

Μηχανισμός Higgs

Πηγαίνουμε τώρα σε μια Λαγκραντζιανή που υπακούει μια τοπική συμμετρία βαθμίδας, $\phi(x) \rightarrow \exp[i\alpha(x)]\phi(x)$, και φυσικά χρειαζόμαστε την συναλλοίωτο παράγωγο $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ με $A_\mu \rightarrow A_\mu + (1/e)\partial_\mu\alpha(x)$. Η Λαγκραντζιανή γίνεται

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Για $\mu^2 > 0$, αν εξαιρέσουμε το όρο $(\phi^*\phi)^2$, έχουμε την λεγόμενη “βαθμωτή” Κβαντική Ηλεκτροδυναμική. Για $\mu^2 < 0$ θα έχουμε αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας. Κάνοντας τα ίδια όπως και στην περίπτωση της ολικής συμμετρίας, θα πάρουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2 - \lambda v^2\eta^2 + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu - evA_\mu\partial^\mu\xi - \\ - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\text{όροι αλληλεπιδράσεων})\end{aligned}$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι

$$m_\xi = 0, \quad m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}, \quad m_A = ev$$

αλλά υπάρχει και ένας “παράξενος” όρος, μη διαγώνιος:
 $-e\nu A_\mu \partial^\mu \xi$. Ο λόγος είναι ότι το A_μ , αφού πήρε μάζα, απέκτησε
 (από 2) 3 βαθμούς ελευθερίας. Η $\mathcal{L}'$ δεν είναι “καλά” γραμμένη
 και μπερδεύει τις ανεξάρτητες καταστάσεις των πεδίων. Κατ’
 αρχή, αυτό δεν είναι κακό, αρκεί να μπορούμε να διακρίνουμε
 ποιες είναι οι φυσικές καταστάσεις.

Μπορούμε να βρούμε κάποιο συγκεκριμένη βαθμίδα, που να μας
 δείχνει εκπεφρασμένα αυτές τις φυσικές καταστάσεις;

Παρατηρήστε ότι

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{2}} (\nu + \eta + i\xi) \simeq \sqrt{\frac{1}{2}} (\nu + \eta) e^{i\xi/\nu}$$

Επομένως, στην αρχική Λαγκραντζιανή επιλέγουμε να κάνουμε
 τον μετασχηματισμό βαθμίδας

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} (\nu + h(x)) e^{i\theta(x)/\nu} \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{1}{e\nu} \partial_\mu \theta(x) \end{aligned}$$

Επιλέγοντας αυτήν την βαθμίδα, περιμένουμε την ανεξαρτησία από το θ , μιας και είναι η φάση. Πράγματι, η νέα Λαγκραντζιανή γράφεται

$$\mathcal{L}'' = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2}e^2 v^2 A_\mu A^\mu - \lambda v h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 + \\ + \frac{1}{2}e^2 h^2 A_\mu A^\mu + v e^2 h A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Το μποζόνιο Goldstone δεν εμφανίζεται πια. Ο βαθμός ελευθερίας του είναι “πλαστός” γιατί αντιστοιχεί στην ελευθερία του μετασχηματιστού βαθμίδας. Αυτός ο βαθμός ελευθερίας δόθηκε στο A_μ που τώρα έχει μάζα και έχει 3 βαθμούς ελευθερίας. Αυτός είναι “ο μηχανισμός Higgs”.

Αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας $SU(2)$

Ας πάρουμε την Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

με

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

Απαιτώντας αναλλοιώτητα σε μετασχηματισμούς βαθμίδας της $SU(2)$

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha_j(x)\tau_j/2}\phi, \quad \text{όπου } \tau_j \text{ οι πίνακες του Pauli, } j = 1, 2, 3$$

θα εισάγουμε την συναλλοίωτη παράγωγο

$$D^\mu = \partial^\mu + ig\frac{\tau_j}{2}W_j^\mu$$

Για απειροστούς μετασχηματισμούς

$$\phi \rightarrow (1 + i\alpha(x) \cdot \tau/2)\phi$$

$$\mathbf{W}_\mu \rightarrow \mathbf{W}_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha - \alpha \times \mathbf{W}_\mu$$

