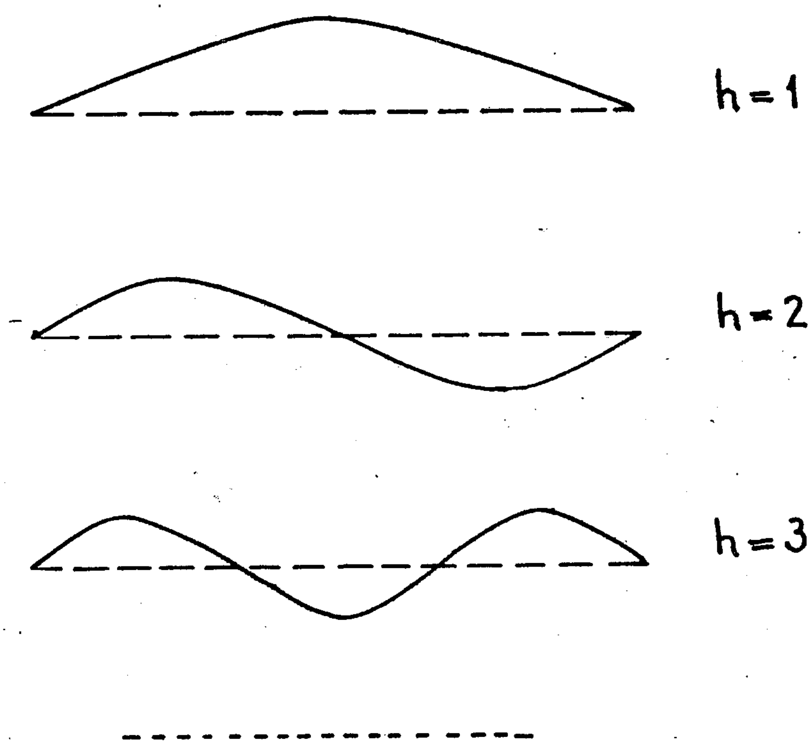
ὅπου $h=1,2,\ldots,\infty$ δηλ. ὁ δείκτης h παίρνει ὅλες τίς ἀκέραιες θετικές τιμές. "Ωστε ἡ χορδή ἔχει <u>ἄπειρες</u> ἰδιοσυχνότητες (αὐτό ἔπρεπε νά τό περιμέναμε μιά καί ἡ συνεχής χορδή ἔχει <u>ἄπειρο</u> ἀριθμό βαθμῶν ἐλευθερίας). 'Η ω_1 λέγεται <u>θεμελιώδης</u> συχνότητα τῆς χορδῆς καί οἱ $\omega_2, \omega_3, \ldots$ <u>πρώτη</u>, <u>δεύτερη</u> κλπ. <u>ἁρμονική</u>. Στό Σχ. 15 οἱ ἰδιοσυχνότητες τῆς συνεχοῦς χορδῆς καθορίζονται ἀπό τήν εὐθεῖα πού ἐφάπτεται στήν ἡμιτονοειδή καμπύλη στό σημεῖο $h=0$. Οἱ ἀντίστοιχες μορφές τῆς χορδῆς προκύπτουν ἀπό τή σχέση (3.7). "Αν σέ αὐτή θέσουμε $\sigma = z/a$ καί $n+1 = L/a$ ἔχουμε

$$\psi^{(h)}(z,t) = C\,\sin\left(h\,\frac{\pi z}{L}\right)\cos(\omega_h t + \varphi) \tag{3.31}$$

'Επομένως ἡ μορφή τῆς χορδῆς (δηλ. ἡ ἐξάρτηση τῆς μετατόπισης ψ ἀπό τό z) κατά τόν κανονικό τρόπο ταλάντωσης μέ συχνότητα ω_h δίνεται ἀπό τό ἡμίτονο

$\sin(h \frac{\pi z}{L})$

Τό σχῆμα 23 δίνει τίς μορφές πού παίρνει ἡ χορδή ὅταν ταλαντώνεται μέ κανονικό τρόπο.



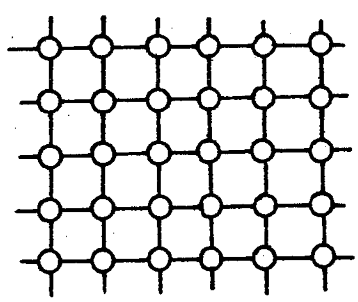
Σχῆμα 23

Ὅπως δείχνει μιά παραβολή τῶν σχημάτων 16 καί 23, ἕνα νῆμα μέ διακεκριμένες μάζες συμπεριφέρεται μέ καλή προσέγγιση σάν μιά συνεχής χορδή, ὅταν πρόκειται γιά ταλαντώσεις μέ συχνότητες ω_h, ὅπου ὁ ἀκέραιος h εἶναι άρκετά μικρός ἤ ὅταν πρόκειται γιά ἐπαλληλία τέτοιων ταλαντώσεων. Πόσο μικρός πρέπει νά εἶναι ὁ h; Μιά ἔνδειξη μᾶς δίνει ἡ σχέση (3.30). Γιά νά ἀντικατασταθεῖ τό ἡμίτονο μέ τό τόξο μέ καλή προσέγγιση, πρέπει τό τόξο νά εἶναι πολύ μικρό, δηλ. $ha/L \ll 1$. Ἐπειδή $L/a \approx n$, συμπεραίνουμε ὅτι ἡ συνθήκη πού ζητᾶμε εἶναι ἡ

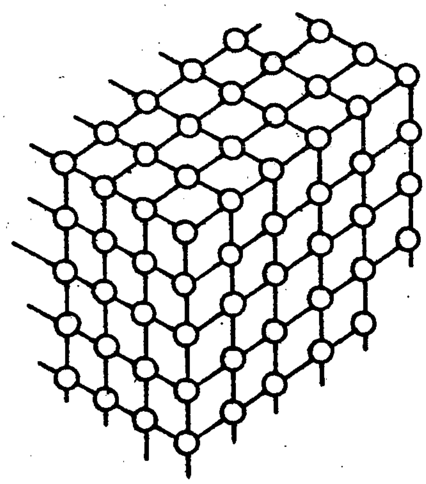
$$h \ll n \tag{3.32}$$

Παραδείγματος χάρη, ἕνα νῆμα μέ 100 ὅμοια σφαιρίδια σέ κανονικές ἀποστάσεις συμπεριφέρεται σάν ὁμογενής χορδή μέ καλή προσέγγιση ὅταν πρόκειται γιά ταλαντώσεις μέ τίς χαμηλές ἰδιοσυχνότητες π.χ. ω_1 καί ω_2 ἀλλά ὄχι μέ τοσο καλή προσέγγιση γιά ταλαντώσεις μέ συχνότητα ω_{40}.

