

Οι γενικές λύσεις της εξίσωσης Dirac (Gauge Theories in Particle Physics, Aitchison and Hey)

Από την αρχική μορφή της Dirac

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-i\mathbf{a} \cdot \nabla + \beta m)\psi$$

και γράφοντας $\psi = \omega e^{-ip^\mu x_\mu}$ όπου $\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ έχουμε

$$\begin{aligned} E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} &= (-i\mathbf{a} \cdot (i)\mathbf{p} + \beta m) \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Οπότε, παίρνουμε

$$E\phi = m\phi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi$$

$$E\chi = -m\chi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\phi$$

Η δεύτερη εξίσωση δίνει $\chi = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi$.

Επομένως, $\omega = \left(\begin{array}{c} \phi \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi \end{array} \right)$ χωρίς νορμαλισμό. Χρησιμοποιώντας την μορφή του χ στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$E\phi = m\phi + \sigma \cdot \mathbf{p} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi$$

$$E = m + \frac{p^2}{E+m} \rightarrow (E-m)(E+m) = p^2$$

$$E^2 = p^2 + m^2 \rightarrow E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$$

Ποια είναι η φυσική σημασία του ω με τις δύο συνιστώσες; Στη σχέση που δίνει το ω , το ϕ είναι αυθαίρετο. Μπορεί να πάρει τις τιμές $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα

ιδιοδιανύσματα του τελεστή $S_z = \frac{1}{2}\sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ με

ιδιοτιμές $\pm \frac{1}{2}$. Βέβαια, η πιο γενική μορφή του ϕ είναι $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ με a, b μιγαδικοί αριθμοί.

Έχουμε λοιπόν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, όπως ακριβώς ένα σύστημα με στροφορμή $j = 1/2$ ($2j + 1$ καταστάσεις).

Στο σύστημα ηρεμίας ($\mathbf{p}=0$), η ερμηνεία είναι άμεση. Το $\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} = 0$, άρα και $\chi = 0$, και οι δύο λύσεις γίνονται

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}$$

Και οι δύο λύσεις έχουν ίδια ενέργεια. Άρα υπάρχει κάποιος τελεστής που μετατίθεται με τον αντίστοιχο της ενέργειας (την χαμιλτονιανή) και ξεχωρίζει τις δύο καταστάσεις. Αυτός είναι ο

$$\Sigma_z = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad \text{όπου} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

που βέβαια μετατίθεται με την χαμιλτονιανή που στην περίπτωση μας ($\mathbf{p} = 0$) είναι απλά βm (είναι και οι δύο διαγώνιοι). Οι δύο καταστάσεις έχουν ιδιοτιμές ± 1 .

Γενικεύοντας $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ με την ιδιότητα

$[\frac{1}{2}\Sigma_x, \frac{1}{2}\Sigma_y] = i\frac{1}{2}\Sigma_z$ και $(\frac{1}{2}\mathbf{\Sigma})^2 = \frac{3}{4}I$. Αυτές ακριβώς είναι οι ιδιότητες ενός κβαντομηχανικού τελεστή στροφορμής με $j = 1/2$. Επομένως, ο $\frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}$ μπορεί να ερμηνευθεί ως ο spin 1/2 κατάλληλος τελεστής για το σύστημα ηρεμίας. Ακριβώς, για το σύστημα ηρεμίας η εξίσωση Dirac περιγράφει ένα σωματίδιο με spin 1/2. Περιμένουμε να μην αλλάζει το spin αν πάμε σε σύστημα με $\mathbf{p} \neq 0$. Αλλά τότε, ο τελεστής $\frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}$ δεν είναι πια κατάλληλος γιατί δεν μετατίθεται με τον αντίστοιχο της ενέργειας, που τώρα είναι $\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m$. Βέβαια συνεχίζουμε να έχουμε 2 ανεξάρτητες καταστάσεις. Οπότε θα πρέπει να υπάρχει τελεστής που μετατίθεται με την χαμιλτονιανή. Η επιλογή δεν είναι μοναδική αλλά μια χρήσιμη είναι ο τελεστής της ελικότητας

$$\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \mathbf{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$$

που πράγματι μετατίθεται με την $\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m$.

Άσκηση 19 Δείξτε ότι ο $\Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}$ μετατίθεται με την χαμιλτονιανή $H = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m$, $[H, \Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}] = 0$.

