Παράρτημα 2

Μετασχηματισμός Lorentz

Για κίνηση στον άξονα x (δηλαδή x^1) έχουμε ($c = 1$)

$$x'^0 = \frac{x^0 - vx^1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x'^1 = \frac{x^1 - vx^0}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \text{δηλαδή } x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu$$

όπου

$$\Lambda^0{}_0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^0{}_1 = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^1{}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^1{}_0 = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}$$

Χρησιμοποιώντας τα $x_0 = x^0$ και $x_1 = -x^1$ θα έχουμε

$$x'^0 = \frac{x_0 + vx_1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x'^1 = \frac{-x_1 - vx_0}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \text{δηλαδή } x'^\nu = \Lambda^{\nu\sigma} x_\sigma$$

όπου

$$\Lambda^{00} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^{01} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^{11} = \frac{-1}{\sqrt{1-v^2}}, \Lambda^{10} = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}$$

δηλαδή

$$\Lambda^{01} = -\Lambda^{10}$$

Χρησιμοποιώντας τον μετρικό τανυστή

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\ \mu} x^{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\ \mu} g^{\mu\sigma} x_{\sigma} = \Lambda^{\nu\sigma} x_{\sigma}$$

Θέλει προσοχή η σειρά των δεικτών ν, σ. Επίσης, μπορούμε να γράψουμε (πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη σχέση επί $g_{\nu\rho}$)

$$g_{\nu\rho} x'^{\nu} = g_{\nu\rho} \Lambda^{\nu\sigma} x_{\sigma} = \Lambda_{\rho}^{\ \sigma} x_{\sigma}$$

δηλαδή

$$x'_{\rho} = \Lambda_{\rho}^{\ \sigma} x_{\sigma}$$

Η διατηρούμενη ποσότητα είναι το ‘τετράγωνο’ του τετραδιανύσματος

$$(x')^2 = (x)^2 \to x'^{\mu} x'_{\mu} = x^{\nu} x_{\nu} \to x'^{\mu} x'^{\rho} g_{\rho\mu} = x^{\nu} x^{\sigma} g_{\sigma\nu} \to$$
$$\Lambda^{\mu}_{\ \mu'} x^{\mu'} \Lambda^{\rho}_{\ \rho'} x^{\rho'} g_{\rho\mu} = x^{\nu} x^{\sigma} g_{\sigma\nu}$$

Τα x είναι βέβαια ανεξάρτητες παράμετροι. Οπότε, εξισώνοντας δεξιά και αριστερά τους ίδιους όρους, δηλαδή θέτοντας $\mu' = \nu$ και $\rho' = \sigma$, θα έχουμε

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} \Lambda^{\rho}_{\ \sigma} g_{\rho\mu} = g_{\sigma\nu} \to \Lambda^{\rho}_{\ \sigma} g_{\rho\mu} \Lambda^{\mu}_{\ \nu} = g_{\sigma\nu} \to \Lambda^{T} g \Lambda = g$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\sigma} \to g_{\mu\nu} x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\sigma} \to x'_{\mu} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\sigma} \to$$
$$\Lambda^{\mu}{}_{\rho} x'_{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} x^{\sigma} \to \Lambda^{\mu}{}_{\rho} x'_{\mu} = g_{\rho\sigma} x^{\sigma} = x_{\rho}$$

και όμοια $x^{\rho} = \Lambda_{\mu}{}^{\rho} x'^{\mu}$. Συνοψίζοντας

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu},\ x'_{\rho} = \Lambda_{\rho}{}^{\sigma} x_{\sigma},\ x_{\rho} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} x'_{\mu},\ x^{\rho} = \Lambda_{\mu}{}^{\rho} x'^{\mu}$$

Τέλος

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu} x^{\mu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\Lambda_{\sigma}{}^{\mu} x'^{\sigma} \to \Lambda^{\nu}{}_{\mu}\Lambda_{\sigma}{}^{\mu} = \delta^{\nu}_{\sigma}$$

Απειροστός μετασχηματισμός

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu}$$

Από τη σχέση $\Lambda^{\rho}{}_{\sigma} g_{\rho\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g_{\sigma\nu}$ έχουμε

$$\begin{aligned} g_{\sigma\nu} = \Lambda^{\rho}{}_{\sigma} g_{\rho\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} &= (\delta^{\rho}_{\sigma} + \epsilon^{\rho}{}_{\sigma}) g_{\rho\mu} (\delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu}) = \\ &= g_{\sigma\nu} + \epsilon^{\rho}{}_{\sigma} g_{\rho\mu}\delta^{\mu}_{\nu} + \delta^{\rho}_{\sigma} g_{\rho\mu}\epsilon^{\mu}{}_{\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \\ &= g_{\sigma\nu} + (\epsilon_{\nu\sigma} + \epsilon_{\sigma\nu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

δηλαδή $\epsilon_{\nu\sigma} + \epsilon_{\sigma\nu} = 0$.

Ο πίνακας $\epsilon_{\nu\sigma}$ είναι αντισυμμετρικός, επομένως έχει 6 ανεξάρτητα στοιχεία: 3 στροφές και 3 κινήσεις. Για παράδειγμα, στροφή γύρω απο τον άξονα z

$$\left.\begin{array}{l} x'^0 = x^0,\ x'^3 = x^3, \\ x'^1 = x^1 + \epsilon x^2, \\ x'^2 = -\epsilon x^1 + x^2 \end{array}\right\}, \quad \epsilon^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ποιος είναι ο $\epsilon_{\mu\nu}$

$$\epsilon_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\,\epsilon^\rho{}_\nu = g_{\mu 1}\,\epsilon^1{}_\nu + g_{\mu 2}\,\epsilon^2{}_\nu$$

Τα διάφορα του μηδενός είναι $\epsilon^1{}_2 = -\epsilon^2{}_1 = \epsilon$. Επομένως τα μόνα διάφορα του μηδενός στοιχεία είναι $-\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \epsilon$, δηλαδή

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Για κίνηση στον άξονα z (τώρα $\epsilon = v$)

$$\left.\begin{array}{l} x'^1 = x^1,\ x'^2 = x^2, \\ x'^0 = x^0 - \epsilon x^3, \\ x'^3 = -\epsilon x^0 + x^3 \end{array}\right\}, \quad \epsilon^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\epsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και όπως πριν

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +\epsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$