

ΣΥΝΗΛΟΝΘΕ 0^ε 0,40

To standard $SU(2)_L \times U(1)$ μοντέλο

$$SU(2)_L \times U(1) \times SU(3)_c$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \equiv \ell_L^{(i)} \quad (2, -1, 1)$$

$$e_R, \mu_R, \tau_R \equiv \ell_R^{(i)} \quad (1, -2, 1)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \equiv Q_L^{(i)} \quad (2, 1/3, 3)$$

$$u_R, c_R, t_R \equiv U_R^{(i)} \quad (1, 4/3, 3)$$

$$d_R, s_R, b_R \equiv D_R^{(i)} \quad (1, -2/3, 3)$$

$$Q = \frac{T_3}{2} + \frac{Y}{2}$$

• Αρχή της Βαθμίδας (gauge)

Αναβαθμίζει ορισμένες συμμετρίες σε Γκαυγιανές που προσδιορίζεται από τις αντίστοιχες τοπιικές συμμετρίες.

π.χ. $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x)$

μετά μετατόπιση $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha} \psi(x)$

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}'(x) = e^{i\alpha} \bar{\Psi}(x)$$

δηλαδή $U(1)$ συμμετρία

Αυτή η συμμετρία γίνεται τοπική αν $\alpha \rightarrow \alpha(x)$

Απαιτώντας η θεωρία να είναι αναλλοίωτη

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)} \psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)} \bar{\psi}(x)$$

$$\rightarrow D_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$$

ελεύθερη παράμετρος που
την ταυτοποιούμε με το
ηλεκτρικό φορτίο

διαγνιστικός πεδίο
εξάρτηδας

$$\text{Αν } A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$$

$$\rightarrow D_\mu \psi(x) \rightarrow [D_\mu \psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)} D_\mu \psi(x)$$

$$\rightarrow \bar{\psi}(x) D_\mu \psi(x) \text{ αναλλοίωτο}$$

$$\text{Ετσι } \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi$$

- Για να κάνουμε το A_μ δυναμικό πεδίο που μπορεί να διαδίδεται προσδίδουμε αναλλοίωτους μετρήσιμους όρους

$$\rightarrow \mathcal{L} - \mathcal{L}' = \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}$$

$$\text{όπου } f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Q.E.D.

- Το φωτόνιο δεν έχει μάζα γιατί ο όρος $A_\mu A^\mu$ δεν είναι απαγορευτός (3)
- Όροι απαγορευτοί αλλά ανώτερης διάστασης π.χ. $\bar{\psi} \gamma_{\mu\nu} \psi F^{\mu\nu}$ απορρίπτονται από την απαίτηση παρανομοιοποίησης.
- Η $\mathcal{L}'$ δεν περιέχει όρους αυτοαλληλεπίδρασης του πεδίου βαθμίδας γιατί το φωτόνιο δεν έχει φορτίο.

π.χ.2 $\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x)$

όπου $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in SU(2)$

$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp \left\{ -i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}}{2} \right\} \psi(x)$ ολική συμμ.

με $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ να ικανοποιούν $\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2} \right] = i \epsilon_{ijk} \frac{\tau_k}{2}$
 $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ - $SU(2)$ παράμετροι $i, j, k = 1, 2, 3$
 ανεξάρτητοι χωροχρον

Η συμμετρία γίνεται τοπική

$\vec{\theta} \rightarrow \vec{\theta}(x)$

Απαιτώντας η θεωρία να είναι αναλλοίωτη

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(\theta) \psi(x)$$

$$\text{με } U(\theta) = \exp \left\{ \frac{-i \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}(x)}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - ig \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu}{2}$$

$$\text{Αν } \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu}{2} \rightarrow \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{A}'_\mu}{2} = U(\theta) \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu}{2} U^{-1}(\theta) - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\theta)] U^{-1}(\theta)$$

που για απειροστές αλλαγές $\theta^i(x) \ll 1$

$$U(\theta) \simeq 1 - i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}(x)}{2} \quad \text{ισοδυναμεί με}$$

$$A_\mu^i \rightarrow A_\mu^{i'} = A_\mu^i + \epsilon^{ijk} \theta^j A_\mu^k - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^i$$

$$\Rightarrow D_\mu \psi \rightarrow (D_\mu \psi)' = U(\theta) D_\mu \psi$$

$$\Rightarrow \bar{\psi}(x) D_\mu \psi(x) \text{ αναλλοίωτο}$$

Προβδένουμε αναλλοίωτους κινητικούς όρους

$$\Rightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} + \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi$$

$$\text{όπου } F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g \epsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k$$

$$\bullet \text{ Ο όρος } -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} \text{ περιέχει}$$

$$-g \epsilon_{ijk} \partial_\mu A_\nu^i A^{j\mu} A^{k\nu} - g^2/4 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ile} A_\mu^j A_\nu^k A^{le} A^{\mu e}$$

$$\bullet \text{ Η σταθερά σύδεσης } g \rightarrow \lambda g \text{ (σε αντίθεση με την } e \text{)}$$

