

Ακολουθούμε τον κλασικό τρόπο προσέγγισης. Η κλασική Λαγκραντζιανή κβαντίζεται. Τα πεδία γίνονται τελεστές δημιουργίας και καταστροφής. Οι αλληλεπιδράσεις υπολογίζονται μέσω της θεωρίας διαταραχών. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας μεταφράζεται σε ένα σύνολο κανόνων Feynman. Μέσω αυτών μπορούμε να ελέγχουμε τις φυσικές διεργασίες που περιγράφει μια Λαγκραντζιανή. Εδώ δεν θα ακολουθήσουμε τον “κανονικό φορμαλισμό”. Θα ακολουθήσουμε την πεποίθηση ότι τα “διαγράμματα Feynman περιγράφουν πολλά περισσότερα από ό,τι ένας απλός φορμαλισμός” (t’Hooft και Veltman).

Θεώρημα Noether. Συμμετρίες και νόμοι διατήρησης

Γνωρίζουμε ότι η αναλλοιωτότητα σε χωρική μετάθεση οδηγεί στη διατήρηση ορμής, η αναλλοιωτότητα σε στροφές οδηγεί στη διατήρηση της στροφορμής και η αναλλοιωτότητα σε μετάθεση στο χρόνο οδηγεί στη διατήρηση της ενέργειας. Εδώ, θα ενδιαφερθούμε για εσωτερικές συμμετρίες. Μετασχηματισμοί που μετατίθενται με την χωροχρονική εξάρτηση της κυματοσυνάρτησης.

Για παράδειγμα, η Λαγκραντζιανή που περιγράφει το ηλεκτρόνιο

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

παραμένει αναλλοίωτη στον μετασχηματισμό

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x)$$

Πράγματι, πολύ εύκολα φαίνεται ότι

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x), \quad \partial_\mu\psi \rightarrow e^{i\alpha}\partial_\mu\psi(x)$$

Οι οικογένεια των μετασχηματισμών φάσης $U(a) = e^{i\alpha}$ αποτελεί την μονοπαραμετρική αβελιανή ομάδα που συμβολίζεται με $U(1)$. Ο όρος Αβελιανή αναφέρεται στην αντιμεταθετικότητα

$$U(\alpha_1)U(\alpha_2) = U(\alpha_2)U(\alpha_1)$$

Ενώ αυτός ο μετασχηματισμός φαντάζει απλοϊκός, έχει τεράστια σημασία. Η αναλλοιότητα κάτω από μετασχηματισμούς $U(1)$, οδηγεί στην διατήρηση του ρεύματος. Ας πάρουμε απειροστό μετασχηματισμό

$$U(\alpha) = 1 + i\alpha, \quad \psi \rightarrow (1 + i\alpha)\psi, \quad \partial_\mu\psi \rightarrow (1 + i\alpha)\partial_\mu\psi$$

Αναλλοιώτητα σημαίνει $\delta\mathcal{L} = 0$. Οπότε

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi) + \delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} + \delta(\partial_\mu\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = \\
 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}(i\alpha\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}(i\alpha\partial_\mu\psi) + (-i\alpha\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} + (-i\alpha\partial_\mu\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = \\
 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}(i\alpha\psi) - \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right) \right] i\alpha\psi + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi \right] i\alpha - \\
 &\quad - i\alpha\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} + i\alpha\bar{\psi} \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \right) \right] - i\alpha\partial_\mu \left[\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \right] = \\
 &= i\alpha \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right] \psi + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi \right] i\alpha - \\
 &\quad - i\alpha\bar{\psi} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \right] - i\alpha\partial_\mu \left[\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \right] = \\
 &= (i\alpha)\partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi - \bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \right]
 \end{aligned}$$

Η πρώτη και η τρίτη αγκύλη μηδενίζονται (Εξίσωση Lagrange).
Επομένως, η απαίτηση $\delta\mathcal{L} = 0$ οδηγεί στη σχέση

