

Ο Φορμαζισμός Lagrange - Hamilton

- Κλασική Μηχανική Σωματιδίου
- Νευτώνια αντιμετώπιση

Οι εξισώσεις κίνησης εισάγονται
αξιοματικά και εμπνέουν δυνάμεις
ως ουσιώδη συστατικά προερχόμενα από
φυσική $\leadsto$ υποφορμαζισμός τροχιών

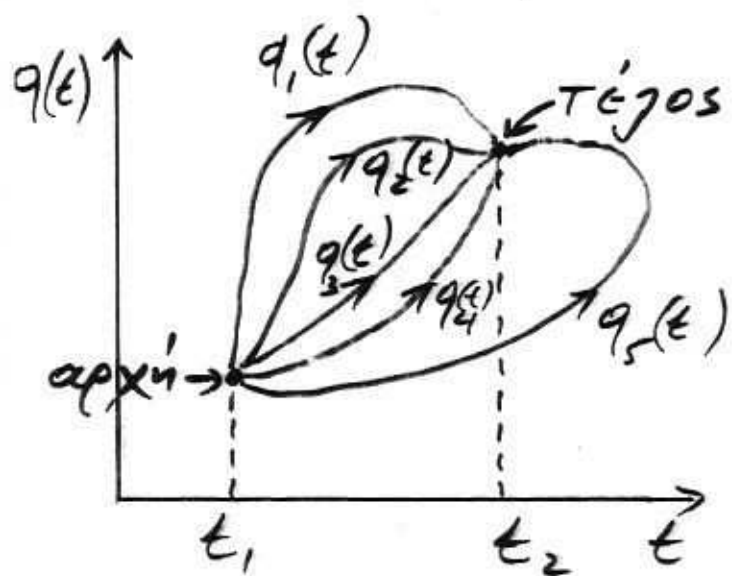
- Απουσία Ελάχιστης Δράσης

Οι εξ. κίνησης δεν εισάγονται αξιομα-
τικά ενώ τα πρωτεία των δυνάμεων απο-
δίδονται τώρα στα δυναμικά. Η τροχιά
που θα αντιστοιχίσει ένα σωματίδιο προ-
έρχεται από το αξίωμα (αρκεί) ότι

από την ποικιλία των δυνατοτήτων που έχει να επιλέξει εκείνη για την οποία μια ποσότητα που μέχεται δράση θα γίνει ελάχιστη. Η δράση S ορίζεται

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt, \quad (1)$$

όπου $q(t)$ η θέση του σωματιδίου και $\dot{q}(t) = dq/dt$ η ταχύτητα του, ενώ η οπουδήποτε συνάρτηση L είναι η Λαγκρανζιανή.



Για όλες τις δυνατές τροχιές $q_i(t)$ στο διάγραμμα $q(t) - t$ υπολογίζουμε το S .

Η πραγματική τροχιά είναι εκείνη για την οποία η S είναι ελάχιστη.

Αλλά τι είναι η L ; Για απλές περιπτώσεις είναι απλά $T - V$, δηλ η διαφορά μεταξύ κινητικής και δυναμικής ενέργειας π.χ. για σωματίδιο σε δυναμικό V

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \quad (2)$$

Αν μας δοθεί το V μπορούμε να υπολογίσουμε την S για διάφορες φανταστικές τροχιές, δηλ. για εκείνες που γράφουμε ότι δεν ακολουθεί το σωματίδιο στη Νευτώνια Μηχ., και να πεινάσουμε ότι η Νευτώνια είναι εκείνη που ελαχιστοποιεί την S .

Ασκηση: Θεωρείστε 1-διάστατη κίνηση στο βαρυτικό δυναμικό $V(x) = -mgx$. Βρείτε την S

για $t_1 = 0$, $t_2 = t_0$ για τις τροχιές: 1) $x(t) = at$,
2) $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ Νευτώνια. 3) $x(t) = bt^3$

Εξισώσεις Euler-Lagrange

Προφανώς ο παραπάνω δεν είναι πραγματικός τρόπος...

