

Η σκέδαση χρησιμοποιείται για την αναγνώριση της δομής του στόχου. Χρησιμοποιώντας την γωνιακή κατανομή του σκεδαζομένου “βλήματος” (π.χ. ηλεκτρονίου), μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για την δομή.

Η γενική ιδέα είναι η εύρεση του **παράγοντα μορφής** (form factor) $F(q)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \bigg|_{\text{σημειαχός στόχος}} |F(q)|^2$$

με q η μεταφερόμενη ορμή από το προσπίπτον “βλήμα” ε προς τον στόχο: $q = k_i - k_f$. Ξεκινάμε με τη σκέδαση ε σε στόχο χωρίς spin, με φορτίο $Ze\rho(\mathbf{x})$ όπου

$$\int \rho(\mathbf{x}) d^3x = 1$$

Για στατικό στόχο έχουμε

$$F(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d^3x$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier της κατανομής φορτίου $\rho(\mathbf{x})$, ενώ

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{σημειακός στόχος}} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mott}} = \frac{(Z\alpha)^2 E^2}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

όπου θ η γωνία σκέδασης και E , k και v η ενέργεια, ορμή και ταχύτητα του βλήματος-ηλεκτρονίου. Ας δούμε πώς φτάνουμε σ' αυτό. Για στατικό φορτίο με τιμή Ze θα έχουμε $A^\mu = (V, 0)$ με

$$\nabla^2 V(\mathbf{x}) = -Ze\delta^3(\mathbf{x}) \quad \text{για σημειακό φορτίο}$$

$$\nabla^2 V(\mathbf{x}) = -Ze\rho(\mathbf{x}) \quad \text{για φορτίο με πυκνότητα } \rho$$

Οπότε, για το σημειακό φορτίο

$$\begin{aligned}\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \nabla^2 V(\mathbf{x}) d^3x &= - \int Ze\delta^3(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d^3x \\ (-i\mathbf{q})^2 \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) d^3x &= -Ze \\ \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) d^3x &= \frac{Ze}{\mathbf{q}^2}\end{aligned}$$

όπου στην δεύτερη ισότητα οδηγηθήκαμε με διπλή ολοκλήρωση κατά μέρη (και μηδενισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος που προκύπτει κάθε φορά). Για το φορτίο με πυκνότητα ρ έχουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned}\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \nabla^2 V(\mathbf{x}) d^3x &= - \int Ze\rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d^3x \\ (-i\mathbf{q})^2 \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) d^3x &= -ZeF(\mathbf{q}) \\ \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) d^3x &= \frac{Ze}{\mathbf{q}^2} F(\mathbf{q})\end{aligned}$$

Τώρα γνωρίζουμε ότι

$$T_{fi} = -ie \int d^4x \bar{\Psi}_f \gamma^\mu \Psi_i A_\mu = -ie \int d^4x \bar{u}(k_f) \gamma^\mu u(k_i) e^{-i(k_i - k_f) \cdot x} A_\mu$$

Για $A_\mu = (V(\mathbf{x}), 0)$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -ie (\bar{u}_f \gamma^0 u_i) 2\pi \delta(E_i - E_f) \int d^3x e^{-i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) \cdot \mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \\ &= -ie (\bar{u}_f \gamma^0 u_i) 2\pi \delta(E_i - E_f) \frac{Ze}{\mathbf{q}^2} F(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ και $F(\mathbf{q}) = 1$ για σημειακό φορτίο. Για να πάμε στην διαφορική ενεργό διατομή, παίρνουμε

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{|T_{fi}|^2}{T} \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2E_f} \frac{1}{2E_i} \frac{1}{v} = \\ &= (e^4 Z^2) \left[\frac{1}{2} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 \right] \left(\frac{F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2} \right)^2 2\pi \delta(E_i - E_f) \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2E_f} \frac{1}{2E_i} \frac{1}{v} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $(2\pi\delta)^2 = T2\pi\delta$ και η αγκύλη υπονοεί άθροισμα στα spin.

