

Περίληψη για τον φορμαλισμό σκέδασης er

Η τελευταία σχέση γράφεται

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} \right|_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E} \left| L_{(e)}^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \right|_{\text{lab}} \quad (27)$$

όπου

$$q^2 = (k - k')^2 = -2k \cdot k' = -2EE'(1 - \cos\theta) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Θυμόμαστε ότι για $e\mu \rightarrow e\mu$ είχαμε

$$d\sigma = \frac{1}{4ME} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3p'}{(2\pi^3) 2p'_0} \left[\frac{e^4}{q^4} L_{(e)}^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{(\mu)} \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - p')$$

Αυτή η σχέση μπορεί να ξαναγραφτεί με τη μορφή της Εξ.(27)

αν αντικαταστήσουμε το $L_{\mu\nu}^{(\mu)}$ με το $W_{\mu\nu}$

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi M} \frac{1}{2} \sum_s \sum_{s'} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2p'_0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - p') \quad (28)$$
$$\times \langle p, s | \tilde{J}_\mu^\dagger | p', s' \rangle \langle p', s' | \tilde{J}_\nu | p, s \rangle$$

όπου

$$\langle p', s' | \tilde{J}_\nu | p, s \rangle = \bar{u}_{p'}^{(s')} \gamma_\nu u_p^{(s)}$$

Το μόνο που κάναμε είναι μια επανα-ομαδοποίηση των όρων.
Στην τελευταία σχέση αν γράψουμε

$$\langle p', s' | \tilde{J}_\nu | p, s \rangle = F_1(q^2) \gamma_\nu + \frac{\kappa}{2M} F_2(q^2) i \sigma_{\mu\nu} q_\nu$$

θα πάρουμε τον τύπο της ελαστικής σκέδασης ep . Γενικεύοντας, παρατηρούμε ότι το $W_{\mu\nu}$ για την σκέδαση $ep \rightarrow eX$, όπου το το πρωτόνιο “σπάει” σε N σωματίδια, είναι μια γενίκευση της Εξ.(28)

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi M} \sum_N \left(\frac{1}{2} \sum_s \right) \int \prod_{n=1}^N \frac{d^3 p'_n}{(2\pi)^3 2E'_n} \\ \times \sum_{s_n} \langle p, s | \tilde{J}_\mu^\dagger | X \rangle \langle X | \tilde{J}_\nu | p, s \rangle (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - \sum_n p'_n)$$

Έτσι, η ενεργός διατομή γράφεται γενικά, για σύστημα εργαστηρίου και μηδενική μάζα του ηλεκτρονίου,

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E} 4EE' [\dots] = \frac{4\alpha^2 E'^2}{q^4} [\dots]$$

όπου

$$[\dots] = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2M} \right), \quad \text{για } e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$$

$$[\dots] = \left(\frac{G_E^2 + G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2M} \right),$$

για $e^- p \rightarrow e^- p$

$$[\dots] = W_2(\nu, q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \text{για } e^- p \rightarrow e^- X$$

όπου $\tau = -q^2/4M$. Αν ολοκληρώσουμε τις δύο πρώτες ως προς E' χρησιμοποιώντας την συνάρτηση δ , θα πάρουμε

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} (\dots)$$

Βάθμιση Bjorken και το πρότυπο των παρτονίων

Χρησιμοποιώντας τις νέες μεταβλητές

$$Q^2 = -q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2EE'(1 - \cos \theta), \quad \nu = E - E'$$

έχουμε (θεωρώντας αζιμουθιακή συμμετρία, οπότε $\int d\phi = 2\pi$)

$$d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta d\theta = 2\pi d(\cos \theta), \quad (\cos \theta = (-1, 1))$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial E'} = -1, \quad \frac{\partial \nu}{\partial \cos \theta} = 0$$

$$\frac{\partial Q^2}{\partial E'} = 2E(1 - \cos \theta), \quad \frac{\partial Q^2}{\partial \cos \theta} = -2EE'$$

$$d\nu dQ^2 = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial \nu}{\partial E'} & \frac{\partial \nu}{\partial \cos \theta} \\ \frac{\partial Q^2}{\partial E'} & \frac{\partial Q^2}{\partial \cos \theta} \end{pmatrix} \right| dE' d(\cos \theta) = 2EE' dE' d(\cos \theta)$$

η Εξ.(26) γράφεται

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{EE'} \left[W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Ο Bjorken πρότεινε ότι στο όριο

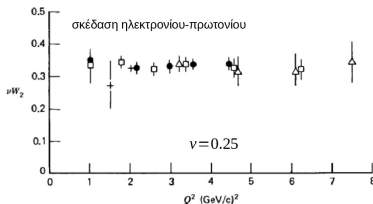
$$\left. \begin{array}{l} Q^2 \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow \infty \end{array} \right\} \text{ με } x = \frac{Q^2}{2M\nu} = \text{σταθερό}$$

οι συναρτήσεις W γίνονται

$$MW_1(Q^2, \nu) \rightarrow F_1(x), \quad \nu W_2(Q^2, \nu) \rightarrow F_2(x)$$

πράγμα που τα πειραματικά δεδομένα το επιβεβαιώνουν.