Θεωρούμε μια μικρή αλλαγή $\delta q(t)$ στην τροχιά από το $q(t_1)$ στο $q(t_2)$. Στο ελάχιστο η αλλαγή δS που αντιστοιχεί σε μία αλλαγή δq πρέπει να μηδενίζεται. Αυτή η αλλαγή στην S είναι

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q}(t) \right) dt \quad (4)$$

Επειδή $\delta \dot{q}(t) = d(\delta q(t))/dt$ και ομαδοποιώντας τον 2ο όρο κατά παράγοντες

$$\begin{aligned} \rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta q(t) \left[\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right] dt \\ + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned} \quad (5)$$

Επειδή θεωρούμε αλλαγές τροχιάς που αρχίζουν στο t_1 και τελειώνουν στο t_2 έχουμε ότι $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$

$$\rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta q(t) \left[\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right] dt = 0 \quad (6)$$

Επειδή η (6) πρέπει να ισχύει για οποιοδήποτε $\delta q(t)$ πρέπει να έχουμε

$$\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} = 0 \quad || \quad (7)$$

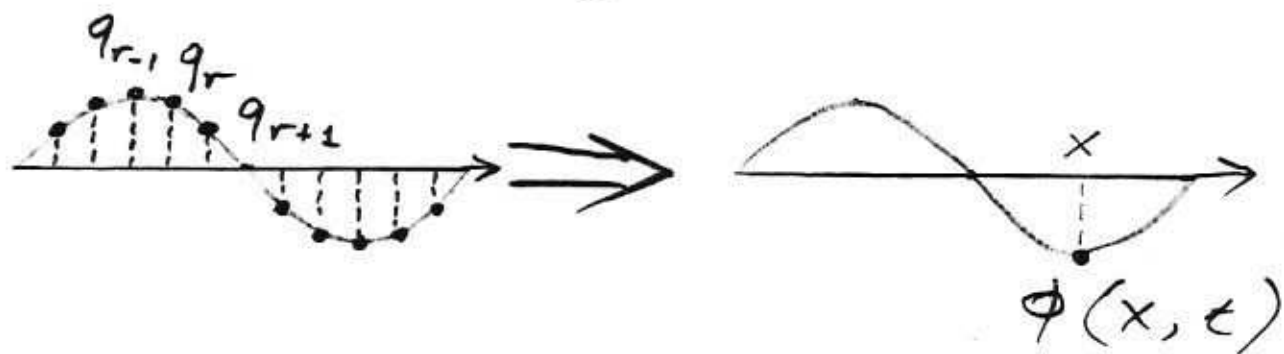
Αυτή είναι η περίφημη εξίσωση κίνησης Euler - Lagrange. Η λύση της δίνει την $q_0(t)$ την οποία πραγματικά ακολουθεί το σωματίδιο.

π.χ. Για $L = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 - V(x)$

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} = p, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F$$

• • Κλασική Μηχανική Πεδίων

Ας θυμηθούμε το πέρασμα από N μάζες που συνδέονται με ελατήρια στο συνεχές όριο της χορδής.



$$\{q_r(t), r=1, 2, \dots, N\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \phi(x, t) \quad (8)$$

Στο συνεχές έχουμε

$$S = \int dt L \quad (9)$$

$$\text{όπου } L = \int dx \mathcal{L} \quad (10)$$

Η (8) μας υποδεικνύει ότι το ϕ έχει διάσταση (μήκος) $\leadsto$ το $\mathcal{L}$ έχει

διαστάσεις ενέργειας/μήκος και γενικά ενέργειας/όγκο.

(7)
Ένα νέο χαρακτηριστικό εμφανίζεται

δεδομένου ότι το ϕ είναι συνεχώς συνάρτη

ση του x : η $\mathcal{L}$ μπορεί να εξαρτάται

και από την $\partial\phi/\partial x$ επιπλέον των ϕ ,

$\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$, δηλ $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial\phi/\partial x, \dot{\phi})$

Όπως πριν θέτουμε αξιωματικά την ιδι

θεμελιώδη αρχή $\delta S = 0$ με την έννοια

ότι η δυναμική του πεδίου ϕ καθορίζεται

από την ελαχιστοποίηση της S .

$$\delta S = \int dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial\phi/\partial x)} \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right] dx \quad (11)$$

Οργανώνοντας το $\delta\phi$ κατά παράγοντες

στο t και το $\delta(\partial\phi/\partial x)$ το ίδιο στο x

(8)

και αμεγνύντας τους "επιφανειακούς" όρους

$$\rightarrow \delta S = \int dt \int dx \delta \phi \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial x)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) \right] \quad (12)$$