(θυμηθείτε ότι για την $SU(2)$ οι σταθερές δομής της ομάδας $f_{ijk} = \epsilon_{ijk}$). Οπότε, η Λαγκραντζιανή γίνεται

$$\mathcal{L} = \left(\partial_\mu\phi + ig\frac{\tau}{2}\mathbf{W}_\mu\phi\right)^\dagger \left(\partial^\mu\phi + ig\frac{\tau}{2}\mathbf{W}^\mu\phi\right) - V(\phi) - \frac{1}{4}\mathbf{W}^{\mu\nu}\mathbf{W}_{\mu\nu}$$

με

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{W}_\nu - \partial_\nu\mathbf{W}_\mu - g\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu$$

$$V = \mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$$

Για $\lambda > 0$ και $\mu^2 < 0$, το ελάχιστο του δυναμικού επιτυγχάνεται όταν

$$\phi^\dagger \phi = (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = -\frac{\mu^2}{\lambda}$$

Επιλέγουμε

$$\phi_1^2 = \phi_2^2 = \phi_4^2 = 0, \quad \phi_3^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2$$

Αναπτύσσοντας γύρω από το ελάχιστο

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

και επιλέγοντας τη βαθμίδα

$$\phi(x) = e^{i\tau \cdot \theta(x)/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

για απειροστούς μετασχηματισμούς πέρνουμε

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + i\theta_3/v & i(\theta_1 - i\theta_2)/v \\ i(\theta_1 + i\theta_2)/v & 1 - i\theta_3/v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_1 + i\theta_2 \\ v - h - i\theta_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

αντίστοιχα με αυτό που κάναμε στην προηγούμενη περίπτωση. Στην $\mathcal{L}'$, τα θ_1 , θ_2 και θ_3 “εξαφανίζονται” και μένει μόνο το h . Τα τρία θ έδωσαν το βαθμό ελευθερίας τους στα W_1 , W_2 και W_3 , που απέκτησαν μάζα.

Ποια είναι η μάζα των W ; Αυτό θα το βρούμε από το τετραγωνικό όρο ως προς τα W

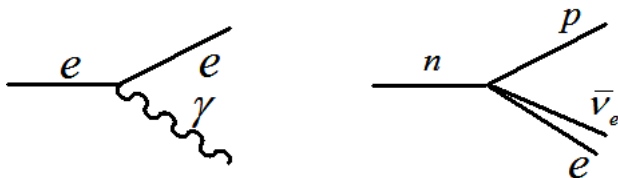
$$\begin{aligned}\left| ig \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}^\mu \phi \right|^2 &= \frac{g^2}{4} \left| \begin{pmatrix} W_3^\mu & W_1^\mu - iW_2^\mu \\ W_1^\mu + iW_2^\mu & -W_3^\mu \end{pmatrix} \phi_0 \right|^2 = \\ &= \frac{g^2 v^2}{8} [(W_1^\mu)^2 + (W_2^\mu)^2 + (W_3^\mu)^2]\end{aligned}$$

και η μάζα είναι

$$M = \frac{1}{2} g v$$

καταλήγουμε, λοιπόν, με 3 W με μάζα M και ένα βαθμωτό h με μάζα $\sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda v^2}$.

Ο Fermi, το 1934, έκανε την πρώτη προσπάθεια φαινομενολογικής περιγραφής των ασθενών αλληλεπιδράσεων. Θεώρησε την διάσπαση β ως μια “ηλεκτρομαγνητική μετάπτωση”.



Το πλάτος θα δίνεται

$$M = \langle p | J_{\mu}^{wk} | n \rangle \langle e \nu_e | J_{wk}^{\mu} | 0 \rangle$$

Λόγω της μικρής ενέργειας που εκλείεται, περιμένουμε ότι η εξάρτηση από την ορμή μπορεί να αγνοηθεί και να καταλήξουμε σε μια σταθερά $G = 1.14 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$.