Μέ ἀνάλογο τρόπο μποροῦμε νά μελετήσουμε τίς ἐγκάρσιες ταλαντώσεις μιᾶς μεμβράνης, ἀρχίζοντας ἀπό ἕνα διδιάστατο πλέγμα ἀπό διακεκριμένα ὑλικά σημεῖα, ὅπως δείχνει τό Σχ. 24α, πού μποροῦν νά ταλαντώνονται κάθετα πρός τό ἐπίπεδο τοῦ σχήματος καί συνδέονται μέ τά γειτονικά τους σημεῖα μέ ἐλατήρια ἤ κατάλληλα νήματα. Κατά παρόμοιο τρόπο ἕνα τριδιάστατο πλέγμα, ὅπως π.χ. τῶν ἀτόμων ἑνός κρυστάλλου (Σχ. 24β) συμπεριφέρεται γιά χαμηλές συχνότητες σάν ἕνα τριδιάστατο συνεχές ἐλαστικό μέσο.



(α)



(β)

Σχῆμα 24

Σάν ἕνα ἄλλο παράδειγμα μετάβασης στό συνεχές ὅριο παίρνουμε τό σύστημα τοῦ Σχ. 17. Στήν περίπτωση αὐτή τό ὅριο $a \to 0$ πρέπει νά παρθεῖ ἔτσι ὥστε οἱ λόγοι M/a καί k/M νά κρατηθοῦν σέ πεπερασμένες τιμές, π.χ.

$$M/a \longrightarrow \rho$$

$$k/M \longrightarrow \omega_0^2$$

Ἄν πάρουμε τό ὅριο αὐτό στή σχέση (3.12) (λαβαίνοντας ὑπόψη ὅτι $n+1 = L/a$, ὅπου L τό σταθερό ὁλικό μῆκος) βρίσκουμε τίς ἰδιοσυχνότητες

$$\omega_h = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\pi^2 T}{4\rho} h^2}, \qquad h = 1, 2, \ldots, \infty \tag{3.33}$$

Οἱ συχνότητες ἀποκοπῆς γίνονται $\Omega_1 = \omega_0$ καί $\Omega_2 = \infty$. Ἄρα τό συνεχές σύστημα λειτουργεῖ σάν φίλτρο: διαταράξεις μέ συχνότητα μικρότερη ἀπό ω_0 ἐξασθενοῦν ἐκθετικά μέ τήν ἀπόσταση ἀπό τό σημεῖο ὅπου ἐπιβάλλονται.

Ὅπως εἴδαμε ὑπάρχει πλήρης ἀντιστοιχία μεταξύ τοῦ κυκλώματος τοῦ Σχ. 22 καί τοῦ μηχανικοῦ συστήματος τοῦ Σχ. 17. Μποροῦμε λοιπόν νά θεωρήσουμε ἕνα ἀντίστοιχο ὅριο καί γιά τό κύκλωμα τοῦ Σχ. 22. Τό φυσικό σύστημα πού θά προκύψει θά εἶναι μιά γραμμή μεταφορᾶς ἐναλλασσομένου ρεύματος μέ συνεχή κατανομή αὐτεπαγωγῆς καί χωρητικότητας. Κατά μῆκος τῆς γραμμῆς αὐτῆς θά ἔχουμε ἐκθετική ἀπόσβεση τῶν συχνοτήτων πού εἶναι μικρότερες ἀπό τή συχνότητα ἀποκοπῆς $\omega_0 = 1/LC_0$.

§3.4 Τοπική Ἀλληλεπίδραση - Κύματα

Στίς προηγούμενες παραγράφους μελετήσαμε ταλαντώσεις σέ συστήματα μέ <u>τοπική ἀλληλεπίδραση</u>. Μέ τήν ἔκφραση αὐτή ἐννοοῦμε ὅτι τά στοιχεῖα πού ἀποτελοῦν τά συστήματα αὐτά (π.χ. ὑλικά σημεῖα, κλάδοι ἠλεκτρικῶν κυκλωμάτων κλπ.) ἀλληλεπιδροῦν ἄμεσα τό ἕνα πάνω στό ἄλλο μόνο ὅταν εἶναι γειτονικά. Ἡ διαίσθηση μᾶς ὑποδεικνύει ὅτι συστήματα μέ τοπική ἀλληλεπίδραση πρέπει νά ἔχουν τήν ἑξῆς ἰδιότητα: ἄν μιά ἐξωτερική δύναμη δράσει στιγμιαῖα πάνω σέ ἕνα μόνο στοιχεῖο ἤ σέ μιά ὁμάδα γειτονικῶν στοιχείων, θά χρειαστεῖ νά περάσει κάποιο (μή μηδενικό) χρονικό διάστημα προτοῦ ἐπηρεαστοῦν ἀπό τή διατάραξη ἀπομακρυσμένα μέρη τοῦ συστήματος. Μέ ἄλλα λόγια ἡ μετάδοση διαταράξεων ἀπό ἕνα σημεῖο στό ἄλλο δέν εἶναι ἀκαριαῖα. Ἡ πρόβλεψη αὐτή ἀποδεικνύεται οὐσιαστικά σωστή. Στό σύστημα τοῦ Σχ. 14 μπορεῖ νά δειχθεῖ ὅτι μιά διατάραξη ἑνός στοιχείου μεταδίδεται σέ ἄλλα στοιχεῖα ἀπομακρυσμένα ἀπό τό πρῶτο μέ ταχύτητα ὄχι μεγαλύτερη ἀπό τήν

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{3.34}$$

Ἐξαιροῦνται οἱ ἁρμονικές συνιστῶσες τῆς διατάραξης πού ἔχουν συχνότητα μεγαλύτερη ἀπό τή συχνότητα ἀποκοπῆς $\Omega_2 = 2\sqrt{T/Ma}$ (βλ. σχέση (3.13) γιά $K = 0$). Αὐτές μεταδίδονται μέν ἀκαριαῖα*, ἀλλά φθίνουν ἐκθετικά μέ τήν ἀπόσταση ἀπό τό σημεῖο διατάραξης, σύμφωνα μέ τή σχέση (3.26).