Για στατικό πεδίο, η ενέργεια του ηλεκτρονίου δεν αλλάζει ($\delta(E_i - E_f)$), οπότε και $|\mathbf{k}_f| = |\mathbf{k}_i|$ και $E^2 = k^2 + m^2 \rightarrow EdE = kdk$. Έτσι, $d^3k_f = k_f^2 dk_f d\Omega = k_f E_f dE_f d\Omega$. Το $d\sigma$ γράφεται

$$\begin{aligned} d\sigma &= Z^2 e^4 \left(\frac{F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2} \right)^2 2\pi\delta(E_i - E_f) \frac{k_f E_f dE_f d\Omega}{(2\pi)^3 2E_f} \frac{1}{2E_i} \frac{1}{v} \left[\frac{1}{2} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 \right] \\ &= \frac{Z^2 \alpha^2}{4(\mathbf{q}^2)^2} \left[\frac{1}{2} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 \right] [F(\mathbf{q}^2)]^2 d\Omega \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $k_f/E_f = v$. Ας υπολογίσουμε τώρα την αγκύλη ($E_i = E_f = E$ και $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| = k$)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{s_f, s_i} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 &= \frac{1}{2} \text{Tr} [(k_i + m) \gamma_0 (k_f + m) \gamma_0] \\
&= \frac{1}{2} [\text{Tr} [k_i \gamma_0 k_f \gamma_0] + m^2 \text{Tr} [\gamma_0^2]] \\
&= 2 (2E_i E_f - k_i k_f + m^2) \\
&= 2 (2E^2 - (E^2 - k^2 \cos \theta) + m^2) \\
&= 2 (2E^2 - (E^2 - k^2 \cos \theta) + E^2 - k^2) \\
&= 4E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)
\end{aligned}$$

με $v = k/E$ η ταχύτητα του ηλεκτρονίου. Οπότε,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) [F(\mathbf{q})]^2 \quad (24)$$

με $\mathbf{q}^2 = (\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i)^2 = 2k^2(1 - \cos \theta) = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$. Για σημειακό στόχο, όπως είπαμε, $F(\mathbf{q}) = 1$. Όπότε, πράγματι,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{σημειαχός στόχος}} [F(\mathbf{q})]^2$$

Άσκηση 42 Αν το ηλεκτρόνιο είχε spin 0, δείξτε ότι η έκφραση

$$4E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

αντικαθίσταται από το $4E^2$ και η Εξ.24 γίνεται

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} E^2 [F(\mathbf{q})]^2$$

Όπότε, μπαίνει η ερώτηση: γιατί το μη σχετικιστικό ηλεκτρόνιο, δηλαδή για $v \rightarrow 0$, με spin=1/2 δεν διαφέρει από το “ηλεκτρόνιο” με spin=0;

Το $F(\mathbf{q} = 0) = 1$. Για μικρές τιμές του $|\mathbf{q}|$ μπορούμε να αναπτύξουμε το εκθετικό

$$F(\mathbf{q}) = \int \left(1 - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})^2}{2} + \dots \right) \rho(\mathbf{x}) d^3x$$

Αν $\rho(\mathbf{x}) = \rho(|\mathbf{x}|)$, δηλαδή σφαιρικά συμμετρική, ο δεύτερος όρος του ολοκληρώματος μηδενίζεται, γιατί επιλλέγοντας

$\mathbf{q} = (0, 0, q)$, $\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} = qz = qr \cos \theta$ και $d^3x = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$

$$\int \mathbf{q} \cdot \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) d^3x = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} qr \cos \theta \rho(r) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

Αλλά

$$\int_0^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$$

Ο τρίτος όρος γίνεται

$$- \int \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})^2}{2} \rho(r) d^3x = -\frac{1}{2} \int \sum_i (q_i x_i)^2 \rho(r) d^3x$$

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας

$$\frac{1}{3} \int (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \rho(r) d^3x = \int x_i^2 \rho(r) d^3x, \quad i = 1, 2, 3$$

οπότε

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int \sum (q_i^2 x_i^2) \rho(r) d^3x &= -\frac{1}{2} \int (q_1^2 x_1^2 + q_2^2 x_1^2 + q_3^2 x_1^2) \rho(r) d^3x = \\ -\frac{1}{2} \left(\sum q_i^2 \right) \int x_1^2 \rho(r) d^3x &= -\frac{1}{2} \left(\sum q_i^2 \right) \int \frac{1}{3} \left(\sum x_i^2 \right) \rho(r) d^3x = \\ -\frac{1}{6} \mathbf{q}^2 \int r^2 \rho(r) d^3x &= -\frac{1}{6} \mathbf{q}^2 \langle r^2 \rangle \end{aligned}$$