Σημαντικό στοιχείο της υπόθεσης του Bjorken είναι ότι στο όριο αυτό, οι συναρτήσεις F_1 και F_2 είναι πεπερασμένες.



Πώς καταλαβαίνουμε αυτήν την βάθμιση;

Ο Feynman πρότεινε να θεωρήσουμε ελαστική σκέδαση με σημειακά φορτία (παρτόνια) που βρίσκονται μέσα στο πρωτόνιο. Το φωτόνιο μπαίνει “βαθιά” και βλέπει εσωτερική δομή στο πρωτόνιο.

Αν γράψουμε $p_i^\mu = xP^\mu$ (και $m_i \simeq xM$), δηλαδή ότι το παρτόνιο i έχει κάποιο κλάσμα της ορμής του πρωτονίου, η ελαστική σκέδαση του ηλεκτρονίου με το παρτόνιο φορτίου e_i θα δίνει

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{EE'} \left[e_i^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2e_i^2 \frac{Q^2}{4m_i^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i} \right)$$

που θα πρέπει να συγκριθεί με την

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{EE'} \left[W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Άρα θα πρέπει η συνεισφορά στα W_1 και W_2 από ένα είδος παρτονίου να είναι

$$W_1^i = e_i^2 \frac{Q^2}{4xM^2} \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2xM} \right)$$

$$W_2^i = e_i^2 \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2xM} \right)$$

Για $Q^2, \nu \rightarrow \infty$ θεωρούμε ότι οι συνεισφορές των παρτονίων αθροίζονται ασύμφωνα (incoherently). Άρα, αθροίζουμε για όλα τα είδη των παρτονίων και ολοκληρώνουμε για όλα τα $x = (0, 1)$. Βέβαια, το ολοκλήρωμα στα x θα πρέπει να έχει και κάποια συνάρτηση βάρους $f_i(x)$ για κάθε είδος παρτονίου. Αυτές οι συναρτήσεις, που καλούνται κατανομές πιθανότητας, δεν προβλέπονται από αυτό το πρότυπο. Επομένως,

$$W_2(\nu, Q^2) = \sum_i \int_0^1 dx f_i(x) e_i^2 \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2xM}\right)$$

και επειδη

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{\left| \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0}}, \quad \mu\epsilon \quad g(x_0) = 0$$

θα έχουμε

$$\delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2xM}\right) = \delta\left(x - \frac{Q^2}{2M\nu}\right) \left(\frac{Q^2}{2Mx^2}\right)^{-1} = \delta\left(x - \frac{Q^2}{2M\nu}\right) \left(\frac{x}{\nu}\right)$$

Επομένως,

$$\nu W_2(\nu, Q^2) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \equiv F_2(x)$$

όπου $x = \frac{Q^2}{2M\nu}$.

Ανάλογα παίρνουμε

$$MW_1(\nu, Q^2) = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 f_i(x) \equiv F_1(x)$$

οπότε

$$F_2(x) = 2xF_1(x)$$

Η τελευταία σχέση, σχέση Callan-Gross, είναι άμεσα συνδεδεμένη με το ότι τα παρτόνια έχουν $\text{spin}=1/2$.

Το πρότυπο των κουάρκ-παρτονίων

Ας υποθέσουμε ότι τα παρτόνια είναι τα κουάρκ του Gell-Mann με τις γνωστές ιδιότητες (φορτίο, τιμή του βαριονικού αριθμού, της παραδοξότητας κ.λπ.). Τότε για την αλληλεπίδραση φωτονίου με τα κουάρκ του πρωτονίου, θα έχουμε

$$F_2^{ep}(x) = x \left[\frac{4}{9} (u(x) + \bar{u}(x)) + \frac{1}{9} (d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)) \right]$$