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

όπου το ρεύμα

$$j^\mu = \frac{ie}{2} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi - \bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \right) = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Η σταθερά εκλέγεται κατάλληλα ώστε το ρεύμα να συμπίπτει με την ηλεκτρομαγνητική πυκνότητα ρεύματος για το ηλεκτρόνιο με φορτίο $-e$. Άμεσα έπεται ότι το φορτίο

$$Q = \int d^3x j^0$$

είναι μια διατηρήσιμη ποσότητα λόγω της αναλλοιώτητας φάσης $U(1)$

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \partial_0 j_0 = \int d^3x (\partial_\mu j^\mu - \nabla\mathbf{j}) = - \int d^3x \nabla\mathbf{j} = 0$$

όπου η διατήρηση του ρεύματος δίνει $\partial_\mu j^\mu = 0$, ενώ το τελευταίο ολοκλήρωμα μηδενίζεται, μετατρέποντας το σε επιφανειακό ολοκλήρωμα του ρεύματος και θεωρώντας ότι το ρεύμα μηδενίζεται πηγαίνοντας την επιφάνεια στο άπειρο. Για την Λαγκραντζιανή ενός μιγαδικού βαθμωτού πεδίου

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi \phi^*$$

με μια διαδικασία τελείως ανάλογη με αυτή που κάναμε για το πεδίο Dirac, το διατηρησιμο ρεύμα, λόγω της αναλλοιωτότητας σε $U(1)$, είναι

$$j^\mu = (ie) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \phi^* \right]$$

που δίνει

$$j^\mu = -ie (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$$

Προσέξτε ότι η Λαγκραντζιανή για το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$, έχει κατάλληλο νορμαλισμό ώστε

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(\phi_1) + \mathcal{L}(\phi_2)$$

με $\mathcal{L}(\phi_i)$ η Λαγκραντζιανή του πραγματικού βαθμωτού πεδίου.

Ο μετασχηματισμός $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$ σημαίνει ότι το α ΔΕΝ είναι μετρήσιμο, ΔΕΝ έχει φυσική σημασία και η τιμή του μπορεί να διαλεχτεί αυθαίρετα, φυσικά την ίδια για όλα τα σημεία του χωροχρόνου. Μιλάμε για μια “ολική βαθμίδα” (global gauge).

Τοπική $U(1)$ συμμετρία βαθμίδας και ΚΗΔ

Αναγάγουμε την φάση α σε συνάρτηση του x . Οπότε έχουμε τον λεγόμενο “τοπικό μετασχηματισμό βαθμίδας”

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi \quad \text{και} \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}$$

Αυτός ο μετασχηματισμός ΔΕΝ αφήνει αναλλοίωτη την Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Πράγματι, ο δεύτερος όρος παραμένει αναλλοίωτος αλλά ο πρώτος όχι, μιας και

$$\partial_\mu\psi \rightarrow \partial_\mu(e^{i\alpha(x)}\psi) = e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi + ie^{i\alpha(x)}\psi\partial_\mu\alpha(x)$$

Αν επιμένουμε να ζητάμε την αναλλοιώτητα της Λαγκραντζιανής κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας, θα πρέπει να βρούμε μια “κατάλληλη” (συναλλοίωτη) παράγωγο, D_μ ,

που να μετασχηματίζεται

$$D_\mu \psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi$$

Για να το επιτύχουμε αυτό εισάγουμε ένα νέο πεδίο A_μ και ορίζουμε

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$$

απαιτώντας το νέο πεδίο να μετασχηματίζεται ως

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$$

Τότε βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &= (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \psi + ie^{i\alpha(x)} \psi \partial_\mu \alpha(x) \\ &\quad - (ie) e^{i\alpha(x)} A_\mu \psi - ie \frac{1}{e} e^{i\alpha(x)} \psi \partial_\mu \alpha(x) = \\ &= e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi = e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi \end{aligned}$$

Οπότε, η νέα αναλλοίωτη Λαγκραντζιανή γράφεται

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} D_\mu \gamma^\mu \psi - m\bar{\psi} \psi = i\bar{\psi} \partial_\mu \gamma^\mu \psi - m\bar{\psi} \psi + e\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$$

Υποχρεωθήκαμε, λοιπόν, στην εισαγωγή του πεδίου βαθμίδας A_μ , που αλληλεπιδρά με το ψ όπως ακριβώς το φωτόνιο. Αν το A_μ είναι φυσικό πεδίο, χρειάζεται και κινητικό όρο. Ο όρος αυτός είναι $(1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, που είναι αναλλοίωτος κάτω από τον μετασχηματισμό του A_μ . Έτσι, καταλήγουμε στην Λαγκραντζιανή της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής (ΚΗΔ)

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Παρουσία μάζας για το A_μ αντιστοιχεί στον όρο $M^2 A^\mu A_\mu$ που όμως δεν παραμένει αναλλοίωτος στον μετασχηματισμό του A_μ . Το φωτόνιο δεν μπορεί να έχει μάζα.