και η απαίτηση $\delta S = 0$ μας δίνει τις

εξισώσεις πεδίου Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial x)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \quad (13)$$

π.χ. θεωρείστε την $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$

όπου ρ - πυκνότητα, v - ταχύτητα

$$(13) \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

δηλ. η εξίσωση κύματος (άδυναμη)

Η γενίκευση της (13) στις 3 διαστάσεις

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \phi} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \quad (14)$$

Για τα σχετιστικώς πεδία η $E-L$ γράφεται άμεσα σε σχετιστικώς αναλλοίωτη μορφή

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (15)$$

Επίσης η δράση

$$S = \int dt \int d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L} \quad (16)$$

είναι σχετιστικώς αναλλοίωτη επειδή ο d^4x είναι αναλλοίωτος. Επομένως για να κατασκευάσουμε μία σχετιστική θεωρία πεδίου πρέπει να κατασκευάσουμε μία αναλλοίωτη πυκνότητα $\mathcal{L}$ και να χρησιμοποιήσουμε τη (15).

π.χ. Η προηγούμενη $\mathcal{L}$ για τη χορδή γίνεται

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) \cdot (\partial^\mu \phi), \quad \rho = v = 1 \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0$$

Θεώρημα Noether

Θεωρούμε σύστημα που περιγράφεται από

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)) \quad (1)$$

και έχει εξίσωση κίνησης

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0 \quad (2)$$

Κάθε συνεχής μετασχηματισμός που αφήνει αναλλοίωτη τη δράση

$$S = \int L dt \quad (3)$$

συνεπάγεται ύπαρξη διατηρούμενου ρεύματος

$$\partial^\mu J_\mu(x) = 0 \quad (4)$$

Απόδειξη (για συνεχή εσωτερική συμμετρία
μη Αβελιανή)

Εστω ότι χ $\mathcal{L}$ είναι αναλλοίωτη
κάτω από κάποια ομάδα συμμετ-
ρίας G , δηλ. κάτω από μετασχημα-
τισμούς (απειροστούς):

$$\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x) = \phi_i(x) + \delta \phi_i(x) \quad (5)$$

όπου

$$\delta \phi_i(x) = i \epsilon^a t^a_{ij} \phi_j(x) \quad (6)$$

ϵ^a - χωροχρονικά ανεξάρτητες
μικρές παράμετροι

t^a - ονορο πίνακων που ικανοποιούν
τη σχέση Lie της ομάδας G

$$[t^a, t^b] = i C^{abc} t^c$$

όπου C^{abc} - σταθερές δομής του G .

Η αντίστοιχη αλλαγή στην $\mathcal{L}$ είναι

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta (\partial_\mu \phi_i) \quad (1)$$

επειδή $\delta (\partial_\mu \phi_i) = \partial_\mu \phi'_i - \partial_\mu \phi_i = \partial_\mu (\delta \phi_i)$ (8)

(2), (8) $\Rightarrow \delta \mathcal{L} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu (\delta \phi_i)$

$$= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right]$$

$$\stackrel{(6)}{=} \epsilon^a \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} i \epsilon^a_{ij} \phi_j \right] \quad (9)$$

Συνεπώς αν $\delta \mathcal{L} = 0$

$$\longrightarrow \partial_\mu J_\mu^a = 0 \quad (10)$$

όπου $J_\mu^a = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \epsilon^a_{ij} \phi_j$ (11)

Αν ορίσουμε ως φορτίο

$$Q(t) \equiv \int d^3x T_0(x) \quad (12)$$

$$\leadsto \frac{dQ}{dt} = 0 \quad \text{δηλ. είναι σταθερά κίνησης}$$

(δεδομένου ότι ένας επιφανειακός όρος στο άπειρο θεωρείται μηδέν

$$\int d^3x \partial_0 T_0 \rightarrow \int d^3x \partial^\mu T_\mu = 0)$$

Στη περίπτωση του αριστούτου κατά από συνεχή εσωτερική ομάδα συμμετρίας Lie, τα διατηρούμενα φορτία:

$$Q^a = \int d^3x T_0^a(x) \quad (13)$$

είναι γεννήτορες της ομάδας συμμετρίας

Ρωσική: Το αναλλοίωτο της $\mathcal{L}$ σε μετασχηματισμούς $\chi^\mu \rightarrow \chi'^\mu = \chi^\mu + \alpha^\mu \leadsto$ διατήρηση ενέργειας και ορμής.