όπου $\langle r^2 \rangle$ είναι η μέση τιμή του r^2 . Οπότε

$$F(\mathbf{q}) = 1 - \frac{1}{6} \mathbf{q}^2 \langle r^2 \rangle$$

Δηλαδή, για μικρό $|\mathbf{q}|$, η σκέδαση μετρά ακριβώς αυτή τη μέση τιμή του r^2 . Το μικρό μήκος κύματος του φωτονίου μπορεί να ξεχωρίσει μόνο τον συνολικό όγκο του φορτίου $\rho(r)$.

Άσκηση 43 Αν η πυκνότητα φορτίου $\rho(r)$ ήταν της μορφής e^{-mr} , δείξτε ότι ο παράγοντας μορφής είναι

$$F(|\mathbf{q}|) \propto \left(1 - \frac{q^2}{m^2}\right)^{-2}$$

Σκέδαση ηλεκτρονίου-πρωτονίου. Παράγοντες μορφής του πρωτονίου

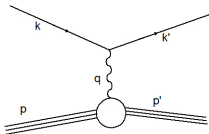
Δύο είναι τα στοιχεία που διαφοροποιούν το πρωτόνιο-στόχος από τα προηγούμενα: το πρωτόνιο δεν είναι “στατικό” και το πρωτόνιο έχει μαγνητική ροπή. Αν, παρ’ όλα αυτά, το πρωτόνιο ήταν σημειακό με μαγνητική ροπή a la Dirac ίση με $e/2M$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το τύπο που είχαμε βρει για την σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου, βάζοντας M την μάζα του πρωτονίου αντί του μιονίου

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

όπου

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

Κάνοντας την ίδια δουλειά όπως με την σκέδαση ηλεκτρονίου - μιονίου, θα γράφαμε



$$T_{fi} = -i \int j_\mu \left(-\frac{1}{q^2} \right) J^\mu d^4x$$

όπου $q = k - k' = p' - p$ και θεωρώντας πια το πρωτόνιο ως MH σημειακό

$$j_\mu = -e \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) e^{-i(k-k')x}$$

$$J^\mu = e \bar{u}(p') [\dots] u(p) e^{-i(p-p')x}$$

Ακριβώς, γράφοντας [...] δείχνουμε ότι το πρωτόνιο δεν είναι σημειακό και δεν μπορούμε απλά να γράψουμε γ^μ . Παρ' όλα αυτά, το J^μ θα πρέπει να είναι ένα τετραδιάνυσμα, και επομένως θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την πιο γενική μορφή ενός τετραδιανύσματος χρησιμοποιώντας τις ορμές p , p' και q καθώς και τους γ πίνακες. Μπορούμε, τελικά, να φτιάξουμε δύο ανεξάρτητες ποσότητες: μια ανάλογη του γ^μ και μια δεύτερη ανάλογη του $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$.

Άσκηση 44 Η πιο γενική μορφή για το [...] στο J^μ είναι ($q = p' - p$)

$$F_1\gamma^\mu + F_2i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + F_3i\sigma^{\mu\nu}(p + p')_\nu + F_4q^\mu + F_5(p + p')^\mu$$

Δείξτε ότι τελικά μένουν μόνο δύο ανεξάρτητοι όροι που αντιστοιχούν στα F_1 και F_2

Οπότε, γράφουμε

$$[...] = F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{\kappa}{2M}F_2(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \quad (25)$$

όπου κ είναι η ανώμαλη μαγνητική ροπή του πρωτονίου. Προσέξτε ότι το q^2 είναι η μόνη ανεξάρτητη βαθμωτή μεταβλητή στην κορυφή του πρωτονίου ($p^2 = p'^2 = M^2$). Επίσης, το $p \cdot q$ δεν είναι ανεξάρτητο μιας και

$$(q + p)^2 = p'^2 \rightarrow q^2 + M^2 + 2p \cdot q = M^2 \rightarrow 2p \cdot q = -q^2.$$

Αν το $q^2 \rightarrow 0$, δηλαδή αν το φωτόνιο έχει μεγάλο μήκος κύματος, δεν μπορούμε να διακρίνουμε δομή στο πρωτόνιο και παρατηρούμε σωματίδιο με φορτίο e και μαγνητική ροπή $(1 + \kappa)/2M$. Θυμηθείτε ότι (ανάπτυγμα Gordon)

$$e\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \frac{e}{2M} (\bar{u}(p')(p + p')^\mu u(p) + \bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}q_\nu u(p))$$

Πειραματικά, το $\kappa = 1.79$.