Περιμέναμε την εμφάνιση ενός νέου πεδίου. Αν αλλάξουμε τη φάση ($\alpha(x)$) τοπικά, θα δημιουργούσε μια μετρήσιμη διαφορά φάσης, αν δεν μπορούσε να αντισταθμιστεί. Το ενδιαφέρον είναι ότι αυτό το αντιστάθμισμα γίνεται από το A_μ . Περιμένουμε επίσης το πεδίο αυτό να έχει άπειρη ακτίνα δράσης (το φωτόνιο άμαζο), μιας και το αντιστάθμισμα πρέπει να γίνει σε όλα τα σημεία του χωροχρόνου.

Συμπερασματικά, απαιτώντας αναλλοιωτότητα σε τοπική αλλαγή φάσης της ελεύθερης Λαγκραντζιανής, οδηγούμαστε σε μια θεωρία με αλληλεπιδράσεις, την ΚΗΔ. Αυτό που φάνταζε σαν μια παραξενιά της θεωρίας του Maxwell, γίνεται τώρα σημαντικό στοιχείο.

Μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας και Κβαντική Χρωμοδυναμική

Η Κβαντική Χρωμοδυναμική βασίζεται στην ομάδα $SU(3)$. Η ελεύθερη Λαγκραντζιανή είναι

$$\mathcal{L} = \bar{q}_j (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) q_j, \quad \text{όπου } j = 1, 2, 3, \text{ τα τρία χρώματα}$$

Θα συγκεντρωθούμε προς στιγμή σε μια “γεύση” κουαρκ.
Ο μετασχηματισμός του πεδίου $q(x)$ είναι τώρα

$$q(x) \rightarrow Uq(x) = e^{i\alpha_j(x)T_j}q(x)$$

όπου U είναι ένας μοναδιακός (unitary) 3×3 πίνακας. Οι πίνακες T_j είναι οι 8 γενήτορες της $SU(3)$ ($j = 1, 2, \dots, 8$) και α_j οι παράμετροι του μετασχηματισμού.

Άσκηση 52 Για μοναδιακό μετασχηματισμό ($U^\dagger U = 1$), ισχύει ότι $\det U = e^{i\phi}$ με $\phi \in \mathbb{R}$. Αν περιοριστούμε στους μοναδιακούς πίνακες με $\det U = +1$ (ειδικούς μοναδιακούς, special unitary), τότε $\text{Tr}(T_j) = 0$, και $\alpha_i T_j = \alpha_j^* T_i^\dagger$.

Η ομάδα $SU(3)$ δεν είναι αβελιανή και οι γεννήτορές της T_i πληρούν τη σχέση

$$[T_i, T_j] = if_{ijk} T_k$$

όπου f_{ijk} είναι οι σταθερές δομής (structure constants) της ομάδας. Οι σταθερές αυτές είναι πραγματικές και πλήρως αντισυμμετρικές στους δείκτες i, j, k .

Άσκηση 53 Δείξτε ότι οι σταθερές αυτές είναι πλήρως αντισυμμετρικές στους δείκτες i, j, k .

Θεωρώντας απειροστούς μετασχηματισμούς, παίρνουμε

$$\begin{aligned} q(x) &\rightarrow (1 + i\alpha_j(x) T_j) q(x) \\ \partial_\mu q(x) &\rightarrow (1 + i\alpha_j(x) T_j) \partial_\mu q(x) + iT_j q(x) \partial_\mu \alpha_j \end{aligned}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στην ΚΗΔ, θα εισάγουμε 8 νέα πεδία G_j^μ που μετασχηματίζονται