Ασκήσεις - παραδείγματα αναλλοίωτου της $\mathcal{L}$ κάτω από εσωτερικούς μετασχηματισμούς.

• Η $\mathcal{L}$ για δύο ελεύθερα, πραγματικά πεδία ϕ_1, ϕ_2 με ίδια μάζα

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - \frac{1}{2} m^2 \phi_1^2 \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_2^2 \end{aligned} \quad (14)$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} \phi_1' &= \cos \alpha \phi_1 - \sin \alpha \phi_2 \\ \phi_2' &= \sin \alpha \phi_1 + \cos \alpha \phi_2 \end{aligned} \quad (15)$$

Με αυτή αντιστάθιση

$$\mathcal{L}(\phi_1', \phi_2') = \mathcal{L}(\phi_1, \phi_2) \quad (16)$$

δηλ. έχει συμμετρία $SO(2)$.

Ας δώμε ποιάς νόμος διατήρησης
συσχετίζεται με αυτή τη συμμετρία.

Είναι απλούστερο (και αρμετό) να
θεωρήσουμε απειροστική στρόφη ϵ

$$\begin{aligned} (15) \quad \underbrace{\quad}_{\rightarrow} \quad \phi_1' &= \phi_1 - \epsilon \phi_2 \\ \phi_2' &= \epsilon \phi_1 + \phi_2 \end{aligned} \quad (17)$$

Κάτω από τον (16) η $\mathcal{L}$ είναι αναλλοίωτη
και συνεπώς $\delta \mathcal{L} = 0$. Αλλά η $\mathcal{L}$
εξαρτάται ρητά από τα $\phi_1, \phi_2, \partial_\mu \phi_1, \partial_\mu \phi_2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 = \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} \delta(\partial_\mu \phi_1) \\ &+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_2)} \delta(\partial_\mu \phi_2) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_1} \delta \phi_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_2} \delta \phi_2 \end{aligned} \quad (18)$$

Σημειώνουμε ότι οι πράξεις είναι αντί-
στοιχες με εκείνες που οδήγησαν στις $\{E-L$

αλλά τονίζουμε ότι οι αλλαγές $\delta\phi_{1,2}$
 δεν έχουν σχέση με χωροχρονικές τομές
 αλλά αναμιγνύουν τα δύο πεδία.

Παρόλα αυτά μπορούμε να χρησιμοποιή-
 σουμε τις εξ. κινήσεως (βλ. αδειώσεις)

$$\begin{aligned}
 (15) \quad \Rightarrow 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} \delta(\partial_\mu \phi_1) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_2)} \delta(\partial_\mu \phi_2) \\
 &\quad + \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} \right) \right] \delta\phi_1 + \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_2)} \right) \right] \delta\phi_2 \\
 &= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} \delta\phi_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_2)} \delta\phi_2 \right] \quad (19)
 \end{aligned}$$

Τα παραπάνω βήματα είναι τεχνίως
 γενικά και εφαρμόζονται σε κάθε περί-
 τωση που μία $\mathcal{L}$ εξαρτάται από δύο
 πεδία ϕ_1, ϕ_2 είναι αναλλοίωτη κάτω από

$\phi_i \rightarrow \phi_i + \delta \phi_i$. Στην προκειμένη περίπτωση
 6η από την (16) έχουμε

$$\delta \phi_1 \equiv \phi'_1 - \phi_1 = -\epsilon \phi_2 \quad (20)$$

$$\delta \phi_2 \equiv \phi'_2 - \phi_2 = \epsilon \phi_1$$

$$\begin{aligned} \leadsto 0 &= \partial_\mu \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_1)} \epsilon \phi_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_2)} \epsilon \phi_1 \right] \\ &\stackrel{(14)}{=} \epsilon \partial_\mu \underbrace{\left[(\partial^\mu \phi_2) \phi_1 - (\partial^\mu \phi_1) \phi_2 \right]}_{j^\mu} \quad (21) \end{aligned}$$

επειδή το ϵ είναι αυθαίρετο

$$\leadsto \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (22)$$

Εισάγοντας ένα μιγαδικό πεδίο

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i \phi_2) \quad (23)$$

$$\phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i \phi_2)$$

$$\eta (14) \leadsto \mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (24)$$

.. Η $\mathcal{L}$ για ελεύθερο σωματίδιο
Dirac με μάζα m (βλ. άνωθεν)

$$\mathcal{L} = i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \quad (25)$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό φάσης

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \Psi(x), \quad (26)$$

όπου α πραγματική σταθερά.

