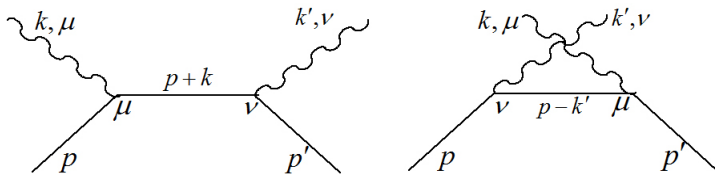


Άσκηση 38 Δείξτε ότι ο διαδότης ενός διανυσματικού σωματιδίου με μάζα είναι

$$\frac{i \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} \right)}{p^2 - M^2}$$

Σκέδαση Compton $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$

Θα υπολογίσουμε αναλυτικά το αναλοίωτο πλάτος για την σκέδαση Compton. Ας προσπαθήσουμε να δούμε κάθε όρο του πλάτους αυτού. Για το εισερχόμενο φωτόνιο θα υπάρχει ο όρος: $\epsilon_\mu e^{-ikx}$ και για το εξερχόμενο: $\epsilon'^*_\nu e^{+ik'x}$.



Για το εισερχόμενο ηλεκτρόνιο: $e^{-ipx} u^{(s)}(p)$ και το εξερχόμενο: $e^{+ip'x} \bar{u}^{(s')}(p')$. Στο ενδιάμεσο ηλεκτρόνιο θα αντιστοιχήσουμε τον διαδότη: $i(\not{p} + \not{k} + m)/((p+k)^2 - m^2)$ για το πρώτο διάγραμμα και $i(\not{p} - \not{k}' + m)/((p-k')^2 - m^2)$ για το δεύτερο. Οι δύο κορυφές θα είναι: $ie\gamma^\mu$ και $ie\gamma^\nu$. Όλα τα εκθετικά θα δώσουν την δέλτα συνάρτηση για την διατήρηση της ορμής-ενέργειας. Οπότε, το αναλλοίωτο πλάτος για κάθε διάγραμμα θα είναι

$$-i\mathcal{M}_1 = \left[\bar{u}^{(s')}(p')(ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} (ie\gamma^\mu) u^{(s)}(p) \right] \epsilon_\mu \epsilon_\nu'^*$$

$$-i\mathcal{M}_2 = \left[\bar{u}^{(s')}(p')(ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2} (ie\gamma^\nu) u^{(s)}(p) \right] \epsilon_\mu \epsilon_\nu'^*$$

Προσέξτε ότι, όπως περιμέναμε, το άθροισμα $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ είναι αναλλοίωτο στην αλλαγή $(k, \epsilon) \leftrightarrow (-k', \epsilon'^*)$. Ας δούμε πώς εμφανίζεται εδώ η αναλλοιότητα βαθμίδας. Απαιτώντας την συνθήκη Lorentz, $\partial^\mu A_\mu = 0$, γνωρίζουμε ότι η φυσική δεν αλλάζει με τον μετασχηματισμό $\epsilon_\mu \rightarrow \epsilon_\mu + ak_\mu$. Γράφοντας, λοιπόν, $\mathcal{M} = \epsilon_\mu \epsilon_\nu'^* T^{\mu\nu}$ θα πρέπει

$$\mathcal{M} = \epsilon_\mu \epsilon_\nu'^* T^{\mu\nu} = (\epsilon_\mu + ak_\mu)(\epsilon_\nu'^* + ak_\nu') T^{\mu\nu}$$

οπότε έχουμε τις σχέσεις

$$k'_\nu T^{\mu\nu} = k_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Άσκηση 39 Δείξτε ότι πράγματι ισχύει η σχέση $k'_\nu T^{\mu\nu} = k_\mu T^{\mu\nu} = 0$ για το άθροισμα των δύο διαγραμμάτων και όχι για το καθένα από αυτά.