$$G_j^\mu \rightarrow G_j^\mu - \frac{1}{g} \partial^\mu \alpha_j$$

και θα εισάγουμε την συναλλοίωτη παράγωγο

$$D^\mu = \partial^\mu + ig T_j G_j^\mu$$

Οπότε, η Λαγκραντζιανή γίνεται

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma_\mu T_j q)G_j^\mu$$

Ας δούμε πώς μετασχηματίζεται κάθε όρος

$$\begin{aligned} m\bar{q}q &\rightarrow m\bar{q}(1 - i\alpha_j(x)T_j)(1 + i\alpha_i(x)T_i)q = m\bar{q}q + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ i\bar{q}\gamma^\mu \partial_\mu q &\rightarrow i\bar{q}(1 - i\alpha_i(x)T_i)\gamma^\mu \partial_\mu (1 + i\alpha_j(x)T_j)q = \\ &= -i\bar{q}\gamma^\mu \partial_\mu q - \bar{q}\gamma^\mu T_j q \partial_\mu \alpha_j(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-g\bar{q}\gamma_\mu T_j q G_j^\mu &\rightarrow -g\bar{q}(1 - i\alpha_i(x)T_i)\gamma_\mu T_j(1 + i\alpha_m(x)T_m)q \cdot \\
&\quad \cdot (G_j^\mu - \frac{1}{g}\partial^\mu\alpha_j) = \\
&= -g\bar{q}\gamma_\mu T_j q G_j^\mu - ig\alpha_m\bar{q}\gamma_\mu[T_j, T_m]q G_j^\mu - \\
&\quad + g\frac{1}{g}\bar{q}\gamma_\mu T_j q\partial^\mu\alpha_j(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) = \\
&= -g\bar{q}\gamma_\mu T_j q G_j^\mu + \underline{g\alpha_m\bar{q}\gamma_\mu f_{jmr}T_r q G_j^\mu} - \\
&\quad + \bar{q}\gamma_\mu T_j q\partial^\mu\alpha_j(x) + \mathcal{O}(\alpha^2)
\end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι μας μένει ο όρος $g\alpha_m\bar{q}\gamma_\mu f_{jmr}T_r q G_j^\mu$ που χαλάει την αναλλοιωτήτα. Αλλά, αν αναβαθμίσουμε το μετασχηματισμό του πεδίου βαθμίδας

$$G_j^\mu \rightarrow G_j^\mu - \frac{1}{g}\partial^\mu\alpha_j - f_{jms}\alpha_m G_s^\mu$$

στον μετασχηματισμό του όρου $-g\bar{q}\gamma_\mu T_j q G_j^\mu$ θα εμφανιστεί ο επιπλέον όρος

$$g\alpha_m\bar{q}\gamma_\mu f_{jms}T_j q G_s^\mu$$

Κάνοντας την αλλαγή στους “τυφλούς” δείκτες $j \rightarrow r$ και $s \rightarrow j$, παίρνουμε

$$g\alpha_m \bar{q}\gamma_\mu f_{rmj} T_r q G_j^\mu = -g\alpha_m \bar{q}\gamma_\mu f_{jmr} T_r q G_j^\mu$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $f_{rmj} = -f_{jmr}$. Οπότε, βλέπουμε ότι ο όρος που χαλούσε την αναλλοιωτήτητα εξαλείφεται. Βέβαια, στην Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma_\mu T_j q)G_j^\mu$$

θα πρέπει να προσθέσουμε τον κινητικό όρο του πεδίου βαθμίδας, τον αντίστοιχο του $-(1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Έτσι έχουμε

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma_\mu T_j q)G_j^\mu - \frac{1}{4}G_j^{\mu\nu}G_{\mu\nu j}$$

όπου όμως, ο αναβαθμισμένος μετασχηματισμός του πεδίου βαθμίδας μας υποχρεώνει να ορίσουμε

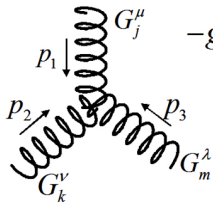
$$G_j^{\mu\nu} = \partial^\mu G_j^\nu - \partial^\nu G_j^\mu - gf_{jrs}G_r^\mu G_s^\nu$$

Η παραπάνω Λαγκραντζιανή περιγράφει “έγχρωμα” κουάρκ και γκλουόνια και είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς της ομάδας $SU(3)$. Τα γκλουόνια είναι και πάλι άμαζα.