Στήν ὁριακή περίπτωση $a \to 0$, ἡ συχνότητα ἀποκοπῆς Ω_2 τείνει στό ἄπειρο. Ἄρα, στή συνεχή χορδή καμμιά ἀπολύτως διατάραξη δέν μπορεῖ νά μεταδοθεῖ μέ ταχύτητα μεγαλύτερη ἀπό $\sqrt{T/\rho}$. Ἄς σημειωθεῖ ὅτι ἡ ταχύτητα $v = \sqrt{T/\rho}$ εἶναι καί ἡ μόνη παράμετρος πού ὑπεισέρχεται στή διαφορική ἐξίσωση τῆς χορδῆς (3.29). Ἡ ἰδιότητα τῆς τοπικῆς ἀλληλεπίδρασης γιά τή χορδή εἶναι ἔκδηλη στήν ἐξίσωση (3.29) ἀφοῦ ἡ ἐξίσωση αὐτή συνδέει τήν $\psi(z,t)$ καί τίς παραγώγους της στό ἴδιο σημεῖο z.

Γιά διαταράξεις πού μεταδίδονται σέ συνεχή μέσα (ἤ σέ μέσα πού μποροῦν νά θεωροῦνται κατά προσέγγιση συνεχή, ὅπως εἴδαμε στήν §3.3) μέ τοπική ἀλληλεπίδραση, χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος κύματα ἤ κυματικά φαινόμενα. Ἡ μελέτη τέτοιων φαινομένων ἔχει ἐξαιρετική σπουδαιότητα, ἐπειδή οἱ

*Σημειῶστε ὅτι στή Νευτώνεια (δηλ. μή σχετικιστική) Μηχανική πού χρησιμοποιοῦμε, ὑποτίθεται ὅτι τά ἐλατήρια ἀνταποκρίνονται στή μεταβολή τοῦ μήκους τους μέ μιά δύναμη ἐπαναφορᾶς ἀκαριαῖα.

νόμοι πού διέπουν τά θεμελιώδη φυσικά φαινόμενα (ὅπως π.χ. οἱ ἐξισώσεις Maxwell γιά τόν ἠλεκτρομαγνητισμό), ἔχουν ὅλοι τήν ἰδιότητα τῆς τοπικῆς ἀλληλεπίδρασης.

§3.5 Φαινόμενα Συντονισμοῦ

Εἴδαμε ὅτι ἡ ἀπόκριση ἑνός συστήματος σέ μιά ἐξωτερική ἁρμονική διατάραξη ἐξαρτᾶται ἀπό τή συχνότητά της. Ὅταν ἡ συχνότητα αὐτή συμπέσει μέ μιά ἀπό τίς ἰδιοσυχνότητες τοῦ συστήματος τότε τό σύστημα ἀπορροφᾶ ἐνέργεια ἀπό τήν ἐξωτερική διατάραξη μέ ἰδιαίτερη ἀποτελεσματικότητα. Αὐτό εἶναι τό βασικό φαινόμενο συντονισμοῦ. Παραθέτουμε ἐδῶ μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα.

α) Παιδική Κούνια. Εἶναι ἐμπειρικά γνωστό ὅτι γιά νά αὐξήσουμε σχετικά γρήγορα τό πλάτος αἰωρήσεως μιᾶς κούνιας πρέπει νά δίνουμε ὠθήσεις στήν κατάλληλη φάση κινήσεως τῆς κούνιας, μιά φορά ἀνά περίοδο ἤ ἀνά δύο περιόδους ἤ ἀνά τρεῖς περιόδους κ.ο.κ. Μέ ἄλλα λόγια ἡ ἐξωτερική δύναμη πρέπει νά ἔχει θεμελιώδη συχνότητα $\omega = \omega_0$ ἤ $\omega_0/2$ ἤ $\omega_0/3$ κ.ο.κ., ὅπου ω_0 εἶναι ἡ ἰδιοσυχνότητα τῆς κούνιας. Πράγματι λοιπόν ἡ ἀπορρόφηση ἐνέργειας εἶναι εὐκολότερη, ὅταν ἡ ω ἤ μιά ἀπό τίς ἁρμονικές της συμπίπτει ("συντονίζεται") μέ τήν ἰδιοσυχνότητα ω_0 τῆς κούνιας.

β) Ραδιόφωνο. Γιά τήν ἐπιλογή ἑνός σταθμοῦ, ὁ χειριστής μεταβάλλει τήν ἰδιοσυχνότητα ἑνός κυκλώματος γιά νά τήν ἐξισώσει μέ ἐκείνη πού ἀντιστοιχεῖ στή φέρουσα συχνότητα τοῦ ἐπιθυμητοῦ σταθμοῦ.

γ) Συντονισμός στό Μπάνιο. Ὅταν τραγουδᾶμε σέ ἕνα μικρό κλειστό χῶρο, ὅπως π.χ. ἕνα δωμάτιο μπάνιου, ἔχουμε τήν ψευδαίσθηση ὅτι ἡ φωνή μας εἶναι πολύ δυνατή καί "πλούσια". Στήν πραγματικότητα αὐτό πού κάνουμε εἶναι νά προκαλοῦμε ταλαντώσεις μεγάλου πλάτους στόν ἀέρα τοῦ δωματίου λόγω συντονισμοῦ. Πράγματι, ὁ ἀέρας ἑνός δωματίου ταλαντοῦται σάν ἐλαστικό μέσο. Οἱ ἰδιοσυχνότητες γιά ἕνα δωμάτιο, διαστάσεων $a \times b \times c$, μέ τοιχώματα ἀνακλαστικά, δίνονται ἀπό τή σχέση

$$\nu_{n_1,n_2,n_3} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}} \qquad (3.35)$$

ὅπου (n_1,n_2,n_3) εἶναι ὁποιαδήποτε τριάδα ἀκεραίων ἐκτός ἀπό τήν (0,0,0), καί $v \cong 330$ m/s εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ ἤχου στόν ἀέρα (ὑπό κανονικές συνθῆκες).