Το αναλλοίωτο προκύπτει εύκολα παρατηρώντας ότι

$$\partial_\mu \Psi \rightarrow e^{i\alpha} \partial_\mu \Psi \quad (27)$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow e^{-i\alpha} \bar{\Psi} \quad (28)$$

Το σύνολο των μετασχηματισμών φάσης
 $U(\alpha) \equiv e^{i\alpha}$, όπου η παράμετρος α πραγματική και συνεχής, αποτελεί μια μονοδιάστατη

Αβελιανή ομάδα γνωστή ως ομάδα $U(1)$
 Ο όρος Αβελιανή αναφέρεται στην ιδιο-
 τητα ότι η δράση της ομάδας είναι μεταθετική

$$U(\alpha_1) U(\alpha_2) = U(\alpha_2) U(\alpha_1) \quad (29)$$

Ας δούμε ποιός νόμος διατήρησης συσχετι-
 ζεται με αυτή, την τετριμμένη από πρώτη
 άποψη, συμμετρία. Είναι ομοιότοπα μελετή-
 σουμε το αναλλοίωτο της $\mathcal{L}$ κάτω από ένα
 στοιχειώδη μετασχηματισμό $U(1)$

$$\psi \rightarrow (1 + i\alpha) \psi \quad (30)$$

$$\begin{aligned} 0 = \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta (\partial_\mu \psi) \\ &+ \delta \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} + \delta (\partial_\mu \bar{\psi}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} (i\alpha \psi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} (i\alpha \partial_\mu \psi) + \dots \end{aligned}$$

$$= i\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) \right] \psi \stackrel{E-L}{=} 0$$

$$+ i\alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \psi \right) + \dots \quad (31)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0, \quad (32)$$

όπου

$$j^\mu \stackrel{(25)}{=} -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad \parallel \quad (33)$$

(άσωση?)

Σημείωση: Είναι σαφές ότι η $\mathcal{L}$ στην
(24) είναι αταξοίωτη κάτω από $U(1)$
μετασχηματισμούς επίσης.

Αναζωογόνο κατω από Μη - Αβελιανές οριζικές συμμετρίες

Στα προηγούμενα παραδείγματα είδαμε το αναζωογόνο των L σε μετασχηματισμούς οριζικής φάσης μιάς (μικαδισκής) κυματοσυνάρτησης

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi \quad \eta \quad \phi \rightarrow \phi' = e^{-i\alpha} \phi \quad (34)$$

Η γενίκευση σε μη - Αβελιανά αναζωογόνα προκύπτει όταν θεωρήσουμε περιβόστες από μία κυματοσυνάρτησεις η καταστάσεις συγχρόνως. Στη κβαντομηχανική γνωρίζουμε αρκετά γενικά ότι όταν έχουμε καταστάσεις εκφρασμένες στην ενέργεια (η μάζα) δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος περιγραφής

των καταστάσεων. Κάθε γραμμικός συνδυασμός ενός συνόλου αρχικά επιλεγμένων καταστάσεων θα είναι εξίσου καρός, αν ικανοποιούνται οι συνθήκες κανονικοποίησης.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την απρόσπερη περίπτωση δύο τέτοιων καταστάσεων και συγκεκριμένα το νετρόνιο και το πρωτόνιο. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} m(n) &= 939.553 \text{ MeV} \\ m(p) &= 938.259 \text{ MeV} \end{aligned} \tag{35}$$

Αυτή η σχεδόν ταύτιση των μαζών στάθηκε αρκετή να υποδείξει στον Heisenberg (1932), ότι τουλάχιστον όσον αφορά τις πυρηνικές δυνάμεις (ο ηγ/μός αμε-

γείται στη σύγκριση) οι δύο καταστάσεις
 να μπορούσαν να θεωρηθούν ως πραγματικά
 ευθυγραμμισμένες έτσι που αντισταθμίζονται γραμμικά
 ενώ συνδυασμοί των κυματοσυναρτήσεων
 του νετρονίου και πρωτονίου να είναι
 τελείως ισοδύναμοι, δηλ επιτρέπονται επανα-
 ορισμοί των κυματοσυναρτήσεων του πρωτονίου