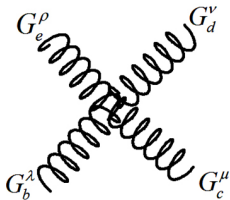
Χρησιμοποιώντας την συναλλοίωτη παράγωγο μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q - \frac{1}{4}G_j^{\mu\nu}G_{\mu\nu j}$$

Ποιο είναι το καινούργιο στοιχείο με τα γκλουόνια; Ο κινητικός όρος περιέχει όρο αυτο-αλληλεπίδρασης μεταξύ των γκλουονίων: $gGGG$ και g^2GGGG .



$$-gf_{jkm}[(p_1 - p_2)_\lambda g_{\mu\nu} + (p_2 - p_3)_\mu g_{\nu\lambda} + (p_3 - p_1)_\nu g_{\mu\lambda}]$$



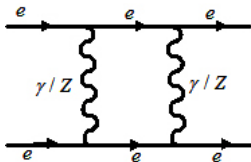
$$-ig^2[f_{abc}f_{ade}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}) + f_{adc}f_{abe}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}) + f_{abd}f_{ace}(g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho} - g_{\nu\mu}g_{\lambda\rho})]$$

Μη αβελιανές θεωρίες - Yang-Mills θεωρίες

Η μικρή ακτίνα δράσης των ασθενών αλληλεπιδράσεων μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα σωματίδια υπεύθυνα για αυτήν την αλληλεπίδραση (τα αντίστοιχα σωματίδια βαθμίδας) πρέπει να έχουν μάζα, πράγμα που δεν επιτρέπεται στις θεωρίες βαθμίδας (Θ.Β.). Οπότε, η εισαγωγή των Θ.Β. ήταν από ομορφιά μόνο; Μπορούμε να αγνοήσουμε τις Θ.Β. και να βάλουμε όρο μάζας, για π.χ. $M^2 W^\mu W_\mu$, στην Λαγκραντζιανή; Αν το εφαρμόσουμε, θα συναντήσουμε απειρίες στους υπολογισμούς μας που δεν μπορούμε ούτε να “διώξουμε” ούτε να “κρύψουμε”.

Στο παρακάτω διάγραμμα “ενός βρόχου”, αν τα σωματίδια με την κυματιστή γραμμή είναι φωτόνια, κάθε διαδότης του φωτονίου συνεισφέρει όρο $\sim 1/q^2$ ενώ κάθε διαδότης του ηλεκτρονίου συνεισφέρει όρο $\sim 1/q$, όπου q είναι η ορμή στο βρόχο που είναι ελεύθερη (μετά την διατήρηση της ορμής σε κάθε κορυφή), οπότε και θα πρέπει να ολοκληρώσουμε την ορμή αυτή: $\int d^4 q$

$$\int d^4 q \frac{1}{q^2} \frac{1}{q^2} \frac{1}{\not{q} + m} \frac{1}{\not{q} + m}$$



Για μεγάλα q το ολοκλήρωμα δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα.

Αν όμως αντί φωτόνια έχουμε σωματίδια με μάζα, ο διαδότης είναι

$$\frac{-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M^2}}{q^2 - M^2} \xrightarrow{q \rightarrow \infty} \frac{q_\mu q_\nu}{M^2 q^2}$$

οπότε, το διάγραμμα θα δίνει

$$\int d^4 q \frac{1}{\not{q} + m} \frac{1}{\not{q} + m} \frac{q_\mu q_\nu}{M^2 q^2} \frac{q_\rho q_\sigma}{M^2 q^2}$$

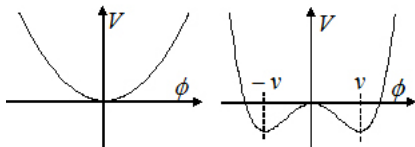
Το ολοκλήρωμα όμως τώρα αποκλίνει για μεγάλα q . Βέβαια, θα μπορούσαμε να βάλουμε ένα πάνω όριο στο ολοκλήρωμα, ως μια παράμετρο που θα μας δώσει το πείραμα. Αλλά, πηγαίνοντας σε διαγράμματα με περισσότερους βρόχους, οι απειρίες χειροτερεύουν και χρειαζόμαστε όλο και καινούργιες παραμέτρους. Μια τέτοια θεωρία ονομάζεται μη “ανακανονικοποιήσιμη” και δεν μπορεί να έχει προβλεψιμότητα.