– Μέ τούς συνηθισμένους τρόπους, ὅπως π.χ. μέ τό νά τραγουδήσουμε, διεγείρονται κυρίως (δηλ. μέ μεγαλύτερο πλάτος) κανονικές ταλαντώσεις πού ἀντιστοιχοῦν σέ μικρούς ἀκέραιους n_1,n_2,n_3. Γιά ἕνα μικρό δωμάτιο διαστάσεων $1m \times 1m \times 2.5$ m ἀπό τή σχέση (3.35) βρίσκουμε

$$\nu_{0,0,1} = 66 \text{ Hz}$$

$$\nu_{0,0,2} = 132 \text{ Hz}$$

$$\nu_{1,0,0} = \nu_{0,1,0} = 165 \text{ Hz}$$

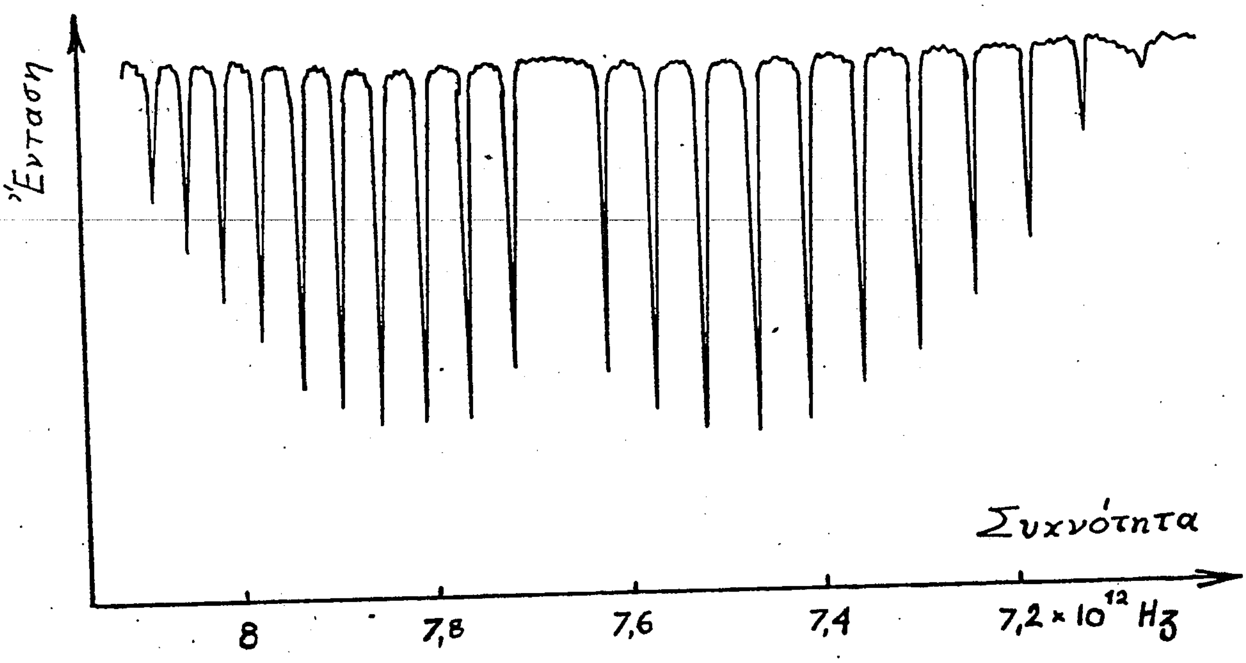
$$\nu_{1,0,1} = \nu_{0,1,1} = 178 \text{ Hz}$$

$$\nu_{0,0,3} = 198 \text{ Hz}$$

$$\nu_{1,1,0} = 233 \text{ Hz} \quad \text{κλπ.}$$

Οἱ συχνότητες αὐτές εἶναι ἀκουστές. Ἀντίθετα γιά ἕνα συνηθισμένο δωμάτιο διαστάσεων π.χ. $5m \times 5m \times 3m$ οἱ ἀντίστοιχες συχνότητες εἶναι, οἱ περισσότερες, τόσο χαμηλές ὥστε νά μήν εἶναι ἀκουστές.

δ) <u>Φάσματα Ἀπορροφήσεως καί Ἐκπομπῆς</u>. Ἄν καί ἡ ἐξήγηση τοῦ φαινομένου αὐτοῦ ξεπερνάει τά ὅρια ἰσχύος τῆς κλασικῆς Φυσικῆς, μποροῦμε, χωρίς νά ὑπεισέλθουμε στήν ἀκριβή κβαντική διατύπωση, νά τό περιγράψουμε ἁπλᾶ ὡς ἑξῆς: Τά ἄτομα ἤ τά μόρια ἑνός ἀερίου ἔχουν ὁρισμένες χαρακτηριστικές συχνότητες ταλαντώσεως. Γενικά, ἕνα ὁποιοδήποτε κβαντικό σύστημα, κατά τή μετάπτωσή του ἀπό μιά ἐνεργειακή στάθμη E_n σέ μιά ἄλλη E_m συμπεριφέρεται περίπου σάν ἕνα κλασικό σύστημα πού ταλαντώνεται μέ συχνότητα $\nu_{n,m} = (E_n - E_m)/h$, ὅπου $h \cong 6.6 \times 10^{-27}$ erg·sec εἶναι ἡ σταθερά τοῦ Planck. Οἱ συχνότητες αὐτές $\nu_{n,m}$ μποροῦν νά θεωρηθοῦν σάν οἱ χαρακτηριστικές συχνότητες τοῦ συστήματος ἀντίστοιχες μέ τίς ἰδιοσυχνότητες τῶν κλασικῶν συστημάτων πού μελετήσαμε. Ὅταν, λοιπόν, μέσα ἀπό ἕνα ὄγκο ἀερίου περάσει ἠλεκτρομαγνητική ἀκτινοβολία πού περιέχει ἕνα συνεχές φάσμα συχνοτήτων, τό ἀέριο ἀπορροφᾶ κατά προτίμηση τήν ἀκτινοβολία τῶν χαρακτηριστικῶν του συχνοτήτων. Τό Σχ. 25 παριστάνει σάν συνάρτηση τῆς συχνότητας τήν



