

Διγραμμικές αναλλοίωτες ποσότητες

Είναι χρήσιμο να βρούμε όρους της μορφής $\bar{\psi}\Gamma\psi$, όπου Γ γινόμενο γ πινάκων, με καθορισμένους κανόνες μετασχηματισμού κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz ώστε να φτιάξουμε αναλλοίωτες ποσότητες. Ορίζουμε $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ και εύκολα βλέπουμε ότι

$$\gamma^{5\dagger} = -i\gamma^{3\dagger}\gamma^{2\dagger}\gamma^{1\dagger}\gamma^{0\dagger} = -i(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5$$

χρησιμοποιώντας την αντιμετάθεση των γ πινάκων. Επίσης ισχύει ότι $(\gamma^5)^2 = I$ και $\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$. Στην Dirac-Pauli αναπαράσταση, ο γ^5 γράφεται

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Όλες οι δυνατές (ανεξάρτητες) διγραμμικές ποσότητες είναι οι ακόλουθες (όπου $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$)

		Αρ. συνιστ.	Χωρ. αναστρ.
$\bar{\psi}\psi$	Βαθμωτό	1	+
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	Διάνυσμα	4	Χωρικές −
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	Τανυστής	6	
$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	‘Αξονικό’ διάνυσμα	4	Χωρικές +
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	Ψευδοβαθμωτό	1	−

Θα πρέπει να δούμε πώς μετασχηματίζεται το ψ κάτω από μετασχηματισμούς (π.χ. Lorentz, χωρική αντιστροφή) ώστε να παραμένει αναλλοίωτη η εξίσωση Dirac. Δηλαδή, η $\psi'(x')$ να υπακούει την εξίσωση

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m\right) \psi'(x') = 0$$

με $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$. Το ζητούμενο είναι να βρούμε το S τέτοιο ώστε $\psi'(x') = S\psi(x)$. Υπενθυμίζοντας ότι $\psi = e^{-ipx} u(p)$, περιμένουμε το S να είναι ανεξάρτητο από το x . Γνωρίζοντας ότι

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

έχουμε, ξεκινώντας από την εξίσωση που πληροί το $\psi(x)$,

$$\left(i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - m \right) S^{-1} \psi'(x') = \left(S i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - m \right) \psi'(x') = 0$$

Άρα, η απαίτηση είναι

$$S \gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1} = \gamma^\nu \rightarrow \gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu = S^{-1} \gamma^\nu S$$

Άσκηση 27 Δείξτε ότι για ένα απειροστό ορθό μετασχηματισμό Lorentz, $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu$, η μορφή

$$S_L = 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu}$$

πληροί την αναγκαία σχέση. Δείξτε επίσης ότι

$$S_L^{-1} = \gamma^0 S_L^\dagger \gamma^0 \quad \text{και} \quad \gamma^5 S_L = S_L \gamma^5$$

Για χωρική αντιστροφή, όπου ο πίνακας $\Lambda^\nu{}_\mu = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, η βασική απαίτηση που θα πρέπει να πληροί ο S είναι $S_P^{-1} \gamma^0 S_P = \gamma^0$ και $S_P^{-1} \gamma^k S_P = -\gamma^k$, $k = 1, 2, 3$. Αυτές οι σχέσεις πληρούνται με $S_P = \gamma^0$.

Οπότε, στην Dirac-Pauli αναπαράσταση, όπου $\gamma^0 = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$, οι τέσσερις συνιστώσες του ψ μετασχηματίζονται, για χωρική αντιστροφή, ως

$$\psi'_{1,2} = \psi_{1,2}, \quad \psi'_{3,4} = -\psi_{3,4}$$

Δηλαδή, στο σύστημα ηρεμίας, οι θετικής και οι αρνητικής ενέργειας καταστάσεις (δηλαδή το ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο) έχουν αντίθετη εσωτερική ομοτιμία.

Τώρα μπορούμε να ελέγξουμε τους μετασχηματισμούς των διγραμμικών ποσοτήτων. Ας δούμε πρώτα πώς μετασχηματίζεται το $\bar{\psi}$ σε μετασχηματισμό Lorentz $\psi'(x') = S_L \psi(x)$

$$\bar{\psi}' = \psi'^{\dagger} \gamma^0 = (S_L \psi)^{\dagger} \gamma^0 = \psi^{\dagger} S_L^{\dagger} \gamma^0 = \psi^{\dagger} \gamma^0 S_L^{-1} = \bar{\psi} S_L^{-1}$$

Οπότε, σε μετασχηματισμό Lorentz,

$$\bar{\psi}' \gamma^{\mu} \psi' = \bar{\psi} S_L^{-1} \gamma^{\mu} S_L \psi = \Lambda^{\mu}_{\nu} (\bar{\psi} \gamma^{\nu} \psi)$$

δηλαδή μετασχηματίζεται ως τετραδιάνυσμα.