Μη αβελιανές τοπικές συμμετρίες
(γενόμενα)

Εστω G κάποια απλή ομάδα με
γεννήτορες που ικανοποιούν την αλγεβρα

$$[F^a, F^b] = i \epsilon^{abc} F^c, \quad \epsilon^{abc} \text{ - ορισμένα} \\ \text{αντίε. σταθερά} \\ \text{δوران}$$

και ψ ανήκει σε κάποια αναπαράσταση
με πίνακες αναπαράστασης T^a .

$$\partial_\mu \psi \rightarrow D_\mu \psi = (\partial_\mu - i g T^a A_\mu^a) \psi$$

$$\text{και } F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$\rightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \bar{\psi} (i \gamma^\mu D_\mu - m) \psi$$

Η $\mathcal{L}$ είναι αναλλοίωτη υπό

$$\psi \rightarrow \psi'(x) = U(\vec{T} \cdot \vec{\theta}(x)) \psi(x) \equiv U(\theta_x) \psi(x)$$

$$\vec{T} \cdot \vec{A}_\mu(x) \rightarrow \vec{T} \cdot \vec{A}'_\mu(x) = U(\theta_x) \vec{T} \cdot \vec{A}_\mu U^{-1}(\theta_x) \\ - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\theta_x)] U^{-1}(\theta_x)$$

που κατά από απεριόστες μεταβολές
γίνονται

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x) - i T^a \theta^a(x) \psi(x)$$

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu'^a(x) = A_\mu^a(x) + \epsilon^{abc} \theta^b(x) A_\mu^c(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a(x)$$

Q.C.D. ($G = SU(3)$, ψ - τριπλέτα)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \sum_k^{n_f} \bar{q}_k (i \gamma^\mu D_\mu - m_k) q_k$$

$$F_{\mu\nu}^a = \epsilon_{\mu\nu} A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - i g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$D_\mu q_k = (\partial_\mu - i g A_\mu) q_k \quad \text{quark με 3 χρώματα!}$$

$$A_\mu = \sum_{a=1}^8 A_\mu^a \lambda^a / 2 \quad \text{γινόμενο}$$

όπου λ^a είναι οι πίνακες Gell-Mann

$$\text{με } \left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = i f^{abc} \frac{\lambda^c}{2}, \quad \left(\begin{array}{l} \text{τα } \lambda^a, f^{abc} \\ \text{δίνονται στο} \\ \text{βιβλίο 97,98} \end{array} \right)$$

$$\text{tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2 \delta^{ab}$$

$k = 1, 2, \dots, n_f$ (reversis! quarks) $\delta\text{-π. } q_k: u, d, s, c, b, t, \dots$

Μη - αβελιανές (οριζές) συμμετρίες

Ας θεωρήσουμε μία ομάδα Lie με γενήτορες T^i , $i = 1, 2, 3, \dots, N$

Οι σταθερές δομής C_{ijk} τού G ορίζονται

$$\text{από} \quad [T^i, T^j] = i C_{ijk} T^k$$

με άθροιση των $k = 1, \dots, N$

Ενα σύνολο πινάκων L^i που ικανοποιούν τις ίδιες σχέσεις μεταθετιμότητας

$$[L^i, L^j] = i C_{ijk} L^k$$

με τους γενήτορες αποτελούν μία αναπαράσταση τού G . Είναι χρήσιμο να ορίσουμε και να ικανοποιήσουμε τους γενήτορες έτσι που

$$\text{Tr}(L^i L^j) = T(L) \delta_{ij}$$

με $T(L) = \frac{1}{2}$ για τη χαμηλότερη αναπρ.