ψ_p και νετρονίου ψ_n της μορφής

$$\begin{aligned}\psi_p &\rightarrow \psi'_p = \alpha \psi_p + \beta \psi_n \\ \psi_n &\rightarrow \psi'_n = \gamma \psi_p + \delta \psi_n\end{aligned}\quad (36)$$

για μιγαδικούς συντελεστές $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Επειδή οι ψ_p και ψ_n είναι ευθυγραμμισμένες

$$\Rightarrow H \psi_p = E \psi_p, \quad H \psi_n = E \psi_n \quad (37)$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 H \psi_p' &= H(\alpha \psi_p + \beta \psi_n) = \alpha H \psi_p + \beta H \psi_n \\
 &= E(\alpha \psi_p + \beta \psi_n) = E \psi_p'
 \end{aligned}$$

$$\text{και αντίστοιχα } H \psi_n' = E \psi_n' \quad (38)$$

που δείχνει ότι οι παρααριθμένες κυματο-
 συνάρτησεις συνεχίζουν να περιγράφουν δύο
 καταστάσεις με τον ίδιο ενεργειακό εφέδρεια.

Ο δεύτερος ενεργειακός μας προτείνει ότι συμ-
 βαίνει κάτι σαν και εκείνο που βρέθηκε
 στα συστήματα με spin $1/2$ απουσία μαγ.

νητικού πεδίου, δηλ. ότι οι ενεργειές

$S_z = \pm 1/2$ είναι ενεργειακές. Η αναλογία
 μπορεί να αναδειχθεί εισάγοντας τον 160-

σπινόρα. 2- ενεργειών του νουκλεονίου

$$\psi^{(1/2)} = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} = \psi_p \chi_p^{(1/2)} + \psi_n \chi_n^{(1/2)} \quad (39)$$

όπου

$$\chi_p^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_n^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (25) \quad (40)$$

1606πίν πάνω 1606πίν κάτω

και ψ_p, ψ_n συντελεστές που ως $|\psi_p|^2, |\psi_n|^2$ δίνουν την πιθανότητα το ρουλετόριο να έχει 1606πίν $\chi_p^{(1/2)}, \chi_n^{(1/2)}$.

Οι εξ. (36) μπορούν να γραφτούν με συμπαγή τρόπο χρησιμοποιώντας τον 1606πινόρα $\psi^{(1/2)}$ ως

$$\psi^{(1/2)} \rightarrow \psi^{(1/2)'} = U \psi^{(1/2)}, \quad (41)$$

όπου U είναι ένας μιγαδικός πίνακας 2×2 .

Η πρόταση του Heisenberg ήταν ότι η φυσική

των ισχυρών αλληλεπιδράσεων είναι

αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς (41). Με άλλα λόγια υπάρχει

συμμετρία. (απουσία γρήγων αλληλ/σεων).

συμμετρία (απουσία γρήγων αλληλ/σεων).

Ποιοι είναι οι περιγραφικοί στους U ; (2)

$$\begin{pmatrix} \psi'_p \\ \psi'_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (42)$$

Προκειμένου να διατηρήσουμε την κανονικοποίηση (συνιστά την πιθανότητα) απαιτούμε ο U να είναι μοναδιακός,

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1} \quad (43)$$

Προφανώς αυτή η ιδιότητα δεν περιορίζεται στην περίπτωση δύο καταστάσεων.

Είναι σαφές ότι οι συτρεφετές μετασχηματισμοί η ευθυγραμμισμένων καταστάσεων θα φτιάξουν τα στοιχεία ερός $\eta \times \eta$ μοναδιακού πίνακα. Μια τετριμένη περίπτωση είναι η $n=1$ για την οποία

ο U γίνεται ένας παράχρηστος σπιν

Το αναλλοίωτο της θεωρίας καίτω από
τέτοιο μετασχηματισμό αντιστοιχεί φυσικά
στο νόμο διατήρησης του συνολικού αριθμού
των p και n .