Για χωρική αντιστροφή

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' &= \psi'^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi' = (S_P\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(S_P\psi) = (\gamma^0\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(\gamma^0\psi) = \\ &= \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi = \begin{cases} +\bar{\psi}\gamma^0\psi, & \mu = 0 \\ -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, & \mu = 1, 2, 3 \end{cases}\end{aligned}$$

Για το $\bar{\psi}\psi$ έχουμε

$$\bar{\psi}'\psi' = \psi^\dagger S^\dagger\gamma^0 S\psi = \psi^\dagger\gamma^0 S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi$$

για S_L και S_P .

Φερμιόνια με μηδενική μάζα. Το νετρίνο (;)

Στην περίπτωση της μηδενικής μάζας, η εξίσωση του Dirac γίνεται

$$H\psi = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}\psi = E\psi$$

Τώρα συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση Weyl των πινάκων $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

Οπότε

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi = E \chi \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \phi = E \phi \end{cases}$$

Για κάθε εξίσωση ισχύει $E^2 = p^2 \Rightarrow E = \pm p$.

Ας δούμε την πρώτη εξίσωση $-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi = E \chi$. Για $E > 0$ έχουμε

$$-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi = E \chi \Rightarrow -\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{E} \chi = \chi \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \chi = -\chi$$

Άρα, το χ έχει αρνητική ελικότητα (helicity). Η ίδια πρώτη εξίσωση, για $E < 0$ (ως συνήθως μιλάμε για $-E$ και $-\mathbf{p}$), γράφεται

$$-\boldsymbol{\sigma} \cdot (-\mathbf{p}) \chi = -E \chi \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} \cdot (-\hat{\mathbf{p}}) \chi = \chi$$

Επομένως το χ , για $E < 0$, έχει θετική ελικότητα.

Ακριβώς τα αντίθετα συμβαίνουν για την δεύτερη εξίσωση. Το ϕ , για $E > 0$, έχει θετική ελικότητα, ενώ για $E < 0$ έχει αρνητική ελικότητα.

Στην αναπαράσταση Weyl, ο $\gamma^5 = \text{diag}(-I, I)$. Εύκολα φαίνεται ότι

$$P_L \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι τελεστές P_L και P_R είναι προβολικοί: $P_L + P_R = 1$, $P_L P_R = 0$ και $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$.

Αν ψ είναι ένας γενικός spinor, τότε το $P_L \psi$ ονομάζεται αριστερή συνιστώσα και το $P_R \psi$ δεξιά συνιστώσα του ψ . Πάντοτε μπορούμε να γράψουμε $\psi = (P_L + P_R)\psi = P_L \psi + P_R \psi$.

Βλέπουμε ότι

$$P_L \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$P_R \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix}$$

Οπότε ένας spinor με μηδενικές τις δύο κάτω συνιστώσες είναι ιδιοκατάσταση του P_L , έχει αριστερή χειραλικότητα (chirality)

$$P_L \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

ΔΗΛΑΔΗ: το $\begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$ με $E > 0$, έχει αρνητική ελικότητα και αριστερή χειραλικότητα (αριστερόστροφο). Το ίδιο με $E < 0$ είχαμε δει ότι έχει θετική ελικότητα και πάλι βέβαια

$$P_L \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

αλλά λόγω της περιγραφής με $-\mathbf{p}$ (αντισωματίδιο), έχει δεξιά χειραλικότητα (δεξιόστροφο). Τα αντίθετα ισχύουν για τον spinor με μηδενικές τις δύο πάνω συνιστώσες.