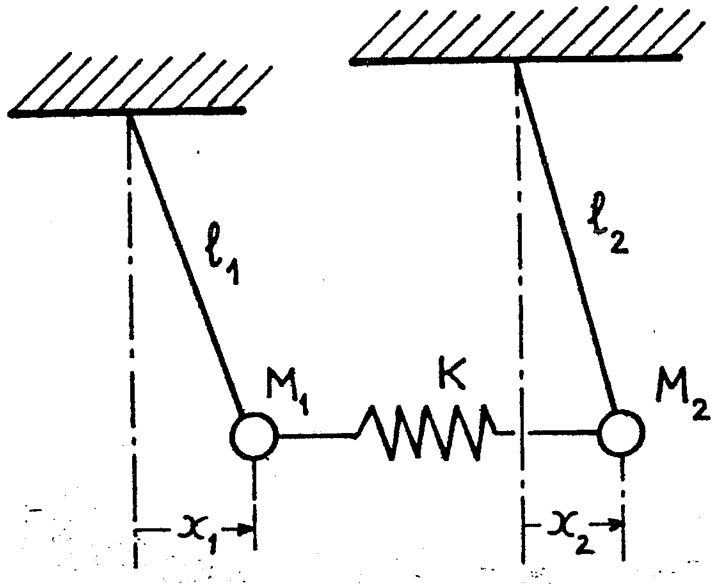
Σχ. 25

ἔνταση ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας πού ἔχει περάσει ἀπό άέριο HBr καί ἔχει ὑποστεῖ ἀπορρόφηση. Τά ἐλάχιστα ἐντάσεως καθορίζουν τίς χαρακτηριστικές συχνότητες τοῦ μορίου τοῦ HBr. Ἕνα τέτοιο φαινόμενο εἶναι καί οἱ μαῦρες γραμμές τοῦ ἡλιακοῦ φάσματος πού ὀφείλονται σέ ἀπορρόφηση ἀπό ἀέρια στήν ἐπιφάνεια τοῦ ἥλιου.

Ἐκτός ἀπό φάσματα ἀπορροφήσεως ὅπως τά παραπάνω, ἡ ὕπαρξη διακεκριμένων ἰδιοσυχνοτήτων στά ἄτομα καί μόρια δημιουργεῖ καί χαρακτηριστικά φάσματα ἐκπομπῆς: τά μόρια ἑνός ἀερίου διεγείρονται ἀπό τίς μεταξύ τους κρούσεις καί στή συνέχεια ἐκπέμπουν ἀκτινοβολία στίς χαρακτηριστικές τους συχνότητες. Πρόκειται δηλ. γιά φαινόμενο ἀντίστοιχο μέ τίς ἐλεύθερες ταλαντώσεις τῶν συστημάτων τῆς κλασικῆς (=προκβαντικῆς) Φυσικῆς πού μελετήσαμε. Στίς ἰδιότητες τῶν φασμάτων ἐκπομπῆς καί ἀπορροφήσεως βασίζεται ἡ τεχνική τῆς φασματοσκοπικῆς ἀναλύσεως.

Εἶναι ἐνδιαφέρον νά δοῦμε τό φαινόμενο συντονισμοῦ ὄχι μόνο ἀπό τή σκοπιά τῆς ἀπόκρισης ἑνός συστήματος S_1 σέ ἐξωτερικές διαταράξεις, ἀλλά σάν ἀποτέλεσμα τῆς σύζευξής του μέ ἕνα ἄλλο συγκεκριμένο σύστημα S_2. Ἄν, δηλαδή, μιά ἰδιοσυχνότητα ω_1 τοῦ S_1 εἶναι ἴση ἤ περίπου ἴση μέ μιά ἰδιοσυχνότητα ω_2 τοῦ S_2 τότε ἐνέργεια ὑπό τή μορφή ταλαντώσεων τῶν συχνοτήτων αὐτῶν θά πρέπει νά μεταφέρεται ἀπό τό ἕνα σύστημα στό ἄλλο μέ ἰδιαίτερη εὐκολία.

Ἕνα πολύ γνωστό παράδειγμα τοῦ παραπάνω φαινομένου εἶναι τό σύστημα δύο διαπασῶν πού εἶναι στερεωμένα πάνω στήν ἴδια βάση. Ἄν θέσουμε τό ἕνα ἀπό τά δύο σέ ταλάντωση (π.χ. μέ ἕνα χτύπημα) τότε παρατηροῦμε ὅτι ἡ ταλάντωση αὐτή θά μεταδοθεῖ αἰσθητά καί στό ἄλλο διαπασῶν μόνον ὅταν οἱ χαρακτηριστικές συχνότητες τῶν δύο διαπασῶν εἶναι περίπου ἴσες. Ἕνα ἁπλούστερο παράδειγμα τό ὁποῖο καί θά μελετήσουμε στή συνέχεια εἶναι τό σύστημα τῶν δύο ἐκκρεμῶν πού συνδέονται μεταξύ τους μέ ἕνα ἐλατήριο, ὅπως δείχνει τό Σχ. 26.



Σχῆμα 26

Ἄς ὀνομάσουμε x_1 καί x_2 τίς ὁριζόντιες μετατοπίσεις τῶν μαζῶν M_1 καί M_2 ἀπό τή θέση ἰσορροπίας, ℓ_1 καί ℓ_2 τά μήκη τῶν νημάτων καί K τή σταθερά τοῦ ἐλατηρίου. Οἱ διαφορικές ἐξισώσεις πού διέπουν τό σύστημα εἶναι

$$
\begin{aligned}
M_1\ddot{x}_1 &= -M_1\frac{g}{\ell_1}x_1 - K(x_1 - x_2)\\
M_2\ddot{x}_2 &= -M_2\frac{g}{\ell_2}x_2 - K(x_2 - x_1)
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Ἄν ἀφαιρούσαμε τό ἐλατήριο πού τά συνδέει, τά ἐκκρεμή θά εἶχαν τίς ἰδιοσυχνότητες

$$\omega_1 = \sqrt{g/\ell_1}$$

$$\omega_2 = \sqrt{g/\ell_2}$$

Ἐπομένως οἱ σχέσεις (3.36) γράφονται

$$\ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 - \frac{K}{M_1}(x_1 - x_2)$$
$$x_2 = -\omega_2^2 x_2 - \frac{K}{M_2}(x_2 - x_1) \qquad (3.37)$$