Κρυμμένη συμμετρία - Αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας

Ας θεωρήσουμε την Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \left(\frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4 \right)$$

η οποία έχει μια συμμετρία $\phi \rightarrow -\phi$. Το λ θα πρέπει να είναι θετικό για να μπορούμε να έχουμε ελάχιστο. Για $\mu^2 > 0$, η Λαγκραντζιανή περιγράφει ένα βαθμωτό σωματίδιο με μάζα μ και αυτοαλληλεπιδράσεις. Η κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας (ground state) είναι $\phi = 0$ και η κατάσταση αυτή υπακούει τη συμμετρία $\phi \rightarrow -\phi$. Για $\mu^2 < 0$, όμως, βλέπουμε ότι $\phi = 0$ δεν είναι ολικό ελάχιστο.



Πράγματι

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0 \rightarrow \phi = \pm\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv \pm v$$

Εφαρμόζουμε θεωρία διαταραχών γύρω από ένα από τα ελάχιστα, επιλέγοντας το $\phi = +v$

$$\phi(x) = v + \eta(x)$$

όπου $\eta(x)$ περιγράφει τις κβαντικές διαταραχές γύρω από το ελάχιστο. Η Λαγκραντζιανή γίνεται

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \lambda v^2 \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \text{σταθερά}$$

Ο δεύτερος όρος μας δείχνει ότι το η έχει μάζα

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Αλλά, η $\mathcal{L}$ και η $\mathcal{L}'$ είναι ισοδύναμες. Ένας μετασχηματισμός δεν μπορεί να αλλάξει τη φυσική που περιγράφει η Λαγκραντζιανή. Αν μπορούσαμε να “λύσουμε” πλήρως την $\mathcal{L}$ και την $\mathcal{L}'$ θα βρίσκαμε τα ίδια αποτελέσματα. Αλλά, στη θεωρία διαταραχών υπολογίζουμε διαταραχές γύρω από ένα ελάχιστο. Με την $\mathcal{L}$, η σειρά της θεωρίας διαταραχών δεν θα συνέκλινε γιατί θα αναπτύσσαμε γύρω από ένα ασταθές ελάχιστο, $\phi = 0$.

Αυθόρμητη παραβίαση ολικής θεωρίας βαθμίδας

Η Λαγκραντζιανή για μιγαδικό πεδίο $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ είναι

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - (\mu^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^* \phi)^2) = \\ &= (\partial\phi_1)^2 + (\partial\phi_2)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2\end{aligned}$$

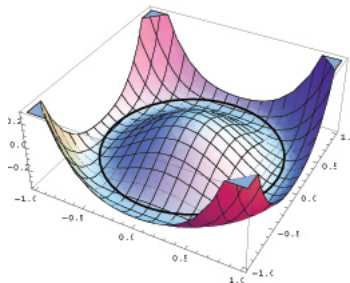
Για $\lambda > 0$ και $\mu^2 < 0$, στο χώρο των (ϕ_1, ϕ_2) υπάρχει μια περιφέρεια $\phi_1^2 + \phi_2^2 = -\mu^2/\lambda \equiv v^2$ που η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη.

Σ' αυτήν την περιφέρεια, επιλέγουμε ένα σημείο

$$\phi_1 = v, \quad \text{και} \quad \phi_2 = 0$$

και γράφουμε το $\phi(x)$

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} [v + \eta(x) + i\xi(x)]$$



όπου η είναι η “ακτινική” διαταραχή και ξ η διαταραχή στην κατεύθυνση της περιφέρειας του ελάχιστου, γύρω από το ελάχιστο που διαλέξαμε. Η Λαγκραντζιανή γράφεται

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \mu^2 \eta^2 + \text{σταθερές} + (\text{κυβικοί όροι σε } \eta \text{ και } \xi)$$