Συνοψίζουμε (για $m = 0$)

$\begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$, $E > 0$ αριστερόστροφο, $h = -1$ (αριστερόστροφο νεutrίνο)

$\begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$, $E < 0$ δεξιόστροφο, $h = +1$ (δεξιόστροφο αντineutrίνο)

$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix}$, $E > 0$ δεξιόστροφο, $h = +1$ (δεξιόστροφο νεutrίνο)

$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix}$, $E < 0$ αριστερόστροφο, $h = -1$ (αριστερόστροφο αντineutrίνο)

Το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα είναι $j^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e$. Στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις το αντίστοιχο ρεύμα είναι

$$\frac{1}{2} \bar{\psi}_e [\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^5] \psi_{\nu_e} = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi_{\nu_e}$$

Αλλά, για άμαζο νεutrίνο, η ποσότητα $\frac{1 - \gamma^5}{2} \psi_{\nu_e}$ αντιστοιχεί στο αριστερόστροφο νεutrίνο (ή δεξιόστροφο αντineutrίνο). Στη θεωρία των ασθενών αλληλεπιδράσεων δεν εμφανίζεται δεξιόστροφο νεutrίνο (ή αριστερόστροφο αντineutrίνο).

Για $m \neq 0$, το $u_L = P_L u$ δεν είναι ιδιοκατάσταση της ελικότητας. Χρησιμοποιώντας την Dirac-Pauli αναπαράσταση θα έχουμε

$$P_L u(p) = \frac{1 - \gamma^5}{2} u(p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left(-1 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή της ελικότητας έχουμε

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left(-1 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \frac{p}{E+m}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \frac{p}{E+m}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

βλέπουμε ότι το u_L δεν είναι ιδιοκατάσταση της ελικότητας. Αν όμως $m = 0$, και τότε $p = E$, θα έχουμε

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι για $m = 0$ η δράση του γ^5 και του τελεστή της ελικοτότητας ταυτίζονται

$$\begin{aligned}\gamma^5 u(p) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Majorana spinors

Ας υποθέσουμε ότι ένα σωματίδιο, που περιγράφεται από την ψ_M , συμπίπτει με το αντισωματίδιό του. Δηλαδή, $\psi_M^C = \psi_M$. Βέβαια, ένα τέτοιο σωματίδιο θα πρέπει να είναι ηλεκτρικά αφόρτιστο. Ας δούμε ποιες σχέσεις πληρούν οι συνιστώσες του. Γνωρίζουμε ότι

$$\psi_M^C = C\gamma^0\psi_M^* = i\gamma^2\psi_M^* = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \psi_M^*$$

Γράφοντας το ψ_M με δυο συνιστώσες ϕ και χ έχουμε

$$\psi_M^C = \psi_M \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^* \\ \chi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

ή με άλλα λόγια

$$i\sigma_2 \chi^* = \phi$$

Η άλλη σχέση, $-i\sigma_2 \phi^* = \chi$ είναι ισοδύναμη μιας και $\sigma_2^* = -\sigma_2$ καθώς και $(\sigma_2)^2 = 1$. Οπότε, το ψ_M γράφεται

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \phi \\ -i\sigma_2 \phi^* \end{pmatrix}, \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \psi_M = \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi^* \\ \chi \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να δείξουμε τώρα ότι αν το ϕ έχει αρνητική ελικτικότητα, δηλαδή, $\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}\phi = -\phi$, τότε το $-i\sigma_2 \phi^*$ έχει θετική ελικτικότητα.

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}(-i\sigma_2 \phi^*) &= -i(\sigma_1\sigma_2\hat{p}_1 + \sigma_2\sigma_2\hat{p}_2 + \sigma_3\sigma_2\hat{p}_3)\phi^* = \\ &= -i(-\sigma_2\sigma_1\hat{p}_1 + \sigma_2\sigma_2\hat{p}_2 - \sigma_2\sigma_3\hat{p}_3)\phi^* = \\ &= -i(-\sigma_2\sigma_1^*\hat{p}_1 - \sigma_2\sigma_2^*\hat{p}_2 - \sigma_2\sigma_3^*\hat{p}_3)\phi^* = \\ &= -i\sigma_2(-\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}\phi)^* = -i\sigma_2 \phi^* \end{aligned}$$

Επομένως ο ψ_M (Majorana spinor), μπορεί να περιγράφει με την πάνω συνιστώσα ϕ ένα αριστερόστροφο νεutrίνο και με την κάτω συνιστώσα $-i\sigma_2\phi^*$ ένα δεξιόστροφο αντineutrίνο.