Οπότε, ο όρος γ^μ στην Εξ.25 περιέχει την “κανονική” ροπή ενώ ο άλλος όρος προσφέρει την ανώμαλη ροπή του πρωτονίου, και θα πρέπει να επιλέξουμε, σ’ αυτό το όριο,

$$F_1(q^2 \rightarrow 0) = 1, \quad F_2(q^2 \rightarrow 0) = 1$$

Για το νετρόνιο, οι αντίστοιχες τιμές είναι $F_1(q^2 \rightarrow 0) = 0$, $F_2(q^2 \rightarrow 0) = 1$ και $\kappa_n = -1.91$. Χρησιμοποιώντας λοιπόν, για τον υπολογισμό της ενεργού διατομής την Εξ.(25), θα πάρουμε

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\left(F_1^2 - \frac{\kappa^2 q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} (F_1 + \kappa F_2)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Αυτή είναι η σχέση Rosenbluth. Αποτελεί μια παραμετροποίηση της άγνοιάς μας για την δομή του πρωτονίου. Παρατηρήστε ότι για $F_1 = 1$ και $\kappa = 0$ καταλήγουμε στην σκέδαση από σημειακό στόχο. Πειραματικά οι παράγοντες μορφής μετριοούνται σε σκέδαση ως συνάρτηση της γωνίας σκέδασης του ηλεκτρονίου.

Στην πράξη χρησιμοποιούνται δύο γραμμικοί συνδυασμοί των F

$$G_E = F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2} F_2, \quad G_M = F_1 + \kappa F_2$$

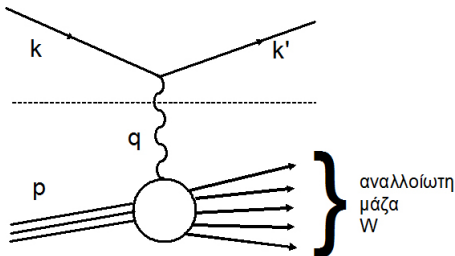
και η ενεργός διατομή γράφεται

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

με $\tau = -q^2/2M$. Προσέξτε ότι με αυτήν την αλλαγή δεν υπάρχουν όροι ανάλογοι του $G_M G_E$.

Ανελαστική Σκέδαση $ep \rightarrow eX$

Τι γίνεται όταν μεγαλώσει η ενέργεια που χάνει το ηλεκτρόνιο; Δηλαδή όταν το $-q^2$ είναι μεγάλο. Για μεσαία $-q^2$, το πρωτόνιο μπορεί να διεγερθεί σε Δ -καταστάσεις και να δώσει ένα π -μεσόνιο: $ep \rightarrow e\Delta^+ \rightarrow e\pi^0$. Σ' αυτήν την περίπτωση η αναλλοίωτη μάζα των προϊόντων $W^2 \simeq M_\Delta^2$. Για πιο μεγάλη μεταφερόμενη ενέργεια το πρωτόνιο "σπάει" και χρειαζόμαστε ένα καινούργιο σχηματισμό για να περιγράψουμε το γεγονός.



Στην ελλαστική σκέδαση αντικαταστήσαμε, στο αναλλοίωτο πλάτος, το $\bar{u}\gamma^\mu u$ του μιονίου με $\bar{u}\Gamma^\mu u$ και χρησιμοποιήσαμε την πιο γενική μορφή για το Γ^μ . Τώρα ούτε αυτό γίνεται. Θα πρέπει να πάμε άμεσα στην ενεργό διατομή (δηλαδή στο τετραγωνισμένο αναλλοίωτο πλάτος) και αντί