βλέπουμε πάλι το πεδίο η να έχει μάζα $m_\eta = \sqrt{-2\mu^2}$, αλλά το πεδίο ξ είναι άμαζο. Είναι το λεγόμενο “μποζόνιο” Goldstone. Επομένως, προσπαθώντας να παραβιάσουμε τη συμμετρία, επιλέγοντας το συγκεκριμένο ελάχιστο, δώσαμε μάζα σε ένα σωματίδιο αλλά μας μένει και ένα άμαζο. Το τελευταίο το περιμέναμε. Το ξ είναι στην διεύθυνση της περιφέρειας του ελάχιστου. Σ’ αυτή τη διεύθυνση δεν υπάρχει ελάχιστο. Το παράδειγμά μας είναι μια εφαρμογή του Θεωρήματος Goldstone, που αναφέρει ότι όποτε παραβιάζουμε αυθόρμητα μια ολική συμμετρία, εμφανίζονται άμαζα βαθμωτά πεδία. Επομένως, τι μπορούμε να κάνουμε με την ασθενή αλληλεπίδραση, που τα σωματίδια βαθμίδας W και Z έχουν μάζα, αλλά χωρίς να εμφανιστούν άμαζα σωματίδια;

Άσκηση 49 Δείξτε ότι η Langragian

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

οδηγεί, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Langrage, στην εξίσωση Dirac για το ψ και το $\bar{\psi}$ που θεωρούνται ανεξάρτητες μεταβλητές

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0, \quad i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

(Π)

Λύση

Η εξίσωση Langrage για το ψ είναι

$$\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\psi} = 0$$

Ο δεύτερος όρος της Lagrangian δίνει

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\psi} = \frac{\partial}{\partial\psi} (-m\bar{\psi}\psi) = -m\bar{\psi}$$

Ο πρώτος όρος δίνει

$$\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\psi)} = \partial_\beta \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta\psi)} (i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi) = \partial_\beta (i\bar{\psi}\gamma^\mu g_\mu^\beta) = i\partial_\beta\bar{\psi}\gamma^\beta$$

Και η εξίσωση Lagrange δίνει

$$\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow i\partial_\beta \bar{\psi} \gamma^\beta + m\bar{\psi} = 0$$

Για να πάρουμε την εξίσωση Dirac για το ψ , θα πρέπει να εφαρμόσουμε την εξίσωση Lagrange για το $\bar{\psi}$

$$\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0$$

Προσθέτουμε στην Lagrangian (πυκνότητα) $\mathcal{L}$ μια ολική παράγωγο: $-\partial_\mu (i\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$. Αυτός ο όρος δεν επηρεάζει την “φυσική”. Οπότε, γράφουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi - \partial_\mu (i\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = \\ &= i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi - i(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - i\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) = \\ &= -m\bar{\psi} \psi - i(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \end{aligned}$$

Και παίρνουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} (-m\bar{\psi}\psi) = -m\psi$$

και

$$\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \bar{\psi})} = \partial_\beta \frac{\partial}{\partial (\partial_\beta \bar{\psi})} (-i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi) = \partial_\beta (-ig_\mu^\beta \gamma^\mu \psi) = -i\gamma^\beta \partial_\beta \psi$$

και η εξίσωση Lagrange δίνει

$$-i\gamma^\beta \partial_\beta \psi + m\psi = 0 \Rightarrow i\gamma^\beta \partial_\beta \psi - m\psi = 0$$

Άσκηση 50 Δείξτε ότι η Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$$

οδηγεί, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Lagrange, στις εξισώσεις του Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

όπου βέβαια $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. (Π)

Λύση

Οι εξισώσεις Lagrange είναι

$$\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = 0$$

Από τον δεύτερο όρο θα έχουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \frac{\partial}{\partial A_\alpha} (-j^\mu A_\mu) = -j^\mu g_\mu^\alpha = -j^\alpha$$

Για τον πρώτο όρο έχουμε

$$\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = \partial_\beta \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} - \frac{1}{4} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} F_{\mu\nu} \right)$$

Ας δούμε την πρώτη παραγωγή μέσα στην παρένθεση

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = g_\mu^\beta g_\nu^\alpha - g_\nu^\beta g_\mu^\alpha$$

Αντίστοιχα, η δεύτερη παραγωγή στην παρένθεση δίνει

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - g^{\nu\beta} g^{\mu\alpha}$$