$\Rightarrow C_{ijk}$ - αντισυμ. σε όλους τους δείκτες

Ένα τυχαίο στοιχείο του G προσδιορίζεται από N συνεχείς παραμέτρους

$$\vec{\theta} = (\theta^1, \dots, \theta^N)$$

Τότε ένα τυχαίο στοιχείο του G είναι

$$U_G(\vec{\theta}) = \exp\left(i \sum_{i=1}^N \theta^i T^i\right) = \exp(i \vec{\theta} \cdot \vec{T})$$

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα από n πεδία $\Phi_a(x)$, $a=1, \dots, n$

(φερμιόνια γ μποσόνια)

που μετασχηματίζονται σύμφωνα με τους $n \times n$ πίνακες αναπαράστασης L^i

Αυτό σημαίνει ότι

$$[T^i, \Phi_a(x)] = -L^i_{ab} \Phi_b(x)$$

Κάτω από το μετασχηματισμό ομάδας

$$\begin{aligned} \Phi_a(x) &\rightarrow \Phi'_a(x) \equiv U_G(\vec{\theta}) \Phi_a(x) U_G(\vec{\theta})^{-1} \\ &= \Phi_a + i [\vec{\theta} \cdot \vec{T}, \Phi_a] + \frac{i^2}{2!} [\vec{\theta} \cdot \vec{T}, [\vec{\theta} \cdot \vec{T}, \Phi_a]] \\ &\quad + \dots + \underbrace{\frac{i^k}{k!} [\vec{\theta} \cdot \vec{T}, [\dots [\vec{\theta} \cdot \vec{T}, \Phi_a]]]}_k + \dots \end{aligned}$$

Επομένως κάτω από έναν απειροστό μετασχηματισμό

$$\Phi_a(x) \rightarrow \Phi_a - i (\vec{\theta} \cdot \vec{L})_{ab} \Phi_b + O(\theta^2)$$

ήδη για πεπερασμένο μετασχηματισμό

$$\Phi_a(x) \rightarrow (e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{L}})_{ab} \Phi_b(x) \equiv U(\vec{\theta})_{ab} \Phi_b(x)$$

Αν τα Φ_a (μποζόνια ή φερμιόνια) είναι μηαδικά τότε οι πίνακες

αναπαράστασης εξαρτώνται (είναι reducible,

σε 2 $n/2 \times n/2$ τμήματα, με $n/2$

πεδία μετασχηματισμένα σύμφωνα με

$$[T^i, \Phi_a] = -L_{ab}^i \Phi_b, \quad (a, b) \in 1, \dots, n/2$$

και τα Hermitian συζυγή $\Phi_a^\dagger$ μετα-

σχηματισμένα σαν

$$[T^i, \Phi_a^\dagger] = +L_{ab}^{i*} \Phi_b^\dagger = -(-L_{ab}^{iT}) \Phi_b^\dagger$$

όπου T^i, L^i Hermitian.

Αν η Παρονομαστική είναι αναρίσκη-
μάτω από $\Phi_a \rightarrow \Phi_a'$ τότε σύμφωνα

με το θεώρημα Noether υπάρχουν

N διατηρούμενα ρεύματα J_μ^i συσχε-

τιζόμενα με τους γενήτορες:

$$J_\mu^i = -i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial^\mu \Phi_a} L_{ab}^i \Phi_b$$

Τα συσχετισμένα φορτία

$$T^i \equiv \int d^3x \mathcal{T}_0^i(x)$$

είναι οι γενήτορες της ομάδας.

Εάν G είναι μία αβελής συμμετρία τότε τα ρεύματα Noether $\mathcal{T}_\mu^i$ διατηρούνται και τα φορτία T^i είναι σταθερές. Επομένως τα T^i μπορούν να αναπαραστήσουν ένα διατηρούμενο κβαντικό αριθμό αν η συμμετρία δεν είναι αδόμητη σπασμένη. Μόνο οι γενήτορες που μπορούν να διαγωνιστοποιηθούν ταυτόχρονα αντιστοιχούν σε κβαντικούς αριθμούς. Ο μέγιστος αριθμός γενητόρων που μετατίθενται (και έτσι μπορούν να διαγωνιστοποιηθούν ταυτόχρονα) δίνεται από τον $\dim G$.

Τοπικές συμμετρίες

Εάν οι συμμετρίες

$$\Phi_a(x) \rightarrow (e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{L}})_{ab} \Phi_b(x)$$

επιταθούν έτσι που να επιτρέπουν ανεξάρτητους μετασχηματισμούς σε διαφορετικά χωροχρονικά σημεία οι συμμετρίες γίνονται τοπικές

$$\Phi_a(x) \rightarrow (e^{-i\vec{\theta}(x) \cdot \vec{L}})_{ab} \Phi_b(x) = U(\vec{\theta}(x))_{ab} \Phi_b(x)$$

με $\vec{\theta}(x)$ τυχαία διαφρρίσιμη συνάρτηση του x .