Χρησιμοποιώντας ότι $(p+k)^2 = s$ και $(p-k')^2 = u$ και αγνοώντας την μάζα του ηλεκτρονίου, τα δύο πλάτη γίνονται

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{s} \epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu e^2 \bar{u}^{(s')}(p') \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu u^{(s)}(p)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{1}{u} \epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu e^2 \bar{u}^{(s')}(p') \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu u^{(s)}(p)$$

θα πρέπει τώρα να υπολογίσουμε το $|\overline{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2}|^2$. Ας υπολογίσουμε πρώτα το $|\overline{\mathcal{M}_1}|^2$

$$|\overline{\mathcal{M}_1}|^2 = \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{1}{s^2} e^4 \text{Tr} \left[\not{p} \gamma^{\mu'} (\not{p} + \not{k}) \gamma^{\nu'} \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu \right] \epsilon_\mu \epsilon'^*_\nu \epsilon^*_{\mu'} \epsilon'_{\nu'}$$

Για τα φωτόνια έχουμε: $\epsilon_\mu \epsilon^*_{\mu'} = -g_{\mu\mu'}$ και $\epsilon'^*_\nu \epsilon'_{\nu'} = -g_{\nu\nu'}$ (βλ. το Παράρτημα) και το $|\overline{\mathcal{M}_1}|^2$ γίνεται

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}_1}|^2 &= \frac{1}{4} \frac{1}{s^2} e^4 \text{Tr} [\not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\nu \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu] \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{s^2} e^4 (-2)(-2) \text{Tr} [\not{p} (\not{p} + \not{k}) \not{p}' (\not{p} + \not{k})] \\
&= \frac{1}{s^2} e^4 \text{Tr} [\not{p} \not{k} \not{p}' (\not{p} + \not{k})] \\
&= \frac{1}{s^2} e^4 \text{Tr} [\not{k} \not{p}' \not{k} \not{p}] = \frac{1}{s^2} e^4 4 [(kp') (kp) + (kp) (kp')] = \\
&= \frac{4e^4}{s^2} 2 \frac{s(-u)}{4} = -2e^4 \frac{u}{s}
\end{aligned}$$

όπου στην τρίτη και στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $\not{p}^2 = p^2 = 0$. Όμοια, το άλλο διάγραμμα δίνει

$$|\overline{\mathcal{M}_2}|^2 = -2e^4 \frac{s}{u}$$

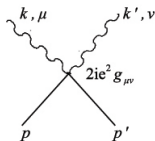
Άσκηση 40 Δείξτε ότι $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* = 0$

Επομένως,

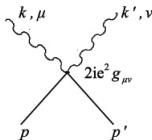
$$|\overline{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2}|^2 = |\overline{\mathcal{M}_1}|^2 + |\overline{\mathcal{M}_2}|^2 = 2e^4 \left(-\frac{u}{s} - \frac{s}{u} \right)$$

Άσκηση 41 Αν το φωτόνιο είναι δυνητικό, οπότε $k^2 = -Q^2 \neq 0$, δείξτε ότι $|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \left(-\frac{u}{s} - \frac{s}{u} + \frac{2Q^2 t}{su} \right)$

Σκέδαση Compton βαθμωτού “ηλεκτρονίου” Δείξτε ότι για να είναι αναλλοίωτο σε μετασχηματισμό βαθμίδας το αναλλοίωτο πλάτος για σκέδαση Compton βαθμωτού “ηλεκτρονίου”, χρειάζεται να συμπεριληφθεί άλλη μια αλληλεπίδραση της μορφής “ηλεκτρόνιο”-“ηλεκτρόνιο”-φωτόνιο-φωτόνιο, που φαίνεται στο σχ.



Σκέδαση Compton βαθμωτού “ηλεκτρονίου” Δείξτε ότι για να είναι αναλλοίωτο σε μετασχηματισμό βαθμίδας το αναλλοίωτο πλάτος για σκέδαση Compton βαθμωτού “ηλεκτρονίου”, χρειάζεται να συμπεριληφθεί άλλη μια αλληλεπίδραση της μορφής “ηλεκτρόνιο”-“ηλεκτρόνιο”-φωτόνιο-φωτόνιο, που φαίνεται στο σχήμα. (Π)

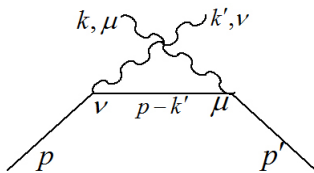
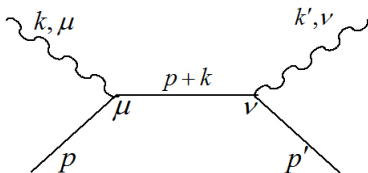