Οι ιδιοτιμές του $\Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}$ είναι ± 1 (δύο φορές). Ο $\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}$ έχει ιδιοτιμές ± 1 και αν $U^T A U = A_{diag}$ τότε και

$$\begin{pmatrix} U^T & 0 \\ 0 & U^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{diag} & 0 \\ 0 & A_{diag} \end{pmatrix}$$

Επομένως, ψάχνουμε να βρούμε την μορφή του ϕ τέτοια ώστε

$$\begin{pmatrix} \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi \end{pmatrix}$$

ή $\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi = \pm \phi$. Ας ονομάσουμε $\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi_+ = \phi_+$ και $\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi_- = -\phi_-$. Να βρούμε τα ϕ_+ και ϕ_- . Παρατηρούμε ότι το $(1 + \sigma \cdot \hat{\mathbf{u}})\phi$ είναι ιδιοσυνάρτηση του $\sigma \cdot \hat{\mathbf{u}}$, με ιδιοτιμή $+1$ για αυθαίρετο ϕ

$$\sigma \cdot \hat{\mathbf{u}}(1 + \sigma \cdot \hat{\mathbf{u}})\phi = (\sigma \cdot \hat{\mathbf{u}} + 1)\phi$$

Όμοια, το $(1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}})\phi$ είναι ιδιοσυνάρτηση του $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{u}}$, με ιδιοτιμή -1 . Επομένως, για τυχαίο $\hat{\mathbf{p}} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ και επιλέγοντας το αυθαίρετο $\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ έχουμε

$$\phi_+ = (1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & \sin \theta \cos \varphi - i \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta \\ \sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Βέβαια χρειάζεται να νορμαλίσουμε το ϕ_+ . Εύκολα υπολογίζεται ότι η σταθερά νομαλισμού είναι

$$N^2 \left[(1 + \cos \theta)^2 + |\sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi|^2 \right] = 1 \Rightarrow N = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$$

Επομένως, το νορμαλισμένο ϕ_+ γράφεται

$$\phi_+ = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}} \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (\cos \varphi + i \sin \varphi) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\phi_+ = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} (\cos \varphi + i \sin \varphi) \end{pmatrix}$$

Για το ϕ_- βολεύει να επιλέξουμε για αυθαίρετο $\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και έχουμε εντελώς ανάλογα

$$\phi_- = (1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & -\sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi - i \sin \theta \sin \varphi & 1 + \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_- = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi \\ 1 + \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ο νορμαλισμός είναι ο ίδιος και καταλήγουμε

$$\phi_- = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} (-\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Εύκολα φαίνεται ότι $\phi_+^\dagger \phi_- = 0$. Τα ϕ_+ και ϕ_- είναι νορμαλισμένα και ορθογώνια. Επίσης για $\mathbf{p} = (0, 0, p)$ ή $\hat{\mathbf{p}} = (0, 0, 1)$, οπότε έχουμε $\theta = 0$ τα ϕ_+ και ϕ_- γίνονται

$$\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Μετασχηματισμός του spinor σε χωρικές στροφές

Ας θεωρήσουμε μια απλή στροφή γύρω από τον άξονα x , με γωνία θ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ας υποθέσουμε επίσης ότι ξεκινάμε με ένα σύστημα συντεταγμένων όπου η ορμή είναι $\mathbf{p} = (0, 0, p)$. Τότε τα $\phi_{\pm}$ είναι τα $\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Η ορμή μετασχηματίζεται ως διάνυσμα στην στροφή

$$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

δηλαδή, $p'_x = p_x = 0$, $p'_y = p \sin \theta$ και $p'_z = p \cos \theta$. Στο νέο σύστημα, τα $\phi_{\pm}$ θα πρέπει να υπακούουν αντίστοιχες σχέσεις

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}' \phi'_+ = \phi'_+, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}' \phi'_- = -\phi'_-$$

δηλαδή, για το ϕ'_+ θα έχουμε ($\hat{\mathbf{p}}' = (0, \sin \theta, \cos \theta)$)

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}' \phi'_+ = \begin{pmatrix} \cos \theta & -i \sin \theta \\ i \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \phi'_+ = \phi'_+$$

Γράφοντας το $\phi'_+ = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ έχουμε ότι

$$a \cos \theta - ib \sin \theta = a \Rightarrow b = ia \frac{\sin \theta/2}{\cos \theta/2}$$