Αυτή η αλληλεπίδραση “ρεύματος - ρεύματος” μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες ασθενείς διαδικασίες. Ο κανόνας που έχουμε για τα αντισωματίδια οδηγεί στην διαδικασία

$$\nu_e + n \rightarrow p + e^-$$

που θα πρέπει να έχει την ίδια ισχύ όπως και η διάσπαση β. Θεωρώντας, επίσης, ότι το ασθενές ρεύμα έχει λεπτονικό και αδρονικό τμήμα

$$J_\mu^{wk} = J_\mu^h + J_\mu^l$$

τότε, θα πρέπει να υπάρχουν καθαρές λεπτονικές διαδικασίες

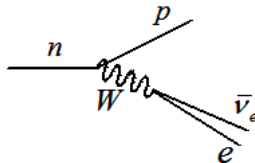
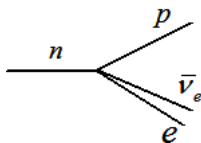
$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

και καθαρά αδρονικές διαδικασίες

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$$

Η πρώτη διατύπωση της “παγκοσμιότητας” (universality) ήταν ότι όλες αυτές οι διαδικασίες θα έχουν κοινό G .

Η αντιστοιχία του φωτονίου με το ζευγάρι ($e\nu_e$) δεν είναι πολύ επιτυχής. Το φωτόνιο που εκπέμπεται αποτελεί το κβάντο του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Είναι δύσκολο να θεωρήσουμε το ζευγάρι ($e\nu_e$) ως το κβάντο του αντίστοιχου ασθενούς πεδίου. Από την άλλη πλευρά, η επιτυχία της ΚΗΔ οδηγεί άμεσα στην σκέψη εισαγωγής ενός πεδίου αντίστοιχου με το φωτόνιο, του ενδιάμεσου διανυσματικού μποζονίου (intermediate vector boson). Αυτό ίσως ήταν το πρώτο βήμα για την ενοποίηση ηλεκτρομαγνητικών και ασθενών αλληλεπιδράσεων.



Παρέμεναν βέβαια πολλές διαφορές ανάμεσα στην ΚΗΔ και τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Το φωτόνιο είναι ουδέτερο ενώ το W έχει φορτίο. Το W πρέπει να έχει μάζα, λόγω της μικρής εμβέλειας των ασθενών αλληλεπιδράσεων, ενώ το φωτόνιο είναι άμαζο.

Η εισαγωγή της έννοιας του ενδιάμεσου μποζονίου οδηγεί στο πλάτος

$$\mathcal{M} = J_{\mu}^{(wk)} \left[\frac{-g^{\mu\nu} + q^{\mu} q^{\nu} / M_W^2}{q^2 - M_W^2} \right] J_{(wk)}^{\nu}$$

Επομένως, στην κορυφή Fermi έχουμε πια μια εξάρτηση από την ενέργεια. Για τυπικές ενέργειες της διάσπασης β , το $q^2 \ll M_W^2$, οπότε $G \sim g^2 / M_W^2$, όπου το g είναι η σταθερά σύζευξης, ανάλογη του e . Δηλαδή, οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις είναι ασθενείς λόγω της μεγάλης μάζας του W . Αν $g \sim e$, τότε

$$M_W \sim \frac{e}{\sqrt{G}} \sim 90 \text{ GeV}$$

Το 1957 παρατηρήθηκε (Wu et al) εξάρτηση της γωνιακής κατανομής του e^- από την πόλωση του πυρήνα (n), κάτι που είχε ήδη αναφερθεί από τους Lee και Young. Άρα, θα πρέπει να εμφανίζεται όρος $\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}$. Μετά από πολλές προσπάθειες, παλινωδίες, αποτυχίες, καθιερώθηκε η ύπαρξη συνδυασμών V (διάνυσμα) και A (ψευδοδιάνυσμα) στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις.