Λύση

Το αναλλοίωτο πλάτος για καθένα από τα δύο διαγράμματα που φαίνονται στο σχ. παρακάτω δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M}_1 &= \epsilon_\mu \epsilon_\nu'^* (ie(p + p + k)^\mu) \frac{i}{(p + k)^2 - m^2} (ie(p + k + p')^\nu) = \\
 &= \epsilon_\mu \epsilon_\nu'^* T_1^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -i\mathfrak{M}_2 &= \epsilon_\mu \epsilon_\nu'^* (ie(p + p - k')^\nu) \frac{i}{(p - k')^2 - m^2} (ie(p - k' + p')^\mu) = \\
 &= \epsilon_\mu \epsilon_\nu'^* T_2^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$



Όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση με ηλεκτρόνιο, η αναλλοίωτητα ως προς τη συμμετρία βαθμίδας σημαίνει ότι αν αντικαταστήσουμε το διάνυσμα πόλωσης του φωτονίου με ορμή k

$$\epsilon_\mu \rightarrow \epsilon_\mu + ak_\mu$$

το πλάτος θα μείνει αναλλοίωτο. Φυσικά το ίδιο θα πρέπει να συμβαίνει με αντίστοιχη αλλαγή του διανύσματος πόλωσης του φωτονίου με ορμή k' .

Οπότε, θα πρέπει να ισχύει (όπως και πάλι στην περίπτωση του ηλεκτρονίου)

$$k_{\mu} (T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu}) = 0$$

και αντίστοιχα και για την ορμή k'_{ν} . Ας υπολογίσουμε κάθε όρο

$$\begin{aligned} k_{\mu} T_1^{\mu\nu} &= k(2p + k) \frac{-ie^2}{(p + k)^2 - m^2} (p + k + p')^{\nu} = \\ &= 2pk \frac{-ie^2}{p^2 + k^2 + 2pk - m^2} (p + k + p')^{\nu} = \\ &= -ie^2(p + k + p')^{\nu} \end{aligned}$$

μιας και $k^2 = 0$ και $p^2 = m^2$. Συνεχίζουμε με τον δεύτερο όρο

$$\begin{aligned} k_{\mu} T_2^{\mu\nu} &= (p + p - k')^{\nu} \frac{-ie^2}{(p - k')^2 - m^2} k(p - k' + p') = \\ &= (2p - k')^{\nu} \frac{-ie^2}{p^2 + k'^2 - 2pk' - m^2} k(2p' - k) = \\ &= (2p - k')^{\nu} \frac{-ie^2}{-2pk'} 2kp' = +ie^2(2p - k')^{\nu} \end{aligned}$$

όπου πάλι χρησιμοποιήσαμε την διατήρηση της ορμής και την ισότητα $pk' = p'k$

$$k + p = k' + p' \rightarrow k - p' = k' - p \rightarrow kp' = k'p$$

Αθροίζοντας, παίρνουμε

$$\begin{aligned} k_\mu T_1^{\mu\nu} + k_\mu T_2^{\mu\nu} &= ie^2 (2p - k' - p - k - p')^\nu = \\ &= ie^2 (p - p' - k - k')_\nu = -2ie^2 k_\nu \end{aligned}$$

πράγμα που είναι διάφορο του μηδενός. Πράγματι, λοιπόν, λείπει ένα όρος της ίδιας ταξης ως προς e . Αυτός ακριβώς ο όρος προέρχεται από τον επιπλέον κόμβο που έχει η αλληλεπίδραση βαθμωτού ηλεκτρονίου-φωτονίου, όπως δίνεται στην εκφώνηση της άσκησης. Αυτό αντιστοιχεί σε ένα αναλλοίωτο πλάτος

$$-i\mathfrak{M}_3 = \epsilon_\mu \epsilon_\nu'^* 2ie^2 g^{\mu\nu} = \epsilon_\mu \epsilon_\nu'^* T_3^{\mu\nu} \Rightarrow T_3^{\mu\nu} = 2ie^2 g^{\mu\nu}$$

Οπότε

$$k^\mu T_3^{\mu\nu} = 2ie^2 k_\nu$$

και επομένως

$$k_{\mu} (T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu} + T_3^{\mu\nu}) = 0$$

Αντίστοιχα αποδεικνύεται και ότι

$$k'_{\nu} (T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu} + T_3^{\mu\nu}) = 0$$