Άσκηση 26 Δείξτε ότι οι τελεστές

$$\Lambda_+ = \frac{\not{p} + m}{2m}, \quad \Lambda_- = \frac{-\not{p} + m}{2m}$$

προβάλλουν τις καταστάσεις θετικής και αρνητικής ενέργειας αντίστοιχα. Ελέγξτε ότι, ως προβολικοί τελεστές, υπακούουν στους κανόνες: $\Lambda_{\pm}^2 = \Lambda_{\pm}$ και $\Lambda_+ + \Lambda_- = 1$. (Π)

Λύση

Ένα τυχαίο spinor γράφεται ως $\sum_{r=1}^4 a_r u^{(r)}$. Οπότε

$$\begin{aligned} \Lambda_+ \sum_{r=1}^4 a_r u^{(r)} &= \frac{\not{p} + m}{2m} \sum_{r=1}^4 a_r u^{(r)} = \frac{1}{2m} \sum_{s=1}^2 u^{(s)} \bar{u}^{(s)} \sum_{r=1}^4 a_r u^{(r)} = \\ &= \frac{1}{2m} (a_1 u^{(1)} \bar{u}^{(1)} u^{(1)} + a_2 u^{(2)} \bar{u}^{(2)} u^{(2)}) = \frac{1}{2m} (a_1 u^{(1)} + a_2 u^{(2)}) 2m = \\ &= a_1 u^{(1)} + a_2 u^{(2)} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\bar{u}^{(s)} u^{(s')} = 2m \delta^{ss'}$. Όμοια βρίσκουμε ότι $\Lambda_- \sum_{r=1}^4 a_r u^{(r)} = a_3 u^{(3)} + a_4 u^{(4)}$.

Εύκολα φαίνεται ότι $\Lambda_+ + \Lambda_- = 1$ και επίσης

$$\Lambda_+^2 = \frac{1}{4m^2}(\not{p} + m)^2 = \frac{p^2 + m^2 + 2\not{p}m}{4m^2} = \frac{2(\not{p} + m)m}{4m^2} = \frac{\not{p} + m}{2m}$$

και όμοια για τον Λ_-^2 .

Άσκηση 27 Δείξτε ότι για ένα απειροστό ορθό μετασχηματισμό Lorentz, $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu$, η μορφή

$$S_L = 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu}$$

πληροί την αναγκαία σχέση: $S_L^{-1} \gamma^\sigma S_L = \gamma^\tau \Lambda^\sigma{}_\tau$. Δείξτε επίσης ότι

$$S_L^{-1} = \gamma^0 S_L^\dagger \gamma^0 \quad \text{και} \quad \gamma^5 S_L = S_L \gamma^5$$

(Π)

Λύση

Πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$S_L^{-1} \gamma^\sigma S_L = \gamma^\tau \Lambda^\sigma{}_\tau$$

Ξεκινάμε με το αριστερό σκέλος. Για απειροστό μετασχηματισμό

$$S_L = 1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu} \rightarrow S_L^{-1} = 1 + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} S_L^{-1} \gamma^\sigma S_L &= \left(1 + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu} \right) \gamma^\sigma \left(1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu} \right) \\ &= \gamma^\sigma + \frac{i}{4} \epsilon^{\mu\nu} (\sigma_{\mu\nu} \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \sigma_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Ας συγκεντρωθούμε στην παρένθεση της τελευταίας σχέσης.
Εισάγοντας τον ορισμό του $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\sigma - \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma^\sigma \gamma_\nu \gamma_\mu) &= \\ \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\sigma - \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\sigma - 2g_\mu^\sigma \gamma_\nu + 2g_\nu^\sigma \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\sigma &+ 2g_\nu^\sigma \gamma_\mu - 2g_\mu^\sigma \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\sigma) = \\ -2i (g_\mu^\sigma \gamma_\nu - g_\nu^\sigma \gamma_\mu) \end{aligned}$$

γιατί $\gamma^\sigma \gamma_\mu \gamma_\nu = 2g_\mu^\sigma \gamma_\nu - \gamma_\mu \gamma^\sigma \gamma_\nu = 2g_\mu^\sigma \gamma_\nu - 2g_\nu^\sigma \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\sigma$ και
όμοια για το $\gamma^\sigma \gamma_\nu \gamma_\mu$.