με $u(x)$, $d(x)$, $s(x)$, ... η κατανομή πιθανότητας για κάθε ένα από αυτά. Ίσως φαίνεται ότι αντικαταστήσαμε μια άγνωστη ποσότητα, F_2 , από έξι άγνωστες ποσότητες! Αλλά, οι ίδιες ποσότητες παρουσιάζονται, με διαφορετικούς συνδυασμούς βέβαια, για στόχο νετρονίων (αντί πρωτονίων) ή, ακόμα, για χρήση νετρίνων και αντινετρίνων αντί φωτονίων. Για παράδειγμα, για στόχο νετρονίων (χρησιμοποιώντας την διατήρηση του isospin) μπορούμε να γράψουμε για το νετρόνιο

$$u^{(n)}(x) = d^{(p)}(x) \equiv d(x), \quad d^{(n)}(x) = u^{(p)}(x) \equiv u(x)$$

οπότε

$$F_2^{en}(x) = x \left[\frac{4}{9} (d(x) + \bar{d}(x)) + \frac{1}{9} (u(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{s}(x)) \right]$$

Μιας και όλες οι συναρτήσεις πιθανότητας πρέπει να είναι θετικές, αποδεικνύεται ότι

$$\frac{1}{4} \leq \frac{F_2^{en}}{F_2^{ep}} \leq 4$$

σχέση που επιβεβαιώνεται και πειραματικά.

Άσκηση 47 Αποδείξτε την παραπάνω σχέση.

Επίσης, για το πρωτόνιο και το νετρόνιο με παραδοξότητα 0, θα ισχύει

$$\int_0^1 dx [s(x) - \bar{s}(x)] = 0$$

Από το φορτίο του πρωτονίου και του νετρονίου έχουμε τις σχέσεις

$$\int_0^1 dx \left[\frac{2}{3}(u - \bar{u}) - \frac{1}{3}(d - \bar{d}) \right] = 1, \quad \text{για το πρωτόνιο}$$

$$\int_0^1 dx \left[\frac{2}{3}(d - \bar{d}) - \frac{1}{3}(u - \bar{u}) \right] = 0, \quad \text{για το νετρόνιο}$$

Από τις παραπάνω δύο σχέσεις παίρνουμε τις

$$\int_0^1 dx [u - \bar{u}] = 2, \quad \int_0^1 dx [d - \bar{d}] = 1$$

που ακριβώς δείχνει την περίσσεια των κουάρκ u και των κουάρκ d σε σχέση με τα αντι-κουάρκ.

Ακόμα μια ενδιαφέρουσα σχέση πηγάζει από το γεγονός ότι $xf_i(x)$ είναι το κλάσμα της ορμής που μεταφέρει το κουάρκ i .
Οπότε

$$\int_0^1 dx x [u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}] = 1 - \epsilon$$

όπου με ϵ δηλώνουμε το κλάσμα της ορμής του πρωτονίου που δεν μεταφέρεται από τα κουάρκ. Πειραματικά το $\epsilon \sim 1/2$, που υποδηλώνει ότι μεγάλο κλάσμα της ορμής μεταφέρεται από αφόρτιστα αντικείμενα. Κατά την Κβαντική Χρωμοδυναμική, τα αντικείμενα αυτά είναι τα γκλουόνια.

Μπορούμε να πάρουμε και άλλους τέτοιους κανόνες αν προχωρήσουμε σε θεωρητικά πρότυπα για τις κατανομές των κουάρκ. Έτσι, εισάγουμε την έννοια για τα κουάρκ “σθένους” και τα κουάρκ “θάλασσας”. Για παράδειγμα, για το πρωτόνιο οι κατανομές των κουάρκ u και d παραμετροποιούνται

$$u = u_v + q_s, \quad d = d_v + q_s$$

ενώ για τα κουάρκ s και τα αντι-κουάρκ

$$\bar{u} = \bar{d} = s = \bar{s} = q_s$$

Έτσι, οι έξι άγνωστες συναρτήσεις αντικαθίστανται από τρεις. Φυσικά, υπάρχουν παρεκλίσεις από την βάθμιση Bjorken και το απλό πρότυπο που περιγράψαμε παραπάνω, αλλά η ΚΧΔ δίνει απαντήσεις.

Οι συμμετρίες παίζουν πρωταρχικό ρόλο στη Φυσική. Για παράδειγμα, η αναλλοιωτήτητα σε γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων οδήγησε τον Einstein στην διατύπωση της Θεωρίας της Γενικής Σχετικότητας. Πιστεύουμε ότι οι αλληλεπιδράσεις στη φύση περιγράφονται από Θεωρίες Βαθμίδας. Η διατήρηση μεγεθών (όπως φορτίο, χρώμα κ.λπ.) τοπικά (local) συνδέονται άρρηκτα με αυτές.

