

Εφαρμογή στη θεωρία ϕ^4

Ας εφαρμόσουμε τη συνταγή αυτή στη θεωρία μας. Γράφοντας στην διαστατική ομαλοποίηση (J.C. Collins, Phys.Rev.D10 (1974) 1213)

$$\lambda\mu^{n-4} = \lambda_R + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu}(\lambda_R)}{(n-4)^{\nu}} \quad Z_{\phi} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_{\nu}(\lambda_R)}{(n-4)^{\nu}}$$

$$m^2 = Z_m m_R^2 = m_R^2 + m_R^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{\nu}(\lambda_R)}{(n-4)^{\nu}}$$

όπου a_{ν} , b_{ν} και c_{ν} είναι κατάλληλα ώστε να απαλείψουν τους πόλους που εμφανίζονται στα διάγραμμα Feynman (προσέξτε, ότι σε διαγράμματα με περισσότερους τους ενός βρόχου θα εμφανιστούν πόλοι ανώτερης τάξης). Αποδεικνύεται ότι (Παράρτημα)

$$\beta(\lambda_R) = \left(a_1 - \lambda_R \frac{\partial a_1}{\partial \lambda_R} \right), \quad \gamma(\lambda_R) = \lambda_R \frac{\partial c_1}{\partial \lambda_R}, \quad \gamma_m(\lambda_R) = \lambda_R \frac{\partial b_1}{\partial \lambda_R} \quad (13)$$

Ο υπολογισμός του Σ , Εξ.2, δίνει

$$\Sigma = \frac{1}{16\pi^2} \frac{\lambda}{n-4} m^2 + \lambda \times \text{πεπερασμένο τμήμα}$$

Επειδή, όπως ήδη το αναφέραμε, σε ένα βρόχο, το Σ δεν εξαρτάται από την εξωτερική ορμή, δεν υπάρχει ανακανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης και επομένως $c_1 = 0$. Για την ανακανονικοποίηση της μάζας θα έχουμε

$$m^2 = m_R^2 + \frac{m_R^2}{n-4} \left(-\frac{\lambda}{16\pi^2}\right) = m_R^2 + \frac{m_R^2}{n-4} \left(-\frac{\lambda_R}{16\pi^2}\right)$$

οπότε, $b_1 = -\lambda_R/(16\pi^2)$.

Ο υπολογισμός του Γ , Εξ.(7), δίνει

$$\Gamma = \frac{\mu^{4-n} \lambda_R^2}{16\pi^2} \frac{3}{n-4} + \lambda_R^2 \times \text{πεπερασμένο τμήμα}$$

Επομένως

$$\lambda = \mu^{4-n} \lambda_R \left(1 - \frac{3\lambda_R}{16\pi^2} \frac{1}{n-4}\right)$$

και επομένως, $a_1 = -3\lambda_R/(16\pi^2)$.

Οπότε,

$$\beta(\lambda_R) = \frac{1}{16\pi^2} \left(-3\lambda_R^2 - \lambda_R \frac{\partial}{\partial \lambda_R} (-3\lambda_R^2) \right) = \frac{3\lambda_R^2}{16\pi^2}$$

και

$$\gamma_m(\lambda_R) = \frac{1}{16\pi^2} \left(\lambda_R \frac{\partial}{\partial \lambda_R} (-\lambda_R) \right) = -\frac{\lambda_R}{16\pi^2}$$

Ας βρούμε την εξάρτηση της λ_R από την ενέργεια

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_R}{dt} &= \frac{3\lambda_R^2}{16\pi^2} \rightarrow \int_{\lambda_0}^{\lambda_R} \frac{d\lambda}{\lambda_R^2} = \frac{3}{16\pi^2} \int_0^t dt \\ -\frac{1}{\lambda_R} + \frac{1}{\lambda_0} &= \frac{3t}{16\pi^2} \rightarrow \frac{1}{\lambda_R} = \frac{1}{\lambda_0} - \frac{3t}{16\pi^2} \\ \lambda_R &= \frac{\lambda_0}{1 - \frac{3\lambda_0}{16\pi^2} \ln(E/E_0)} \end{aligned} \tag{14}$$

όπου $\lambda_0 = \lambda(E_0)$.