Η νέα φυσική θα βρεθεί στους υπό-
ρους μετασχηματισμούς που ικανοποιούν

$$\det U = +1 \quad (46)$$

Ενας τέτοιος πίνακας λέγεται ειδικός
μοριαδικός. Το σύνολο όλων των πινάκων
 U είναι η ομάδα Lie $SU(2)$. Οι ομάδες
Lie έχουν τη σπουδαία ιδιότητα ότι οι
φυσικές τους συνέπειες μπορούν να βρεθούν
θεωρώντας απειροελάχιστους μετασχηματισμούς.
δηλ. πίνακες U , που διαφέρουν ελάχιστα

από την κατάσταση μη-αγλαχής που
αντιστοιχεί στο $U = \mathbb{1}$. Μπορούμε λοιπόν
να γράψουμε

$$U = \mathbb{1} + i \xi, \quad (47)$$

όπου ξ είναι ένας 2×2 πίνακας, τον οποίον
τα στοιχεία είναι όλα μικρές ποσότητες πρώ-
της τάξης. Η συνθήκη (46), παραλείποντας
δευτέρης τάξης όρους $O(\xi^2)$, γίνεται

$$\text{Tr } \xi = 0 \quad (\text{άδυστον}) \quad (48)$$

Επίσης η συνθήκη ότι ο U είναι μοναδιαίος

$$(1 + i \xi)(1 - i \xi^\dagger) = 1 \quad (49)$$

$$\leadsto \xi = \xi^\dagger \quad (\text{σε πρώτη τάξη}) \quad (50)$$

Επομένως ο ξ είναι ένας 2×2 Ερμιτιανός
πίνακας. Επιπλέον περιέχει 3 ανεξάρτητες.

παραμέτρους, όπως προκύπτει μετρώντας
τους περιορισμούς που επιβάλλουν οι ευνόητοι

$$\text{Tr } \xi = 0, \quad \xi = \xi^\dagger \quad (51)$$

Μπορεί λοιπόν να γραφτεί αμετάχρημα ως

$$\xi = \vec{\epsilon} \cdot \vec{T} / 2 \quad (52)$$

$$\text{όπου } \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \quad (53)$$

3 μικρές ποσότητες πρώτης τάξης ως

$\vec{T}$ οι γνωστοί μας πίνακες Pauli,

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (54)$$

που ικανοποιούν προφανώς τις ίδιες σχέσεις

μετάθεσης με τους τελεστές στροφορμής

σωματιδίου με spin $1/2$, δηλ.

$$[T_i/2, T_j/2] = i \epsilon_{ijk} T_k/2 \quad || \quad (55)$$

ενώ οι βασικές κυματοεμφαγήσεις $\chi_p^{(1/2)}, \chi_n^{(1/2)}$

είναι ιδιοσυναρτήσεις του ορίσμού "6πιν" να
της 3ης συνιστώσας του "6πιν", δηλ.

$$\frac{1}{4} \vec{T}^2 \chi_p^{(1/2)} = \frac{3}{4} \chi_p^{(1/2)}, \quad \frac{1}{2} T_3 \chi_p^{(1/2)} = \frac{1}{2} \chi_p^{(1/2)}$$

$$\frac{1}{4} \vec{T}^2 \chi_n^{(1/2)} = \frac{3}{4} \chi_n^{(1/2)}, \quad \frac{1}{2} T_3 \chi_n^{(1/2)} = -\frac{1}{2} \chi_n^{(1/2)} \quad (56)$$

Αυτός ο διπλός βαθμός ελευθερίας στο
"χώρο φορτίου" των p και n ονομάζεται
1606πιν.

Ενας απειροστός $SU(2)$ μετασχηματισμός
της διπλέτας p - n προσδιορίζεται ως

$$\begin{pmatrix} \psi'_p \\ \psi'_n \end{pmatrix} = \left(1 + i \vec{\epsilon} \cdot \vec{T} / 2 \right) \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (57)$$

... Ας θεωρήσουμε τη Lagrangian που περιγράφει δύο ελεύθερα φερμιόνια u και d που έχουν ίδια μάζα m .

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_u (i\partial - m)\psi_u + \bar{\psi}_d (i\partial - m)\psi_d$$

$$\partial \equiv \gamma^\mu \partial_\mu \quad (58)$$

Η $\mathcal{L}$ είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μοναδιαίους $SU(2)$ μετασχηματισμούς

$$\begin{pmatrix} \psi'_u \\ \psi'_d \end{pmatrix} = \exp(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{T}/2) \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix} \quad (59)$$

Ποιό είναι το συσχετισμένο διατηρούμενο ρεύμα Noether; άσκηση

Ποιά είναι τα διατηρούμενα φορτία;
Να δείξετε ότι τα διατηρούμενα φορτία είναι πράγματι οι γεννήτορες του $SU(2)$