Γνωρίζουμε ότι $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ μετασχηματίζεται ως διάνυσμα, ενώ το $J_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ ως ψευδοδιάνυσμα. Δηλαδή, σε μετασχηματισμό parity

$$P : J^\mu \rightarrow (J^0, -\mathbf{J})$$

$$P : J_5^\mu \rightarrow (J^0, \mathbf{J})$$

Η αρχική θεωρία του Fermi πέρασε από την υπόθεση του ενδιάμεσου μποζονίου και έφτασε στην μορφή $V - A$

$$\langle e^- | J_{wk}^\mu | \nu_e \rangle = \frac{g}{\sqrt{2}} NN' \bar{u}_e \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}$$

Επομένως, το $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$ θα γράφεται

$$\frac{g^2}{2} \left[\bar{u}_{(\mu)} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u_{(\nu_\mu)} \right] \left[\frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2} \right] \left[\bar{u}_{(\nu_e)} \gamma_\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} u_{(e)} \right]$$

που αντιστοιχεί στην κορυφή Fermi

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_{(\mu)} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_{(\nu_\mu)}] g^{\mu\nu} [\bar{u}_{(\nu_e)} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) u_{(e)}]$$

Οπότε, για $q^2 \ll M_W^2$,

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

και αυτό αποτελεί τον ορισμό του G_F .

Γράφοντας το

$$\bar{u}_1 \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u_2 = \bar{u}_1 \frac{1 + \gamma_5}{2} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u_2 = \bar{u}_1 P_R \gamma^\mu P_L u_2 = \overline{(u_{1L})} \gamma^\mu u_{2L}$$

σημαίνει ότι μόνο το αριστερόστροφο (L) τμήμα της κυματοσυνάρτησης παίζει ρόλο στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις.

$$\bar{u}\gamma^\mu u = \bar{u}_L\gamma^\mu u_L + \bar{u}_R\gamma^\mu u_R$$

Τι γίνεται για τα δεξιόστροφα τμήματα;

Ας δούμε τι συμβαίνει στην απαίτηση η Λαγκραντζιανή να παραμένει αναλλοίωτη όταν η κυματοσυνάρτηση ψ μετασχηματίζεται κάτω από δύο μετασχηματισμούς

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha(x)Q}\psi, \quad \text{και} \quad \psi \rightarrow e^{-i\beta(x)Y}\psi$$

Τότε, θα πρέπει να εισαγάγουμε την συναλλοίωτη παράγωγο ως

$$D^\mu = \partial^\mu - ig_1 QA^\mu - ig_2 YB^\mu$$

όπου τα πεδία βαθμίδας μετασχηματίζονται ως

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \frac{1}{g_1 Q} \partial^\mu \alpha(x)$$

$$B^\mu \rightarrow B^\mu - \frac{1}{g_2 Y} \partial^\mu \beta(x)$$

Ουδέτερα ρεύματα

Η διάσπαση $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, στο επίπεδο των κουάρκ αντιστοιχεί στην $d \rightarrow u + W^-$ και με τη σειρά του το $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$. Οπότε, η αλληλεπίδραση του ασθενούς ρεύματος των κουάρκ με το W^- γράφεται

$$(\bar{u}_L \gamma^\mu d_L) W_\mu^- = (\bar{u} \bar{d})_L \gamma^\mu \tau^+ \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L W_\mu^-$$

όπου

$$\tau^+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Και βέβαια, για την διαδικασία $u \rightarrow d + W^+$ θα έχουμε αντίστοιχα

$$(\bar{d}_L \gamma^\mu u_L) W_\mu^+ = (\bar{u} \bar{d})_L \gamma^\mu \tau^- \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L W_\mu^+$$

με

$$\tau^- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Περιμένουμε (;) λοιπόν και την παρουσία του τ_3

$$(\bar{u} \bar{d})_L \gamma^\mu \tau_3 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \bar{d}_L \gamma^\mu d_L)$$

όπου βέβαια το αντίστοιχο $W_\mu^{(3)}$ πρέπει να είναι ηλεκτρικά ουδέτερο.