Η σχέση συμμετρίας $\leftrightarrow$ νόμος διατήρησης έχει συζητηθεί στην Λαγκρανζιανή θεώρηση. Οι εξισώσεις Lagrange είναι

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

όπου q_i οι γενικευμένες συντεταγμένες και $\dot{q}_i = dq_i/dt$ και η συνάρτηση Lagrange $L = T - V (= \text{Κινητ. Εν.} - \text{Δυναμ. Εν.})$. Πηγαίνοντας από τα q_i στις $\phi(\mathbf{x}, t)$, παίρνουμε

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu)$$

και οι εξισώσεις Lagrange γίνονται

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

όπου $\mathcal{L}$ η Λαγκρανζιανή πυκνότητα και $L = \int \mathcal{L} d^3x$. Αντί να γράφουμε τις εξισώσεις που διέπουν τα πεδία μας, γράφουμε την $\mathcal{L}$. Έτσι, για παράδειγμα η

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

δίνει την εξίσωση Klein-Gordon

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi = 0, \quad \text{ή} \quad (\square^2 + m^2)\phi = 0$$

Άσκηση 48 Δείξτε ότι η Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 = 0$$

οδηγεί στην εξίσωση Klein-Gordon

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi = 0, \quad \text{ή} \quad (\square^2 + m^2)\phi = 0$$

Δεν υπάρχει τίποτα το μαγικό εδώ! Η Λαγκραντζιανή επιλέχτηκε με αυτόν τον τρόπο ώστε να δίνει την εξίσωση Klein-Gordon.

Η Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

δίνει την εξίσωση Dirac

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0$$

Άσκηση 49 Δείξτε ότι η Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

οδηγεί, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Langrage, στην εξίσωση Dirac για το ψ και το $\bar{\psi}$ που θεωρούνται ανεξάρτητες μεταβλητές

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0, \quad i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

Άσκηση 50 Η Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

δίνει τις εξισώσεις του Maxwell $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$

Αν γράψουμε την Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$$

θα πάρουμε την εξίσωση του “φωτονίου” με μάζα

$$(\square^2 + m^2)A_\mu = j_\mu$$

Άσκηση 51 Δείξτε την παραπάνω σχέση.

Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στην Λαγκραντζιανή προσέγγιση και της διαταρακτικής μεθόδου με τα διαγράμματα Feynman;

Σε κάθε Λαγκραντζιανή αντιστοιχούν ορισμένοι κανόνες Feynman. Αυτή η αντιστοιχία γίνεται ως εξής:

1. Σε κάθε όρο της Λαγκραντζιανής αντιστοιχούμε διαδότες και συντελεστές κορυφής.
2. Οι διαδότες προέρχονται από τους τετραγωνικούς όρους της Λαγκραντζιανής (π.χ. ϕ^2 , $\bar{\psi}\psi$, $(1/2)(\partial_\mu\phi)^2$, $\bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu\psi)$).
3. Οι άλλοι όροι της Λαγκραντζιανής αντιστοιχίζονται στις κορυφές αλληλεπίδρασης. Ο συντελεστής της κορυφής είναι ο συντελεστής του αντίστοιχου όρου της Λαγκραντζιανής.

Ακολουθούμε τον κλασικό τρόπο προσέγγισης. Η κλασική Λαγκραντζιανή κβαντίζεται. Τα πεδία γίνονται τελεστές δημιουργίας και καταστροφής. Οι αλληλεπιδράσεις υπολογίζονται μέσω της θεωρίας διαταραχών. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας μεταφράζεται σε ένα σύνολο κανόνων Feynman. Μέσω αυτών μπορούμε να ελέγχουμε τις φυσικές διεργασίες που περιγράφει μια Λαγκραντζιανή. Εδώ δεν θα ακολουθήσουμε τον “κανονικό φορμαλισμό”. Θα ακολουθήσουμε την πεποίθηση ότι τα “διαγράμματα Feynman περιγράφουν πολλά περισσότερα από ό,τι ένας απλός φορμαλισμός” (t’Hooft και Veltman).

Θεώρημα Noether. Συμμετρίες και νόμοι διατήρησης

Γνωρίζουμε ότι η αναλλοιωτότητα σε χωρική μετάθεση οδηγεί στη διατήρηση ορμής, η αναλλοιωτότητα σε στροφές οδηγεί στη διατήρηση της στροφορμής και η αναλλοιωτότητα σε μετάθεση στο χρόνο οδηγεί στη διατήρηση της ενέργειας. Εδώ, θα ενδιαφερθούμε για εσωτερικές συμμετρίες. Μετασχηματισμοί που μετατίθενται με την χωροχρονική εξάρτηση της κυματοσυνάρτησης.