Άρα, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ i \frac{\sin \theta/2}{\cos \theta/2} \end{pmatrix}$. Νορμαλίζοντας παίρνουμε

$\phi'_+ = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ i \sin \theta/2 \end{pmatrix}$. Αυτό μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\phi'_+ = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ i \sin \theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & i \sin \theta/2 \\ i \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \phi_+$$

όπου το $\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ακριβώς ανάλογα έχουμε για το ϕ_-

$$\phi'_- = \begin{pmatrix} i \sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & i \sin \theta/2 \\ i \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \phi_-$$

όπου το $\phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Παρατηρήστε ότι τα ϕ'_+ και ϕ'_- παραμένουν ορθογώνια.
 Δηλαδή έχουμε και εδώ μια “στροφή”, μόνο που γωνία είναι $\theta/2$. Για να το γενικεύσουμε, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} e^{i\sigma_x\theta/2} &= 1 + i\sigma_x\theta/2 + \frac{1}{2!}(i\sigma_x\theta/2)^2 + \frac{1}{3!}(i\sigma_x\theta/2)^3 + \dots \\ &= 1 + i\sigma_x\theta/2 - \frac{1}{2}(\theta/2)^2 - \frac{1}{3!}i\sigma_x(\theta/2)^3 + \dots \\ &= \cos\theta/2 + i\sigma_x\sin\theta/2 = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Οπότε, αν η στροφή θ είναι γύρω από τον άξονα που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$

$$\phi' = e^{i\sigma \cdot \hat{n} \theta/2} \phi$$

Ο πίνακας $e^{i\sigma \cdot \hat{n} \theta/2} \phi \equiv U$ είναι μοναδιακός ($U^\dagger U = UU^\dagger = 1$), οπότε το “μήκος” $\phi^\dagger \phi$ διατηρείται. Αυτός ο κανόνας, παρ’ όλο που ξεκινήσαμε με ειδικά ϕ που είναι ιδιοκαταστάσεις της ελικότητας, είναι γενικός για κάθε spinor.

Ο spinor του Dirac, με 4 συνιστώσες, γράφεται τώρα, για τις συγκεκριμένες ιδιοκαταστάσεις ϕ_+ και ϕ_-

$$\omega_+ = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \phi_+ \end{pmatrix}, \quad \omega_- = \begin{pmatrix} \phi_- \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \phi_- \end{pmatrix}$$

Δηλαδή το πάνω και το κάτω τμήμα μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο (το $\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}$ είναι βαθμωτό). Άρα γενικεύουμε τον μετασχηματισμό για τον spinor του Dirac

$$\omega' = e^{i\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \theta / 2} \omega$$

όπου $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ και ισχύει για κάθε τετρα-spinor. Έτσι η πιθανότητα

$$\rho' = \psi'^{\dagger} \psi' = \omega'^{\dagger} \omega' = \omega^{\dagger} e^{-i\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \theta / 2} e^{i\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \theta / 2} \omega = \omega^{\dagger} \omega$$

Άσκηση 9 Δείξτε ότι στο σύστημα Κ.Μ. της $A + B \rightarrow C + D$ οι όροι F και dQ στον τύπο της ενεργού διατομής

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)}{2E_A |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| 2E_B} \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{F} dQ \end{aligned}$$

γίνονται

$$dQ = \frac{1}{4\pi^2} \frac{p_f}{4\sqrt{s}} d\Omega, \quad F = 4p_i \sqrt{s}, \quad s = (E_A + E_B)^2$$

όπου $p_i = |\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B|$, $p_f = |\mathbf{p}_C| = |\mathbf{p}_D|$ και $d\Omega$ η στοιχειώδης στερεά γωνία γύρω από την $\mathbf{p}_C$. Οπότε, η ενεργός διατομή στο Κ.Μ. γράφεται

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Κ.Μ.}} = |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{64\pi^2} \frac{p_f}{p_i s}$$

(Π)