Το Καθιερωμένο Πρότυπο

Δουλεύοντας σε μια γενιά μόνο (u, d, e, ν_e) , θα έχουμε

$$u_L, \quad u_R, \quad d_L, \quad d_R, \quad e_L, \quad e_R, \quad \nu_{eL}$$

Οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις μας οδηγούν σε αριστερόστροφες διπλέτες και δεξιόστροφες “μονάδες” (singlets)

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad u_R, \quad d_R, \quad e_R$$

Τα αριστερόστροφα “βλέπουν” μια συμμετρία $SU(2)$ και μια $U(1)$ ενώ τα δεξιόστροφα “βλέπουν” μόνο την $U(1)$. Δηλαδή, ο αντίστοιχος μετασχηματισμός είναι

$$\Psi_L^{(i)} \rightarrow \exp \left(-i\alpha(x) \cdot \tau/2 - i\beta(x) Y_L^{(i)}/2 \right) \Psi_L^{(i)}$$

$$\Psi_R^{(i)} \rightarrow \exp \left(-i\beta(x) Y_R^{(i)}/2 \right) \Psi_R^{(i)}$$

οπότε, οι αντίστοιχες συναλλοίωτες παράγωγοι θα είναι

$$D_{(L)}^\mu = \partial^\mu + ig \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{W}^\mu + ig' \frac{Y_{(L)}}{2} B^\mu, \quad \text{για τα } L \text{ πεδία}$$

$$D_{(R)}^\mu = \partial^\mu + ig' \frac{Y_{(R)}}{2} B^\mu, \quad \text{για τα } R \text{ πεδία}$$

και η Λαγκραντζιανή θα γράφεται

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\bar{u} \bar{d})_L i\gamma^\mu D_\mu^{(L)} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + (\bar{\nu}_e \bar{e})_L i\gamma^\mu D_\mu^{(L)} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L + \\ & + \bar{u}_R i\gamma^\mu D_\mu^{(R)} u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu D_\mu^{(R)} d_R + \bar{e}_R i\gamma^\mu D_\mu^{(R)} e_R - \\ & - \frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Για να δούμε πώς παρουσιάζεται το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα, π.χ. $\bar{e}\gamma^\mu e$. Ας πάρουμε το ρεύμα της $SU(2)$ που αντιστοιχεί στο τ_3

$$j_\mu^{(3)} = (\bar{\nu}_e \bar{e})_L \gamma_\mu \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{1}{2} \bar{\nu}_{eL} \gamma_\mu \nu_{eL} - \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma_\mu e_L$$

Για την ίδια διπλέτα, το ρεύμα που αντιστοιχεί στην $U(1)$ θα είναι

$$j_\mu^{(Y_L)} = (\bar{\nu}_e \bar{e})_L \gamma_\mu \frac{1}{2} Y_L \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{1}{2} Y_L \bar{\nu}_{eL} \gamma_\mu \nu_{eL} + \frac{1}{2} Y_L \bar{e}_L \gamma_\mu e_L$$

Αν, λοιπόν, επιλεχθεί για την λεπτονική διπλέτα $Y_L = -1$, θα πάρουμε

$$j_\mu^{(3)} + j_\mu^{(Y_L)} = -\bar{e}_L \gamma_\mu e_L$$

Το ρεύμα για το δεξιόστροφο e_R είναι, βέβαια, μόνο από την $U(1)$

$$j_\mu^{(Y_R)} = \bar{e}_R \gamma_\mu \frac{1}{2} Y'_R e_R$$

Επιλέγουμε $Y'_R = -2$, οπότε

$$j_\mu^{(3)} + j_\mu^{(Y_L)} + j_\mu^{(Y_R)} = -\bar{e}_L \gamma_\mu e_L - \bar{e}_R \gamma_\mu e_R = -\bar{e} \gamma_\mu e = q_e \bar{e} \gamma_\mu e$$

που είναι το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα. Δηλαδή, το φορτίο κάθε ψ θα δίνεται από τη σχέση

$$Q = t_3 + \frac{Y_{(L)}}{2} \quad \text{για τα } L, \quad Q = \frac{Y_{(R)}}{2} \quad \text{για τα } R$$

όπου

$$t_3 = \pm \frac{1}{2} \quad \text{για τις πάνω και κάτω συνιστώσες της } L \text{ διπλέτας}$$

Αυτό αναμενόταν, μιας και κάθε κατάσταση έχει καθορισμένο φορτίο. Οπότε, ο τελεστής του φορτίου θα πρέπει να είναι διαγώνιος πίνακας, άρα γραμμικός συνδυασμός του t_3 και του Y .