Ἀντικαθιστώντας στίς (3.37) τή μορφή μιᾶς κανονικῆς ταλάντωσης

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

βρίσκουμε τό σύστημα

$$\left(\omega^2 - \omega_1^2 - \frac{K}{M_1}\right) A_1 + \frac{K}{M_1} A_2 = 0$$
$$\frac{K}{M_2} A_1 + \left(\omega^2 - \omega_2^2 - \frac{K}{M_2}\right) A_2 = 0 \qquad (3.38)$$

Ἄς ὀνομάσουμε ω' καί ω'' τίς ἰδιοσυχνότητες τοῦ συστήματος. Οἱ ω' καί ω'' εἶναι οἱ θετικές ρίζες τῆς ἐξισώσεως πού προκύπτει ἄν θέσουμε ἴση μέ τό μηδέν τήν ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων τοῦ συστήματος (3.38).

$$\left(\omega^2 - \omega_1^2 - \frac{K}{M_1}\right)\left(\omega^2 - \omega_2^2 - \frac{K}{M_2}\right) - \frac{K^2}{M_1 M_2} = 0 \qquad (3.39)$$

Οἱ λόγοι πλατῶν A_1/A_2 πού ἀντιστοιχοῦν στίς ἰδιοσυχνότητες ω' καί ω'' προκύπτουν π.χ. ἀπό τή δεύτερη τῶν ἐξισώσεων τοῦ (3.38). Ἔτσι, βρίσκουμε τή γενική μορφή τῆς λύσεως:

$$x_1 = c'\left(\frac{-\omega'^2 + \omega_2^2 + K/M_2}{K/M_2}\right)\cos(\omega' t + \varphi') +$$

$$+ c''\left(\frac{-\omega''^2 + \omega_2^2 + K/M_2}{K/M_2}\right)\cos(\omega'' t + \varphi'')$$

$$x_2 = c'\cos(\omega' t + \varphi') + c''\cos(\omega'' t + \varphi'')$$

Ἀς ὑποθέσουμε ὅτι, ὅταν ξεκινᾶμε τό σύστημα τή χρονική στιγμή $t = 0$, ἡ μάζα M_2 ἔχει μηδενική μετατόπιση καί ταχύτητα δηλ. ἐνέργεια μηδέν, ἐνῶ ἡ μάζα M_1 ἔχει μετατόπιση A καί ταχύτητα μηδέν:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= A, \quad \dot{x}_1(0) = 0 \\ x_2(0) &= 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0 \end{aligned} \qquad (3.40)$$

Οἱ ἀρχικές αὐτές συνθῆκες καθορίζουν τίς σταθερές c', φ', c'' φ'' ἔτσι ὥστε ἡ γενική λύση γίνεται*

$$x_1 = A\,\frac{\left(-\omega'^2 + \omega_2^2 + \frac{K}{M_2}\right)\cos(\omega' t) + \left(-\omega''^2 + \omega_1^2 + \frac{K}{M_2}\right)\cos(\omega'' t)}{\sqrt{\left(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \frac{K}{M_1} - \frac{K}{M_2}\right)^2 + 4K^2/M_1M_2}} \qquad (3.41a)$$

$$x_2 = A\,\frac{K}{M_2}\,\frac{\cos(\omega' t) - \cos(\omega' t)}{\sqrt{\left(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \frac{K}{M_1} - \frac{K}{M_2}\right)^2 + 4K^2/M_1M_2}} \qquad (3.41b)$$

*Γιά νά μή γίνουν μακροσκελεῖς οἱ ἐκφράσεις γιά τά $x_1(t)$ καί $x_2(t)$, οἱ ἰδιοσυχνότητες ω'^2 καί ω''^2 δέν ἀντικαταστάθηκαν στίς (3.41) σάν συναρτήσεις τῶν $\omega_1^2, \omega_2^2, K/M_1$ καί K/M_2, ὅπως προκύπτουν ἀπό τή λύση τῆς ἐξισώσεως (3.39).

Μᾶς ἐνδιαφέρει μόνο ἡ περίπτωση πού ἡ σύζευξη μεταξύ ἐκκρεμῶν εἶναι ἀσθενής, δηλ. ἡ σταθερά τοῦ ἐλατηρίου εἶναι μικρή. Κι αὐτό γιατί μόνο τότε ἔχει ἔννοια νά μιλᾶμε γιά δύο διακεκριμένα ἐκκρεμή καί γιά μεταφορά ἐνέργειας ἀπό τό ἕνα στό ἄλλο. Ἡ σταθερά K πρέπει νά εἶναι ἀρκετά μικρή ὥστε ἡ δυναμική ἐνέργεια τοῦ ἐλατηρίου νά εἶναι πάντοτε ἕνα μικρό κλάσμα τῆς ὅλης ἐνέργειας τοῦ συστήματος. Πιό συγκεκριμένα, θά ὁρίσουμε τή συνθήκη <u>ἀσθενοῦς συζεύξεως</u> μέ τίς ἀνισότητες

$$\frac{K}{M_1}\,,\ \frac{K}{M_2} << \omega_1^2, \omega_2^2 \qquad (3.42)$$

Σημειώνουμε ὅτι στήν περίπτωση αὐτή οἱ ἰδιοσυχνότητες ω' καί ω'' τοῦ συστήματος δέν διαφέρουν πολύ ἀπό τίς ἰδιοσυχνότητες ω_1 καί ω_2 πού θά εἶχαν τά ἐκκρεμή γιά $K=0$. Πράγματι, εἶναι φανερό ἀπό τήν (3.39), ὅτι ἄν ἀμελούσαμε ὅρους τῆς τάξεως μεγέθους τῶν K/M_1 καί K/M_2, θά εἴχαμε

$$\begin{aligned} \omega'^2 &\cong \omega_1^2 \\ \omega''^2 &\cong \omega_2^2 \end{aligned} \qquad (3.43)$$

Θά ἐξετάσουμε πρῶτα τήν περίπτωση πού ἡ ω_1 διαφέρει σημαντικά ἀπό τήν ω_2 καί, πιό συγκεκριμένα, τήν περίπτωση ὅπου