Παράρτημα 3

Σχέσεις πληρότητας για τα φωτόνια (Π)

Γνωρίζουμε ότι για φωτόνια ισχύει η σχέση πληρότητας (βλ. την Άσκηση 34)

$$\sum_{\lambda=L,R} (\epsilon_{\lambda})_i^* (\epsilon_{\lambda})_j = \sum_{\kappa=1,2} \epsilon_{\kappa i} \epsilon_{\kappa j} = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j$$

όπου

$$\begin{aligned} \epsilon_R &= -\sqrt{\frac{1}{2}} (\epsilon_1 + i\epsilon_2), & \epsilon_L &= +\sqrt{\frac{1}{2}} (\epsilon_1 - i\epsilon_2) \\ \epsilon_1 &= (1, 0, 0), & \epsilon_2 &= (0, 1, 0) \end{aligned}$$

Πώς θα γράψουμε τη σχέση αυτή με συναλλοίωτο τρόπο; Σε κάθε διαδικασία με εισερχόμενο φωτόνιο, το αναλλοίωτο πλάτος θα περιέχει την μορφή

$$\epsilon_{\mu} T^{\mu \dots}_{\dots}$$

όπου οι ... αντιστοιχούν σε δείκτες που είναι “αθροισμένοι” (το αναλλοίωτο πλάτος είναι αναλλοίωτο Lorentz!!).

Όταν πάμε στο τετράγωνο του πλάτους και αθροίσουμε στα διανύσματα πόλωσης θα πάρουμε

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)} T_{\dots}^{\mu\dots} \epsilon_{\mu'}^{(\lambda)*} (T_{\dots}^{\mu'\dots})^{\dagger}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τα διανύσματα πόλωσης ϵ_1 και ϵ_2 , οπότε έχουμε θεωρήσει ότι η ορμή του φωτονίου μας είναι $\mathbf{q} = (0, 0, q)$ (λόγω της σχέσης $\mathbf{q} \cdot \epsilon = 0$). Τώρα θα “ανάγουμε” τα διανύσματα αυτά σε τετραδιανύσματα. Για το φωτόνιο θα έχουμε $q^{\mu} = (q, 0, 0, q)$ μιας και πρέπει $q^{\mu} q_{\mu} = 0$. Λόγω της σχέσης $q^{\mu} \epsilon_{\mu} = 0$, τα ϵ_1 και ϵ_2 θα γίνουν $\epsilon_1^{\mu} = (0, 1, 0, 0)$ και $\epsilon_2^{\mu} = (0, 0, 1, 0)$. Επομένως, το πλάτος θα γίνει

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)} \epsilon_{\mu'}^{(\lambda)*} T_{\dots}^{\mu\dots} (T_{\dots}^{\mu'\dots})^{\dagger} &= T_{\dots}^{1\dots} (T_{\dots}^{1\dots})^{\dagger} + T_{\dots}^{2\dots} (T_{\dots}^{2\dots})^{\dagger} \\ &= T_{\dots}^{0\dots} (T_{\dots}^{0\dots})^{\dagger} - T_{\dots}^{3\dots} (T_{\dots}^{3\dots})^{\dagger} - T_{\dots}^{\nu\dots} (T_{\dots}^{\nu\dots})^{\dagger} \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί

$$\begin{aligned} T^{\nu\dots}(T_{\nu\dots})^\dagger &= T^{0\dots}(T_{0\dots})^\dagger + T^{1\dots}(T_{1\dots})^\dagger + T^{2\dots}(T_{2\dots})^\dagger + T^{3\dots}(T_{3\dots})^\dagger = \\ &= T^{0\dots}(T^{0\dots})^\dagger - T^{1\dots}(T^{1\dots})^\dagger - T^{2\dots}(T^{2\dots})^\dagger - T^{3\dots}(T^{3\dots})^\dagger \end{aligned}$$

Επί πλέον, θα πρέπει $q_\mu T^{\nu\dots} = 0$. Επειδή το q^μ έχει τη συγκεκριμένη μορφή, $(q, 0, 0, q)$, θα πρέπει υποχρεωτικά

$$T^{0\dots} = T^{3\dots}$$

Επομένως, καταλήγουμε

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_{\mu'}^{(\lambda)*} T^{\mu\dots}(T^{\mu'\dots})^\dagger = -T^{\nu\dots}(T_{\nu\dots})^\dagger = -g_{\mu'\mu} T^{\mu\dots}(T^{\mu'\dots})^\dagger$$