Οπότε, η αρχική σχέση γίνεται

$$\begin{aligned}
 S_L^{-1} \gamma^\sigma S_L &= \gamma^\sigma + \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} (g_\mu^\sigma \gamma_\nu - g_\nu^\sigma \gamma_\mu) \\
 &= \gamma^\sigma + \frac{1}{2} (\epsilon^{\sigma\nu} \gamma_\nu - \epsilon^{\mu\sigma} \gamma_\mu) \quad (\epsilon^{\sigma\mu} = -\epsilon^{\mu\sigma}) \\
 &= \gamma^\sigma + \frac{1}{2} (\epsilon^{\sigma\nu} \gamma_\nu + \epsilon^{\sigma\mu} \gamma_\mu) \\
 &= \gamma^\sigma + \epsilon^{\sigma\nu} \gamma_\nu = \gamma^\sigma + \epsilon^\sigma{}_\tau g^{\nu\tau} \gamma_\nu = \gamma^\sigma + \epsilon^\sigma{}_\tau \gamma^\tau
 \end{aligned}$$

Αλλά το δεξί μέλος της αρχικής προς απόδειξη σχέσης γράφεται

$$\gamma^\tau \Lambda^\sigma{}_\tau = \gamma^\tau (\delta^\sigma{}_\tau + \epsilon^\sigma{}_\tau) = \gamma^\sigma + \epsilon^\sigma{}_\tau \gamma^\tau$$

Οπότε, αποδείξαμε την αρχική σχέση

$$S_L^{-1} \gamma^\sigma S_L = \gamma^\tau \Lambda^\sigma{}_\tau$$

Για την σχέση $S_L^{-1} = \gamma^0 S_L^\dagger \gamma^0$, προσέξτε ότι

$$\gamma^0 \sigma_{\mu\nu}^\dagger \gamma^0 = -\frac{i}{2} \gamma^0 (\gamma_\nu^\dagger \gamma_\mu^\dagger - \gamma_\mu^\dagger \gamma_\nu^\dagger) \gamma^0 = -\frac{i}{2} (\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu) = \sigma_{\mu\nu}$$

λόγω της ταυτότητας $\gamma^0 \gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu \gamma^0$.

Οπότε, εύκολα φαίνεται ότι

$$\gamma^0 S_L^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \left(1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu} \right)^\dagger \gamma^0 = 1 + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu} = S_L^{-1}$$

Η τελευταία σχέση, $\gamma^5 S_L = S_L \gamma^5$ αποδεικνύεται εύκολα μιας και ο γ_5 αντιμετωπίζεται με τους υπόλοιπους γ πίνακες, οπότε

$$\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} \gamma_5$$

Παράρτημα 2

Μετασχηματισμός Lorentz

Για κίνηση στον άξονα x (δηλαδή x^1) έχουμε ($c = 1$)

$$x'^0 = \frac{x^0 - vx^1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x'^1 = \frac{x^1 - vx^0}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \text{δηλαδή } x'^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu$$

όπου

$$\Lambda^0_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \Lambda^0_1 = \frac{-v}{\sqrt{1 - v^2}}, \Lambda^1_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \Lambda^1_0 = \frac{-v}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Χρησιμοποιώντας τα $x_0 = x^0$ και $x_1 = -x^1$ θα έχουμε

$$x'^0 = \frac{x_0 + vx_1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x'^1 = \frac{-x_1 - vx_0}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \text{δηλαδή } x'^\nu = \Lambda^{\nu\sigma} x_\sigma$$

όπου

$$\Lambda^{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \Lambda^{01} = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}, \Lambda^{11} = \frac{-1}{\sqrt{1 - v^2}}, \Lambda^{10} = \frac{-v}{\sqrt{1 - v^2}}$$

δηλαδή

$$\Lambda^{01} = -\Lambda^{10}$$

Χρησιμοποιώντας τον μετρικό ταυνοστή

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} g^{\mu\sigma} x_{\sigma} = \Lambda^{\nu\sigma} x_{\sigma}$$

Θέλει προσοχή η σειρά των δεικτών ν, σ . Επίσης, μπορούμε να γράψουμε (πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη σχέση επί $g_{\nu\rho}$)

$$g_{\nu\rho} x'^{\nu} = g_{\nu\rho} \Lambda^{\nu\sigma} x_{\sigma} = \Lambda_{\rho}^{\sigma} x_{\sigma}$$