Ας επαληθεύσουμε ότι ο συνδυασμός $Q = t_3 + \frac{Y}{2}$ δίνει το σωστό φορτίο σε κάθε σωματίδιο.

$$\text{για το } \nu_{eL} : \quad +\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} = 0$$

$$\text{για το } e_L : \quad -\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} = -1$$

$$\text{για το } e_R : \quad 0 + \frac{-2}{2} = -1$$

Αντίστοιχα, βρίσκουμε την τιμή του Y για την διπλέτα των κουάρκ και των δεξιόστροφων πεδίων

$$Y = \frac{1}{3}, \text{ για το } \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad Y = \frac{4}{3}, \text{ για το } u_R, \quad Y = -\frac{2}{3}, \text{ για το } d_R$$

Εφ' όσον το φορτίο είναι γραμμικός συνδυασμός του t_3 και του Y , το φωτόνιο θα είναι γραμμικός συνδυασμός του W_3^μ και του B^μ

$$W_3^\mu = \sin \theta_W A^\mu + \cos \theta_W Z^\mu$$

$$B^\mu = \cos \theta_W A^\mu - \sin \theta_W Z^\mu$$

όπου θ_W η γωνία Weinberg που μας πηγαίνει από το ζευγάρι (W_3^μ, B^μ) στο (A^μ, Z^μ) . Τώρα, οι όροι αλληλεπίδρασης των ρευμάτων $j_\mu^{(3)}$ και $j_\mu^{(Y)}$ γίνονται

$$\begin{aligned} & -igj_\mu^{(3)}W_3^\mu - ig'\frac{1}{2}j_\mu^{(Y)}B^\mu = \\ & = -i \left[g \sin \theta_W j_\mu^{(3)} + g'\frac{1}{2} \cos \theta_W j_\mu^{(Y)} \right] A^\mu - \\ & \quad - i \left[g \cos \theta_W j_\mu^{(3)} - g'\frac{1}{2} \sin \theta_W j_\mu^{(Y)} \right] Z^\mu = \\ & = -ig \sin \theta_W \left[j_\mu^{(3)} + \frac{g'}{g} \frac{1}{\tan \theta_W} \frac{1}{2} j_\mu^{(Y)} \right] A^\mu - \\ & \quad - i \frac{g}{\cos \theta_W} \left[\cos^2 \theta_W j_\mu^{(3)} - \frac{1}{2} \frac{g'}{g} \sin \theta_W \cos \theta_W j_\mu^{(Y)} \right] Z^\mu \end{aligned}$$

Αν $\frac{g'}{g} = \tan \theta_W$, τότε, ο πρώτος όρος γίνεται

$$\begin{aligned}
 & -ig \sin \theta_W \left[j_\mu^{(3)} + \frac{g'}{g} \frac{1}{\tan \theta_W} \frac{1}{2} j_\mu^{(Y)} \right] A^\mu = \\
 & -ig \sin \theta_W \left[j_\mu^{(3)} + \frac{1}{2} j_\mu^{(Y)} \right] A^\mu \equiv -ie j_\mu^{(em)} A^\mu
 \end{aligned}$$

όπου

$$e = g \sin \theta_W, \quad \text{και} \quad j_\mu^{(em)} = j_\mu^{(3)} + \frac{1}{2} j_\mu^{(Y)}$$