και η παρένθεση γίνεται

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \left(F^{\mu\nu} \left(g_\mu^\beta g_\nu^\alpha - g_\nu^\beta g_\mu^\alpha \right) + \left(g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - g^{\nu\beta} g^{\mu\alpha} \right) F_{\mu\nu} \right) = \\ & -\frac{1}{4} \left(F^{\beta\alpha} - F^{\alpha\beta} + F^{\beta\alpha} - F^{\alpha\beta} \right) = -F^{\beta\alpha} \end{aligned}$$

Οπότε

$$\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = -\partial_\beta F^{\beta\alpha}$$

Και οι εξισώσεις Lagrange δίνουν

$$\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = 0 \Rightarrow -\partial_\beta F^{\beta\alpha} + j^\alpha \Rightarrow \partial_\beta F^{\beta\alpha} = j^\alpha$$

Άσκηση 51 Δείξτε ότι η Langragian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$$

οδηγεί, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Langrage, οδηγεί στην εξίσωση

$$(\square^2 + m^2) A^\nu = j^\nu$$

(Π)

Λύση

Η διαφορά με την περίπτωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (Άσκηση 50) είναι η παρουσία ενός νέου όρου στο υπολογισμό της $\partial\mathcal{L}/\partial A_\alpha$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \frac{\partial}{\partial A_\alpha} \left(-j^\mu A_\mu + \frac{1}{2}m^2 A^\mu \right) = -j^\alpha + m^2 A^\alpha$$

Οπότε, οι εξισώσεις Lagrange θα δώσουν τελικά

$$\partial_\beta F^{\beta\alpha} = j^\alpha - m^2 A^\alpha$$

Αν παραγωγίσουμε την παραπάνω σχέση θα πάρουμε

$$\partial_\alpha \partial_\beta F^{\beta\alpha} = \partial_\alpha j^\alpha - m^2 \partial_\alpha A^\alpha$$

με τη διατήρηση του ρεύματος, $\partial_\alpha j^\alpha = 0$, και την αντισυμμετρικότητα του $F^{\beta\alpha}$, που οδηγεί επίσης στο $\partial_\alpha \partial_\beta F^{\beta\alpha} = 0$, καταλήγουμε στο μηδενισμό $\partial_\alpha A^\alpha = 0$. Και τότε το $\partial_\beta F^{\beta\alpha}$ απλοποιείται

$$\partial_\beta F^{\beta\alpha} = \partial_\beta (\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta) = \partial_\beta \partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha \partial_\beta A^\beta = \partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = \square^2 A^\alpha$$

Και τελικά η εξίσωση για το “φωτόνιο” με μάζα γίνεται

$$(\square^2 + m^2) A^\alpha = j^\alpha$$

Άσκηση 53 Δείξτε ότι οι σταθερές δομής της ομάδας f_{ijk} είναι πλήρως αντισυμμετρικές στους δείκτες i, j, k . (Π)

Λύση

Από την βασική σχέση

$$[T_i, T_j] = if_{ijk} T_k$$

και την αντιμεταθετικότητα του $[T_i, T_j]$, οι σταθερές δομής είναι αντισυμμετρικές στην αλλαγή $i \leftrightarrow j$. Να δείξουμε ότι ισχύει και για αλλαγή $j \leftrightarrow k$

$$\text{Tr} [T_{k'} [T_i, T_j]] = if_{ijk} \text{Tr} [T_{k'} T_k] = if_{ijk} \frac{1}{2} \delta_{k'k} = \frac{i}{2} f_{ijk'}$$

Αλλά, επίσης ισχύει

$$\begin{aligned} \text{Tr} [T_{k'} [T_i, T_j]] &= \text{Tr} [T_{k'} T_i T_j - T_{k'} T_j T_i] = \text{Tr} [T_j T_{k'} T_i - T_j T_i T_{k'}] = \\ &= \text{Tr} [T_j [T_{k'}, T_i]] = -\text{Tr} [T_j [T_i, T_{k'}]] = \\ &= -if_{ik'j'} \text{Tr} [T_j T_{j'}] = -if_{ik'j'} \frac{1}{2} \delta_{jj'} = -\frac{i}{2} f_{ik'j} \end{aligned}$$

Επομένως

$$f_{ijk'} = -f_{ik'j}$$