δηλαδή

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_{\mu'}^{(\lambda)*} = -g_{\mu'\mu}$$

Άσκηση 29 Δείξτε τα θεωρήματα των ιχνών

(Π)

Λύση

Για τα $Tr[I] = 4$, $Tr[\gamma^\mu] = 0$ και $Tr[\gamma^5] = 0$ η απόδειξη είναι άμεση.

Για k περιττός

$$\begin{aligned} Tr[\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_k] &= Tr[\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_k \gamma^5 \gamma^5] = -Tr[\gamma^5 \not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_k \gamma^5] \\ &= -Tr[\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_k \gamma^5 \gamma^5] \rightarrow Tr[\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_k] = 0 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $(\gamma^5)^2 = 1$, την αντιμεταθετικότητα του γ^5 με τους πίνακες γ και την ιδιότητα $Tr[AB] = Tr[BA]$.

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] &= Tr[\gamma^\nu \gamma^\mu] = \frac{1}{2} Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu] = \\ \frac{1}{2} Tr[2g^{\mu\nu}] &= \frac{1}{2} 2g^{\mu\nu} Tr[I] = 4g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Για k άρτιος

$$\begin{aligned} Tr[\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_k] &= 2(a_1 \cdot a_2) Tr[\not{a}_3 \dots \not{a}_k] - Tr[\not{a}_2 \not{a}_1 \not{a}_3 \dots \not{a}_k] = \\ &= 2(a_1 \cdot a_2) Tr[\not{a}_3 \dots \not{a}_k] - 2(a_1 \cdot a_3) Tr[\not{a}_2 \not{a}_4 \dots \not{a}_k] + Tr[\not{a}_2 \not{a}_3 \not{a}_1 \dots \not{a}_k] = \\ &= 2(a_1 \cdot a_2) Tr[\not{a}_3 \dots \not{a}_k] - 2(a_1 \cdot a_3) Tr[\not{a}_2 \not{a}_4 \dots \not{a}_k] + \dots - Tr[\not{a}_2 \dots \not{a}_k \not{a}_1] \end{aligned}$$

Ο τελευταίος όρος της τελευταίας γραμμής είναι ίσος με τον όρο στο αριστερό μέλος της ισότητας ($Tr[AB] = Tr[BA]$). Επομένως

$$\begin{aligned} 2 Tr[\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_k] &= 2(a_1 \cdot a_2) Tr[\not{a}_3 \dots \not{a}_k] - 2(a_1 \cdot a_3) Tr[\not{a}_2 \not{a}_4 \dots \not{a}_k] + \dots \Rightarrow \\ Tr[\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_k] &= (a_1 \cdot a_2) Tr[\not{a}_3 \dots \not{a}_k] - (a_1 \cdot a_3) Tr[\not{a}_2 \not{a}_4 \dots \not{a}_k] + \dots \\ &\quad + (a_1 \cdot a_k) Tr[\not{a}_2 \not{a}_3 \dots \not{a}_{k-1}] \end{aligned}$$

Για το $Tr[\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu] = 0$.

Αν $\mu = \nu$, τότε

$$Tr[\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\mu] = \pm Tr[\gamma_5] = 0$$

μιας και $(\gamma^0)^2 = 1$, $(\gamma^i)^2 = -1$ και $Tr[\gamma_5] = 0$

Αν $\mu \neq \nu$,

$$\text{Tr}[\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu] = \text{Tr}[i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu \gamma^\nu]$$

Τα μ και ν είναι ίσα με ένα από τα 0, 1, 2 και 3. Μετακινώντας τα, και χρησιμοποιώντας πάλι ότι $(\gamma^0)^2 = 1$ και $(\gamma^i)^2 = -1$, θα καταλήξουμε σε ένα Tr με δύο γάμμα πίνακες με ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΤΣ δείκτες. Αλλά, $\text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4g^{\rho\sigma}$. Επομένως, το Tr θα είναι μηδέν.