$$d\sigma = L_{\mu\nu}^{(e)} \left(L^{(\mu)} \right)^{\mu\nu}$$

που ισχύει για την περίπτωση του μιονίου, να γράψουμε

$$d\sigma = L_{\mu\nu}^{(e)} W^{\mu\nu}$$

Το λεπτονικό κομμάτι παραμένει το ίδιο. Το $W^{\mu\nu}$ παραμετροποιεί την συνολική μας άγνοια για την μορφή του ρεύματος στην μεριά του πρωτονίου. Και πάλι θα πρέπει να γράψουμε το $W^{\mu\nu}$ με την πιο γενική μορφή χρησιμοποιώντας τα p^μ , q^μ και το $g^{\mu\nu}$. Προσέξτε ότι $p' = p + q$ και επίσης δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γ πίνακες μιας και γράφουμε το τετράγωνο του αναλλοίωτου πλάτους όπου έχουμε αθροίσει στα spin. Επομένως γράφουμε

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g_{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p^\mu p^\nu + \frac{W_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2} (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu)$$

Κρατήσαμε το $W^{\mu\nu}$ συμμετρικό στους δείκτες μιας και το $L_{\mu\nu}^{(e)}$ είναι συμμετρικό. Κάθε μη συμμετρικό κομμάτι του $W^{\mu\nu}$ δεν θα συνεισέφερε στο $d\sigma$. Τα W θα εξαρτώνται από τα μόνο δύο βαθμωτά μεγέθη που σχετίζονται με την κορυφή του πρωτονίου. Μπορούμε να επιλέξουμε τα

$$q^2 \quad \text{και} \quad \nu = \frac{p \cdot q}{M}$$

Η αναλλοίωτη μάζα της τελικής κατάστασης συνδέεται με τις δύο παραπάνω μεταβλητές

$$W^2 = (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2p \cdot q = M^2 + 2M\nu + q^2$$

Η διατήρηση του ρεύματος οδηγεί στις σχέσεις

$$q^\mu L_{\mu\nu}^{(e)} = q^\nu L_{\mu\nu}^{(e)} = 0, \quad \text{και} \quad q^\mu W_{\mu\nu}^{(e)} = q^\nu W_{\mu\nu}^{(e)} = 0$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις οδηγούν σε συσχέτιση μεταξύ των τεσσάρων διαφορετικών W . Οπότε, ξαναγράφουμε

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + W_2 \frac{1}{M^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right)$$

Άσκηση 45 Δείξτε ότι η διατήρηση του ρεύματος στην αδρονική κορυφή (δηλαδή $q^\nu W_{\mu\nu} = 0$) οδηγεί στις σχέσεις

$$W_5 = -\frac{p \cdot q}{q^2} W_2, \quad W_4 = \frac{M^2}{q^2} W_1 + \left(\frac{p \cdot q}{q^2} \right)^2 W_2$$

Υπενθυμίζουμε ότι τα W_1 και W_2 εξαρτώνται από τα q^2 και ν . Συνήθως χρησιμοποιούνται, αντ' αυτών, οι x και y

$$x = \frac{-q^2}{2p \cdot q} = \frac{-q^2}{2M\nu} \quad y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k}$$

όπου k η (τετρ)ορμή του εισερχόμενου ηλεκτρονίου.

Υπολογίζουμε τώρα την ενεργό διατομή $ep \rightarrow eX$.

$$L_{(e)}^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 4W_1(k \cdot k') + \frac{2W_2}{M^2} (2(p \cdot k)(p \cdot k') - M^2 k \cdot k')$$

που στο σύστημα εργαστηρίου γίνεται

$$L_{(e)}^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \Big|_{\text{lab}} = 4EE' \left[W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Άσκηση 46 Δείξτε την παραπάνω σχέση.

Τελικά η ενεργός διατομή γράφεται

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} \Big|_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[W_2(\nu, q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (26)$$

Άσκηση 42 Αν το ηλεκτρόνιο είχε spin 0, δείξτε ότι η έκφραση

$$4E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

αντικαθίσταται από το $4E^2$ και η Εξ.24 γίνεται

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} E^2 [F(\mathbf{q}^2)]^2$$

Οπότε, μπαίνει η ερώτηση: γιατί το μη σχετικιστικό ηλεκτρόνιο, δηλαδή για $v \rightarrow 0$, με spin=1/2 δεν διαφέρει από το “ηλεκτρόνιο” με spin=0; (Π)

Λύση

Η έκφραση $4E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$ προέρχεται από τον υπολογισμό του $(1/2) |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2$. Στην περίπτωση του βαθμωτού ηλεκτρονίου, η αλληλεπίδραση με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχει τη μορφή $(p + p')^\mu A_\mu$ με p και p' η ορμή του εισερχόμενου και εξερχόμενου ηλεκτρονίου.