δηλαδή

$$x'_{\rho} = \Lambda_{\rho}^{\sigma} x_{\sigma}$$

Η διατηρούμενη ποσότητα είναι το 'τετράγωνο' του τετραδιανύσματος

$$(x')^2 = (x)^2 \Rightarrow x'^{\mu} x'_{\mu} = x^{\nu} x_{\nu} \Rightarrow x'^{\mu} x'^{\rho} g_{\rho\mu} = x^{\nu} x^{\sigma} g_{\sigma\nu} \rightarrow \\ \Lambda^{\mu}_{\mu'} x^{\mu'} \Lambda^{\rho}_{\rho'} x^{\rho'} g_{\rho\mu} = x^{\nu} x^{\sigma} g_{\sigma\nu}$$

Τα x είναι βέβαια ανεξάρτητες παράμετροι. Οπότε, εξισώνοντας δεξιά και αριστερά τους ίδιους όρους, δηλαδή θέτοντας $\mu' = \nu$ και $\rho' = \sigma$, θα έχουμε

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda^{\rho}_{\sigma} g_{\rho\mu} = g_{\sigma\nu} \Rightarrow \Lambda^{\rho}_{\sigma} g_{\rho\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} = g_{\sigma\nu} \Rightarrow \Lambda^T g \Lambda = g$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\sigma} x^{\sigma} \Rightarrow g_{\mu\nu} x'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\sigma} x^{\sigma} \Rightarrow x'_{\mu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\sigma} x^{\sigma} \Rightarrow \\ \Lambda^{\mu}_{\rho} x'_{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\sigma} x^{\sigma} \Rightarrow \Lambda^{\mu}_{\rho} x'_{\mu} = g_{\rho\sigma} x^{\sigma} = x_{\rho}$$

και όμοια $x^{\rho} = \Lambda_{\mu}^{\rho} x'^{\mu}$. Συνοψίζοντας

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu}, \quad x'_{\rho} = \Lambda_{\rho}^{\sigma} x_{\sigma}, \quad x_{\rho} = \Lambda^{\mu}_{\rho} x'_{\mu}, \quad x^{\rho} = \Lambda_{\mu}^{\rho} x'^{\mu}$$

Τέλος

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\sigma} x'^{\sigma} \Rightarrow \Lambda^{\nu}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\sigma} = \delta^{\nu}_{\sigma}$$

Απειροστός μετασχηματισμός

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}_{\nu}$$

Από τη σχέση $\Lambda^{\rho}_{\sigma} g_{\rho\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} = g_{\sigma\nu}$ έχουμε

$$g_{\sigma\nu} = \Lambda^{\rho}_{\sigma} g_{\rho\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} = (\delta^{\rho}_{\sigma} + \epsilon^{\rho}_{\sigma}) g_{\rho\mu} (\delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}_{\nu}) = \\ = g_{\sigma\nu} + \epsilon^{\rho}_{\sigma} g_{\rho\mu} \delta^{\mu}_{\nu} + \delta^{\rho}_{\sigma} g_{\rho\mu} \epsilon^{\mu}_{\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \\ = g_{\sigma\nu} + (\epsilon_{\nu\sigma} + \epsilon_{\sigma\nu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

δηλαδή $\epsilon_{\nu\sigma} + \epsilon_{\sigma\nu} = 0$.

Ο πίνακας $\epsilon_{\nu\sigma}$ είναι αντισυμμετρικός, επομένως έχει 6 ανεξάρτητα στοιχεία: 3 στροφές και 3 κινήσεις. Για παράδειγμα, στροφή γύρω από τον άξονα z

$$\left. \begin{aligned} x'^0 &= x^0, & x'^3 &= x^3, \\ x'^1 &= x^1 + \epsilon x^2, \\ x'^2 &= -\epsilon x^1 + x^2 \end{aligned} \right\}, \quad \epsilon^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ποιος είναι ο $\epsilon_{\mu\nu}$

$$\epsilon_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} \epsilon^\rho{}_\nu = g_{\mu 1} \epsilon^1{}_\nu + g_{\mu 2} \epsilon^2{}_\nu$$

Τα διάφορα του μηδενός είναι $\epsilon^1{}_2 = -\epsilon^2{}_1 = \epsilon$. Επομένως τα μόνα διάφορα του μηδενός στοιχεία είναι $-\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \epsilon$, δηλαδή

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Για κίνηση στον άξονα z (τώρα $\epsilon = v$)

$$\left. \begin{aligned} x'^1 &= x^1, & x'^2 &= x^2, \\ x'^0 &= x^0 - \epsilon x^3, \\ x'^3 &= -\epsilon x^0 + x^3 \end{aligned} \right\}, \quad \epsilon^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\epsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και όπως πριν

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +\epsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$