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 >> \frac{K}{M_1}\,,\ \frac{K}{M_2} \qquad (3.44)$$

Ἔτσι, μποροῦμε νά θέσουμε $K=0$ στήν ὑπόρριζα ποσότητα τῆς σχέσης (3.41b), ὁπότε θά ἔχουμε, προσεγγιστικά,

$$x_2 \simeq A\,\frac{K/M_2}{|\omega_1^2 - \omega_2^2|}\left[\cos(\omega' t) - \cos(\omega'' t)\right] << A$$

Αὐτό σημαίνει ὅτι τό πλάτος αἰωρήσεως τοῦ δεύτερου ἐκκρεμοῦς παραμένει πάντοτε πολύ μικρότερο ἀπό τό πλάτος τοῦ πρώτου ἐκκρεμοῦς. Δέν ἐπιτυγχάνεται δηλ. ποτέ σημαντική μεταφορά ἐνέργειας ἀπό τό ἕνα ἐκκρεμές στό ἄλλο, ὅταν διαφέρουν σημαντικά οἱ ἰδιοσυχνότητές τους.

Ἀντίθετα, στήν περίπτωση πού ἡ διαφορά $\omega_1^2 - \omega_2^2$ εἶναι μικρή, δηλ. τῆς τάξεως μεγέθους τῶν K/M_1 καί K/M_2, τό ριζικό στήν (3.41b) εἶναι τῆς ἴδιας τάξης μεγέθους μέ τό λόγο K/M_2. Ἔτσι ἡ μετατόπιση x_2 γίνεται συγκρίσιμη, δηλ. ὄχι πολύ μικρότερη ἀπό τό πλάτος Α. Εἶναι φανερό ὅτι μόνο στήν περίπτωση αὐτή, δηλ. στήν περίπτωση συντονισμοῦ, ἀποκτᾶ τό πλάτος τοῦ δεύτερου ἐκκρεμοῦς μή ἀμελητέο μέγεθος.

Θά ἐξετάσουμε τώρα τή συμπεριφορά τοῦ συστήματος σέ συντονισμό, δίνοντας στή διαφορά $\omega_1^2 - \omega_2^2$ π.χ. τήν τιμή πού μεγιστοποιεῖ τό πλάτος τοῦ x_2. Ἡ τιμή αὐτή εἶναι ἐκείνη πού μηδενίζει τόν πρῶτο ὅρο κάτω ἀπό τό ριζικό στήν (3.41b), δηλ.

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = \frac{K}{M_2} - \frac{K}{M_1} \qquad (3.45)$$

Οἱ ἐκφράσεις (3.41a) καί (3.41b) ἁπλοποιοῦνται στήν περίπτωση αὐτή:

$$x_1 = A\,\frac{\cos(\omega' t) + \cos(\omega'' t)}{2}$$

$$x_2 = A\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\,\frac{\cos(\omega' t) - \cos(\omega'' t)}{2} \qquad (3.46)$$

ὅπου

$$\omega'^2 = \omega_1^2 + \frac{K}{M_1} - \frac{K}{\sqrt{M_1M_2}} \quad , \quad \omega''^2 = \omega_2^2 + \frac{K}{M_2} + \frac{K}{\sqrt{M_1M_2}} \qquad (3.47)$$

Οἱ τιμές αὐτές τῶν ω'^2 καί ω''^2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς (3.39) ὅταν ἰσχύει ἡ (3.45).

Κάνοντας χρήση τριγωνομετρικῶν ταυτοτήτων γράφουμε τίς σχέσεις (3.46) ὡς ἑξῆς:

$$x_1(t) = A\cos\left(\frac{\omega' - \omega''}{2}\,t\right)\cos\left(\frac{\omega' + \omega''}{2}\,t\right)$$

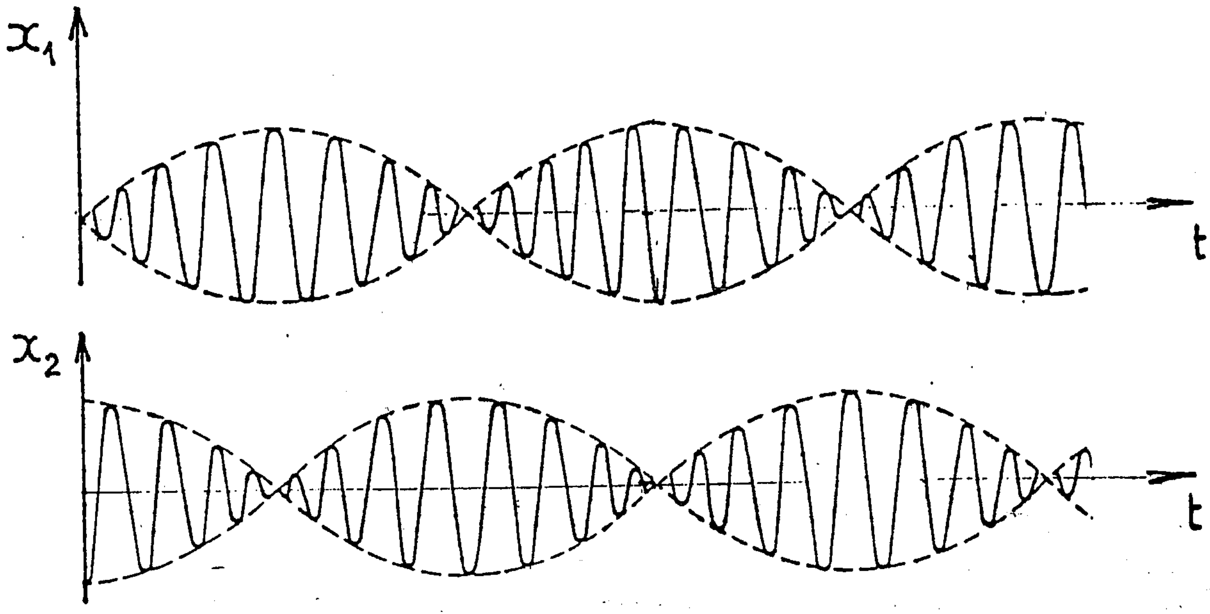
$$x_2(t) = A\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\,\sin\left(\frac{\omega'' - \omega'}{2}\,t\right)\cos\left(\frac{\omega' + \omega''}{2}\,t\right)$$