Ο δεύτερος όρος, ανάλογος του Z^μ , γίνεται

$$\begin{aligned}
 & -i \frac{g}{\cos \theta_W} \left[\cos^2 \theta_W j_\mu^{(3)} - \frac{1}{2} \frac{g'}{g} \sin \theta_W \cos \theta_W j_\mu^{(Y)} \right] Z^\mu = \\
 & = -i \frac{g}{\cos \theta_W} \left[\cos^2 \theta_W j_\mu^{(3)} - \sin^2 \theta_W \frac{1}{2} j_\mu^{(Y)} \right] Z^\mu = \\
 & = -i \frac{g}{\cos \theta_W} \left[\cos^2 \theta_W j_\mu^{(3)} - \sin^2 \theta_W \left(j_\mu^{(em)} - j_\mu^{(3)} \right) \right] Z^\mu = \\
 & = -i \frac{g}{\cos \theta_W} \left[j_\mu^{(3)} - \sin^2 \theta_W j_\mu^{(em)} \right] Z^\mu
 \end{aligned}$$

Ο μηχανισμός Higgs

Θα πρέπει τώρα να εφαρμόσουμε τον μηχανισμό Higgs ώστε τα $W^\pm$ και Z να αποκτήσουν μάζα, ενώ το φωτόνιο να παραμείνει άμαζο. Εισάγουμε μια διπλέτα ϕ με $Y = 1$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

Βέβαια, θα προσθέσουμε στη Λαγκραντζιανή τους κατάλληλους όρους, κινητικό και δυναμικού, για το ϕ

$$\mathcal{L}_\phi = \left[\left(\partial_\mu + ig \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{W}_\mu + ig' \frac{1}{2} B^\mu \right) \phi \right]^2 - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

με $\mu^2 < 0$ και $\lambda > 0$. Επιλέγουμε για

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

με $v^2 = -\mu^2/\lambda$. Γιατί αυτή η επιλογή: μια διπλέτα μιγαδικών πεδίων με $Y = 1$ και τη συγκεκριμένη επιλογή του κενού, είναι η κατάλληλη για την περίπτωσή μας;

Κάθε τιμή του ϕ_0 που παραβιάζει μια συμμετρία θα δημιουργήσει όρο μάζας για το αντίστοιχο μποζόνιο βαθμίδας. Αλλά, αν το ϕ_0 παραμένει αναλλοίωτο από κάποια υποομάδα των μετασχηματισμών βαθμίδας, το μποζόνιο βαθμίδας που αντιστοιχεί σ' αυτήν την υποομάδα θα παραμείνει άμαζο. Η επιλογή του $\phi_0 = \nu$ παραβιάζει την $SU(2)$ και την $U(1)$. Αλλά, το ηλεκτρικό φορτίο του ϕ_0 είναι

$$Q = t_3 + Y/2 = -1/2 + 1/2 = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$Q\phi_0 = 0$$

και βέβαια

$$\phi_0 \rightarrow e^{i\alpha(x)Q}\phi_0 = \phi_0$$

Δηλαδή, το κενό παραμένει αναλλοίωτο στο μετασχηματισμό $U(1)_{em}$ και το φωτόνιο παραμένει άμαζο. Από τους τέσσερις γεννήτορες του $SU(2) \times U(1)$, $\tau/2$ και Y , μόνο ο συνδυασμός Q υπακούει την σχέση $Q\phi_0 = 0$. Οι άλλοι τρεις παραβιάζουν την συμμετρία και δημιουργούν όρους μάζας. Με άλλα λόγια, λόγω της διατήρησης του φορτίου, μόνο αφόρτιστα βαθμωτά πεδία μπορούν να αποκτήσουν αναμενόμενη τιμή στο κενό διάφορη του μηδενός.

Οι μάζες των μποζονίων βαθμίδας

Οι μάζες θα προέλθουν από τον κινητικό ορο της

Λαγκραντζιανής του ϕ , επιλέγοντας την αναμενόμενη τιμή του κενού ϕ_0

$$\begin{aligned}
 & \left| \left(ig \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{W}_\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \phi \right|^2 = \\
 &= \frac{1}{8} \left| \begin{pmatrix} gW_\mu^{(3)} + g'B_\mu & g(W_\mu^{(1)} - iW_\mu^{(2)}) \\ g(W_\mu^{(1)} + iW_\mu^{(2)}) & -gW_\mu^{(3)} + g'B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right|^2 = \\
 &= \frac{v^2 g^2}{8} \left[(W_\mu^{(1)})^2 + (W_\mu^{(2)})^2 \right] + \frac{v^2}{8} \left(g'B_\mu - gW_\mu^{(3)} \right) \left(g'B^\mu - gW^{\mu(3)} \right) = \\
 &= \left(\frac{vg}{2} \right)^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{v^2}{8} \left(W_\mu^{(3)} B_\mu \right) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{(3)\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