Στην περίπτωση μας, που έχουμε στατικό πεδίο θα πάρουμε $(p + p')^0 A_0$, οπότε, το αντίστοιχο του $(1/2) |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2$ είναι απλά $((p + p')^0)^2 = (E + E')^2 = 4E^2$ μιας και $E = E'$.
 Για χαμηλές ενέργειες γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρόνιο δεν αλλάζει το spin του, αλληλεπιδρά δηλαδή μόνο με το φορτίο του και αυτό αντιστοιχεί στον πρώτο όρο της ανάπτυξης Gordon του όρου $\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p)$ που είναι ανάλογος του $(p + p')^\mu$

Άσκηση 44 Η πιο γενική μορφή για το J^μ είναι ($q = p' - p$)

$$F_1 \gamma^\mu + F_2 i \sigma^{\mu\nu} q_\nu + F_3 i \sigma^{\mu\nu} (p + p')_\nu + F_4 q^\mu + F_5 (p + p')^\mu$$

Δείξτε ότι τελικά μένουν μόνο οι δύο ανεξάρτητοι όροι που αντιστοιχούν στα F_1 και F_2 . (Π)

Λύση

Από την ανάπτυξη κατά Gordon

$$\bar{u}_f \gamma^\mu u_i = \frac{1}{2m} \bar{u}_f [(p + p')^\mu + i \sigma^{\mu\nu} (p' - p)_\nu] u_i$$

βλέπουμε ότι ο όρος $(p + p')^\mu$ μπορεί να εκφαστεί μέσω των όρων γ^μ και $\sigma^{\mu\nu} (p' - p)_\nu$. Δηλαδή, ο όρος F_5 εκφράζεται μέσω των όρων F_1 και F_2 . Επίσης, για τον όρο $\sigma^{\mu\nu} (p + p')_\nu$ έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \sigma^{\mu\nu} (p + p')_\nu u(p) &\sim \bar{u}(p') (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) (p + p')_\nu u(p) = \\ &= \bar{u}(p') [\gamma^\mu (\not{p} + \not{p}') - (\not{p} + \not{p}') \gamma^\mu] u(p) = \\ &= \bar{u}(p') [\gamma^\mu (M + \not{p}') - (\not{p} + M) \gamma^\mu] u(p) = \\ &= \bar{u}(p') [2p'^\mu - \not{p}' \gamma^\mu - 2p^\mu + \gamma^\mu \not{p}] u(p) = \\ &= \bar{u}(p') 2(p' - p)^\mu u(p) = 2\bar{u}(p') q^\mu u(p) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση του Dirac: $\not{p}u(p) = Mu(p)$ και $\bar{u}(p')\not{p}' = M\bar{u}(p')$. Άρα, το F_3 εκφράζεται μέσω του F_4 . Επομένως, έχουμε φτάσει στο

$$F_1\gamma^\mu + F_2i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + F_4q^\mu$$

Αλλά από την διατήρηση του ρεύματος, $\partial_\mu J^\mu = 0$ ή $q_\mu J^\mu = 0$, έχουμε

$$q_\mu \bar{u}(p') [F_1\gamma^\mu + F_2i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + F_4q^\mu] u(p) = 0 \rightarrow$$

$$\bar{u}(p') [F_1\not{q} + F_2i\sigma^{\mu\nu}q_\nu q_\mu + F_4q^2] u(p) = 0 \rightarrow$$

$$\bar{u}(p') [F_1(\not{p}' - \not{p}) + F_2i\sigma^{\mu\nu}q_\nu q_\mu + F_4q^2] u(p) = 0$$

Ο πρώτος όρος μηδενίζεται από την εξίσωση του Dirac. Ο δεύτερος από την αντισυμμετρικότητα του $\sigma^{\mu\nu}$ και την συμμετρικότητα του $q_\mu q_\nu$. Επομένως, $F_4 = 0$. Έτσι, μένουμε μόνο με

$$F_1\gamma^\mu + F_2i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$$