Για το $\text{Tr}[\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

Αν κάποιο ζευγάρι από τα μ, ν, ρ, σ είναι ίσα, τότε μπορούμε με μεταθέσεις καταλήξουμε σε ίχνος της μορφής $\text{Tr}[\gamma_5 \gamma^\tau \gamma^\omega]$ που είναι ίσο με μηδέν, από την προηγούμενη ιδιότητα. Αν τρεις δείκτες είναι ίσοι καταλήγουμε σε ίχνος της μορφής $\text{Tr}[\gamma_5 \gamma^\tau]$ που είναι μηδέν γιατί καταλήγουμε σε περιττό αριθμό γ πινάκων (αντικαθιστώντας το γ_5 με το ίσο του).

Αν όλοι οι δείκτες είναι ίσοι, τότε καταλήγουμε στο $Tr[\gamma_5]$ που είναι μηδέν. Οπότε, θα πρέπει οι δείκτες μ, ν, ρ, σ να είναι διαφορετικοί. Επίσης οποιαδήποτε εναλλαγή δύο κοντινών δεικτών οδηγεί σε αλλαγή προσήμου:

$$Tr[\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 2g_{\mu\nu} Tr[\gamma_5 \gamma^\rho \gamma^\sigma] - Tr[\gamma_5 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = -Tr[\gamma_5 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma]$$

Επομένως, το ίχνος που ζητάμε είναι ανάλογο του $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Για να βρούμε τον νορμαλισμό μπορούμε να επιλέξουμε μια συγκεκριμένη περίπτωση

$$Tr[\gamma_5 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3] = -iTr[\gamma_5 \gamma_5] = -iTr[(\gamma^5)^2] = -4i$$

Άσκηση 39 Στην σκέδαση Compton, δείξτε ότι πράγματι ισχύει η σχέση $k'_\nu T^{\mu\nu} = k_\mu T^{\mu\nu} = 0$ για το άθροισμα των δύο διαγραμμάτων και όχι για το καθένα από αυτά. (Π)

Λύση

$$\begin{aligned}
 k_\mu T^{\mu\nu} &= (ie)^2 i \bar{u}_{p'}^{(s')} \left[\gamma^\nu \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2} \not{k} + \not{k} \frac{\not{p} - \not{k}' + m}{(p-k')^2 - m^2} \gamma^\nu \right] u_p^{(s)} = \\
 & \quad (\text{όπου } k' \text{ βάζουμε } k + p - p' \text{ και χρησιμοποιούμε } \not{k}\not{k} = k^2 = 0) \\
 &= ie^2 \bar{u}_{p'}^{(s')} \left[\gamma^\nu \frac{\not{p}\not{k} + m\not{k}}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{\not{k}\not{p} - \not{k}(\not{p} - \not{p}') + m\not{k}}{(p-k')^2 - m^2} \gamma^\nu \right] u_p^{(s)} = \\
 & \quad (\text{χρησιμοποιούμε } \not{p}\not{k} = 2pk - \not{k}\not{p} \text{ και } \not{k}\not{p}' = 2p'k - \not{p}'\not{k}) \\
 &= ie^2 \bar{u}_{p'}^{(s')} \left[\gamma^\nu \frac{2pk - \not{k}\not{p} + m\not{k}}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{2p'k - \not{p}'\not{k} + m\not{k}}{(p-k')^2 - m^2} \gamma^\nu \right] u_p^{(s)} =
 \end{aligned}$$

τώρα χρησιμοποιούμε ότι $\not{p}u_p = mu_p$ και $\bar{u}_{p'}\not{p}' = m\bar{u}_{p'}$)

$$-ie^2 \bar{u}_{p'}^{(s')} \left[\gamma^\nu \frac{2pk - \not{k}m + m\not{k}}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{2p'k - m\not{k} + m\not{k}}{(p-k')^2 - m^2} \gamma^\nu \right] u_p^{(s)} =$$

(οι παρονομαστές $(p+k)^2 - m^2 = 2pk$ και $(p-k')^2 - m^2 = -2pk'$)

$$-ie^2 \bar{u}_{p'}^{(s')} \left[\gamma^\nu \frac{2pk}{2pk} + \frac{2kp'}{-2kp'} \gamma^\nu \right] u_p^{(s)} = 0$$

Όμοια δείχνεται ότι και $k'_\nu T^{\nu\mu} = 0$.