όπου $W^\pm = (W^{(1)} \mp iW^{(2)})/\sqrt{2}$. Βλέπουμε άμεσα από τον πρώτο όρο ότι η μάζα των $W^\pm$

$$M_W = \frac{1}{2}vg$$

Ο δεύτερος όρος θα πρέπει να διαγωνοποιηθεί. Τα ιδιοδιανύσματα και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{g^2}{gg'} \end{pmatrix} \text{ με ιδιοτιμή } 0, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-g'^2}{gg'} \end{pmatrix} \text{ με ιδιοτιμή } g^2 + g'^2$$

Επομένως, ο γραμμικός συνδυασμός των $W^{(3)}$ και B που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές είναι

$$\frac{1}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{g^2}{gg'} \\ 1 & \frac{-g'^2}{gg'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{(3)} \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \begin{pmatrix} g'W^{(3)} + gB \\ gW^{(3)} - g'B \end{pmatrix}$$

Έτσι

$$A_\mu \equiv \frac{g' W_\mu^{(3)} + g B_\mu}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \quad \mu\epsilon \quad m_A = 0$$

$$Z_\mu \equiv \frac{g W_\mu^{(3)} - g' B_\mu}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \quad \mu\epsilon \quad m_Z^2 = \frac{v^2}{4} (g^2 + g'^2)$$

Επειδή $g'/g = \tan \theta_W$, οπότε

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g'^2 + g^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g'^2 + g^2}}$$

μπορούμε να γράψουμε

$$A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^{(3)} + \cos \theta_W B_\mu$$

$$Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^{(3)} - \sin \theta_W B_\mu$$

όπως ακριβώς και στα ρεύματα.

Το ότι το φωτόνιο παραμένει άμαζο, είναι δική μας κατασκευή!
Ο λόγος των μαζών του W και

$$\frac{M_W}{M_Z} = \frac{vg/2}{v\sqrt{g^2 + g'^2}/2} = \cos \theta_W$$

είναι πρόβλεψη που εξαρτάται από το ότι το H είναι διπλέτα.
Δηλαδή, στο πρότυπό μας, η παράμετρος ρ είναι

$$\rho \equiv \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} = 1$$

Από τις σχέσεις

$$\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}, \quad M_W^2 = \frac{1}{4}g^2 v^2$$

και με γνωστή την τιμή του G_F , παίρνουμε

$$v = 246 \text{ GeV}$$

Οπότε

$$M_W = \frac{1}{2} g v = \frac{1}{2} \frac{e}{\sin \theta_W} \sim \frac{37.3 \text{ GeV}}{\sin \theta_W}$$
$$M_Z \sim \frac{74.6 \text{ GeV}}{\sin 2\theta_W}$$

Το 1982 παρατηρήθηκαν W και Z σε αντιδράσεις $p\bar{p} \rightarrow ZX \rightarrow (e^+e^-)X$ και $p\bar{p} \rightarrow W^\pm X \rightarrow (e^\pm\nu)X$, με $M_W \sim 81$ GeV και $M_Z \sim 93$ GeV.

Μάζες φερμιονίων

Ο όρος μάζας για τα φερμιόνια είναι $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$. Τώρα όμως τα αριστερόστροφα πεδία είναι ανήκουν σε διπλέτα της $SU(2)$, αντίθετα με τα δεξιόστροφα που βλέπουν μόνο την $U(1)$. Επομένως, ο όρος της μάζας δεν παραμένει αναλλοίωτος σε μετασχηματισμούς. Στο σημείο αυτό έρχεται πάλι το H . Προσθέτουμε στην Λαγκραντζιανή τους όρους (ας περιοριστούμε μόνο στη μάζα του ηλεκτρόνιου)