Τό Σχ. 27 παριστάνει τήν παραπάνω ἐξάρτηση τῶν x_1, x_2 ἀπό τό χρόνο t. Ὅπως προκύπτει ἀπό τίς (3.42) καί (3.47) ἡ διαφορά $\omega' - \omega''$ εἶναι πολύ μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα $\omega' + \omega''$. Ἔτσι τά μεγέθη

$$A\cos\left(\frac{\omega' - \omega''}{2}\,t\right) \qquad A\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\,\sin\left(\frac{\omega'' - \omega'}{2}\,t\right)$$

μποροῦν νά θεωρηθοῦν σάν "πλάτη αἰωρήσεως" τῶν ἐκκρεμῶν πού μεταβάλλονται ἀργά μέ τό χρόνο. (Ἀκολουθοῦν τίς περιβάλλουσες πού παριστάνονται μέ διακεκομμένη στό Σχ. 27.)

Βλέπουμε ἔτσι, πώς σέ περίπτωση συντονισμοῦ ἡ ἐνέργεια μεταφέρεται ἀπό τό ἕνα ἐκκρεμές στό ἄλλο καί τανάπαλι. Στήν παρόμοια περίπτωση τῶν δύο διαπασῶν σέ σύζευξη πού ἀναφέραμε παραπάνω, ἀκούγεται χαρακτηριστικά μιά αὐξομείωση τῆς ἔντασης τοῦ ἦχου. Γιά τό φαινόμενο αὐτό, ἀλλά καί γενικά γιά κάθε περίπτωση γραμμικῆς ὑπέρθεσης δύο ἁρμονικῶν μεγεθῶν μέ μικρή διαφορά συχνοτήτων, χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος <u>διακροτήματα</u>.



Σχῆμα 27

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

3.1 Ἐπαληθεῦστε τίς σχέσεις (3.7) καί (3.8) γιά $n=2$ κάνοντας παραβολή μέ τό παράδειγμα τοῦ ἐδαφίου 2.2.

3.2 Γιά τό σύστημα τοῦ Σχ. 14 ὑπολογίστε τίς μετατοπίσεις $\psi_\sigma(t)$ σάν συναρτήσεις τοῦ χρόνου γιά ἐλεύθερες ταλαντώσεις μέ τίς ἀρχικές συνθῆκες $\psi_\sigma(0)=\delta_{\sigma n}$, $\dot{\psi}_\sigma(0)=0$.

[Ὑπόδειξη: Χρησιμοποιῆστε τήν ταυτότητα
$$\sum_{\sigma=1}^{n} \sin(\sigma \frac{\pi h}{n+1}) \sin(\sigma \frac{\pi h'}{n+1}) = \frac{n}{2}\, \delta_{hh'}.]$$

3.3 Μελετῆστε τό σύστημα n μαζῶν τοῦ Σχ. 17 ὅταν τά ἄκρα του εἶναι ἐλεύθερα, δηλ. ὅταν τά ἐλατήρια ἀριστερά τῆς πρώτης καί δεξιά τῆς τελευταίας μάζας ἔχουν ἀφαιρεθεῖ. Ὑπολογίστε τίς ἰδιοσυχνότητες τοῦ συστήματος στήν περίπτωση αὐτή.

3.4 Μελετῆστε τό σύστημα τοῦ Σχ. 20, ὅπου ὅμως ἡ ἐξωτερική ἁρμονική δύναμη $f_0\cos\omega t$ ἐφαρμόζεται στή μεσαία μάζα (ὑποθέστε ὅτι ὁ n εἶναι περιττός). Βρεῖτε στήν περίπτωση αὐτή μιά ἔκφραση γιά τίς μετατοπίσεις ψ_σ ἀντίστοιχη τῆς (3.19). Δεῖξτε ὅτι, ὅταν ἡ συχνότητα ω εἶναι ἐκτός τοῦ διαστήματος (Ω_1,Ω_2), τό πλάτος τῆς ταλάντωσης φθίνει ἐκθετικά μέ τήν ἀπόσταση ἀπό τή μεσαία μάζα, βρεῖτε δηλ. μιά σχέση ἀντίστοιχη τῆς (3.26).

3.5 Βασισθεῖτε στό μοντέλο τοῦ Σχ. 24α γιά νά βρεῖτε τή διαφορική ἐξίσωση πού ἱκανοποιοῦν οἱ μικρές ἐγκάρσιες μετατοπίσεις $\psi(x,y,t)$ μιᾶς ὁμογενοῦς εὔκαμπτης μεμβράνης τῆς ὁποίας ἡ θέση ἰσορροπίας εἶναι τό ἐπίπεδο xy.

3.6 Στό παράδειγμα τῆς §2.2 πᾶρτε $M_1=M_2$, $\ell_1=\ell_2$ καί ὑποθέστε ὅτι τό μῆκος ℓ_2 εἶναι πολύ μεγαλύτερο ἀπό τά ℓ_1 καί ℓ_2.

Μελετῆστε τίς ἐλεύθερες ταλαντώσεις τοῦ συστήματος μέ ἀρχικές συνθῆκες $\psi_1(0) = A$, $\psi_2(0) = 0$, $\dot{\psi}_1(0) = \dot{\psi}_2(0) = 0$ καί ειδικά τή μεταφορά ἐνέργειας ἀπό τή μάζα M_1 στή M_2 καί τανάπαλι. Ἀμελῆστε τίς ἐπιμηκύνσεις τῶν ἐλατηρίων τά ὁποῖα ὑποθέστε ὅτι ἔχουν μιά κοινή τάση T.

3.7 Γράψτε μιά ἔκφραση γιά τίς μετατοπίσεις ψ_σ τῶν μαζῶν τοῦ συστήματος στό Σχ. 20, ὅταν πάνω στή n-στή μάζα ἐνεργήσει ἡ δύναμη (βλ. πρόβλημα 1.5)

$$F(t) = f\delta(t)$$

Τί μπορεῖτε νά συμπεράνετε γιά τήν (ἀσυμπτωτική) συμπεριφορά τοῦ $\psi_\sigma(t)$ ὅταν οἱ n καί σ εἶναι μεγάλοι ἀριθμοί;