Αποδεικνύουμε πώς από την ανάπτυξη της σταθεράς σύζευξης

$$\lambda\mu^{n-4} = \lambda_R + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu}(\lambda_R)}{(n-4)^{\nu}}$$

καταλήγουμε στη σχέση που μας δίνει την συνάρτηση β

$$\beta(\lambda_R) = \left(a_1(\lambda_R) - \lambda_R \frac{\partial a_1(\lambda_R)}{\partial \lambda_R} \right)$$

Η παραγωγή του αριστερού μέλους της πρώτης σχέσης δίνει

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} (\lambda\mu^{n-4}) &= (n-4)\lambda\mu^{(n-4)} = \\ &= (n-4) \left(\lambda_R + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu}(\lambda_R)}{(n-4)^{\nu}} \right) = (n-4)\lambda_R + a_1(\lambda_R) + \frac{a_2(\lambda_R)}{n-4} + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Η παραγωγή στο δεξί μέλος, δίνει $(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} = \mu \frac{\partial \lambda_R}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda_R})$

$$\mu \frac{\partial \lambda_R}{\partial \mu} \left(1 + \frac{a'_1(\lambda_R)}{n-4} + \frac{a'_2(\lambda_R)}{(n-4)^2} + \dots \right)$$

όπου a'_i είναι η παράγωγος του a_i ως προς λ_R .

Η παράσταση $\mu \frac{\partial \lambda_R}{\partial \mu}$ είναι πεπερασμένη συνάρτηση, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\mu \frac{\partial \lambda_R}{\partial \mu} = x_0 + x_1(n-4) + x_2(n-4)^2 + \dots$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \lambda_R}{\partial \mu} \left(1 + \frac{a'_1(\lambda_R)}{n-4} + \frac{a'_2(\lambda_R)}{(n-4)^2} + \dots \right) &= \\ &= (x_0 + x_1(n-4) + x_2(n-4)^2 + \dots) \left(1 + \frac{a'_1(\lambda_R)}{n-4} + \frac{a'_2(\lambda_R)}{(n-4)^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

απ' όπου οι συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων του $(n-4)$ είναι

$$(n-4)^0 : x_0 + x_1 a'_1 + x_2 a'_2 + \dots, \quad (n-4) : x_1 + x_2 a'_1 + x_3 a'_2 + \dots$$

$$(n-4)^2 : x_2 + x_3 a'_1 + \dots, \quad (n-4)^3 : x_3 + x_4 a'_1 + \dots$$

.....

$$(n-4)^{-1} : x_0 a'_1 + x_1 a'_2 + \dots, \quad (n-4)^{-2} : x_0 a'_2 + x_1 a'_3 + \dots$$

.....

Τα παραπάνω θα πρέπει να εξισωθούν με τις αντίστοιχες δυνάμεις του $(n-4)$ στην Εξ.(15). Για την δεύτερη, τρίτη και παραπάνω δυνάμεις του $(n-4)$ έχουμε

$$0 = x_2 + x_3 a'_1(\lambda_R) + \dots, \quad 0 = x_3 + x_4 a'_1(\lambda_R) + \dots, \quad \dots\dots$$

απ' όπου φαίνεται ότι

$$x_\nu = 0 \text{ για } \nu \geq 2$$

Για την μηδενική και πρώτη δύναμη του $(n-4)$ έχουμε (χρησιμοποιώντας και το προηγούμενό μας συμπέρασμα)

$$a_1(\lambda_R) = x_0 + x_1 a'_1(\lambda_R), \quad \lambda_R = x_1 \rightarrow x_0 = a_1(\lambda_R) - \lambda_R a'_1(\lambda_R)$$

ενώ από τις αρνητικές δυνάμεις του $(n - 4)$ παίρνουμε την ομάδα των ταυτοτήτων

$$x_0 a'_{\nu-1}(\lambda_R) + x_1 a'_\nu(\lambda_R) = a_\nu(\lambda_R), \quad \nu \geq 2$$

Επομένως, από τον ορισμό της συνάρτησης β , για $n = 4$,

$$\beta \equiv \mu \frac{\partial \lambda_R}{\partial \mu} = \left(a_1 - \lambda_R \frac{\partial a_1}{\partial \lambda_R} \right)$$