Λύση

$$\begin{aligned}
 dQ &= \frac{1}{4\pi^2} \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) \frac{d^3 p_C}{2E_C} \frac{d^3 p_D}{2E_D} \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \delta(E_A + E_B - E_C - E_D) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_C - \mathbf{p}_D) \frac{d^3 p_C}{2E_C} \frac{d^3 p_D}{2E_D} \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \delta(E_C + E_D - \sqrt{s}) \frac{p_f^2}{2E_D 2E_C} dp_f d\Omega
 \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε (α) από τη χρήση της συνάρτησης $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_C - \mathbf{p}_D)$ και ολοκλήρωσης ως προς $d^3 p_D$, (β) $d^3 p_C = p_C^2 dp_C d\Omega$, και τέλος (γ) από το ότι στο Κ.Μ., $s = (p_A + p_B)^2 = (E_A + E_B)^2 - (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2 = (E_A + E_B)^2$ και ότι $|\mathbf{p}_C| = |\mathbf{p}_D| = p_f$. Ας δούμε τώρα την συνάρτηση $\delta(E_C + E_D - \sqrt{s})$. Έχουμε τη σχέση $E_C + E_D = (p_f^2 + m_C^2)^{1/2} + (p_f^2 + m_D^2)^{1/2}$ και την ιδιότητα της συνάρτησης δ

$$\int dx f(x) \delta(g(x) - K) = \frac{f(x_0)}{\left| \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0}}, \quad \text{όπου } g(x_0) = K$$

Στην περίπτωση μας, η $g(x)$ είναι η $E_C + E_D$ ως συνάρτηση του p_f . Οπότε, θα χρειαστούμε

$$\frac{d(E_C + E_D)}{dp_f} = p_f \left(\frac{1}{E_C} + \frac{1}{E_D} \right) = p_f \frac{\sqrt{s}}{E_C E_D}$$

(από διατήρηση ενέργειας: $E_A + E_B = E_C + E_D$). Επομένως

$$\int \delta(E_C + E_D - \sqrt{s}) p_f^2 dp_f = \frac{p_f^{o^2}}{p_f^o \sqrt{s}} E_C E_D = \frac{p_f^o}{\sqrt{s}} E_C E_D$$

όπου p_f^o είναι το κατάλληλο μέτρο της (τρι)ορμής που ικανοποιεί την $E_C + E_D = \sqrt{s}$.

Άρα, το dQ γράφεται

$$\begin{aligned} dQ &= \int \frac{1}{4\pi^2} \delta(E_C + E_D - \sqrt{s}) \frac{p_f^2 dp_f d\Omega}{2E_D 2E_C} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{p_f^o}{4\sqrt{s}} d\Omega \end{aligned}$$

Για τη ροή F έχουμε

$$\begin{aligned}
 F &= 4 \left[(p_A^\mu \cdot p_{B\mu})^2 - m_A^2 m_B^2 \right]^{1/2} = 4 \left[(E_A E_B + p_i^2)^2 - m_A^2 m_B^2 \right]^{1/2} = \\
 &= 4 \left[(p_i^2 + m_A^2) (p_i^2 + m_B^2) + p_i^2 p_i^2 + 2E_A E_B p_i^2 - m_A^2 m_B^2 \right]^{1/2} = \\
 &= \left[2p_i^2 p_i^2 + p_i^2 (m_A^2 + m_B^2) + 2E_A E_B p_i^2 \right]^{1/2} = \\
 &= 4p_i \left[2p_i^2 + m_A^2 + m_B^2 + 2E_A E_B \right]^{1/2} = \\
 &= 4p_i \left[E_A^2 + E_B^2 + 2E_A E_B \right]^{1/2} = 4p_i (E_A + E_B) = 4p_i \sqrt{s}
 \end{aligned}$$

και, επομένως, για τη διαδικασία $A + B \rightarrow C + D$ στο Κ.Μ. έχουμε

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{p_f}{p_i} |\mathcal{M}|^2$$

Μπορούμε επίσης να ξεκινήσουμε από την αρχική έκφραση

$F = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| 2E_A 2E_B$ και να πάρουμε

$$\begin{aligned}
 F &= |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| 2E_A 2E_B = 4E_A E_B \left(\frac{p_i}{E_A} + \frac{p_i}{E_B} \right) = \\
 &= 4E_A E_B p_i \frac{E_A + E_B}{E_A E_B} = 4p_i (E_A + E_B) = 4p_i \sqrt{s}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 19 Δείξτε ότι ο $\mathbf{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ μετατίθεται με την χαμιλτονιανή $H = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m$, $[H, \mathbf{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}] = 0$. (Π)

Λύση

Οι πίνακες β και $\mathbf{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ είναι διαγώνιοι, οπότε μετατίθενται. Επομένως θα πρέπει να αποδείξουμε ότι $[\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}] = 0$.

$$[a_i p_i, \Sigma_j \hat{p}_j] = [a_i, \Sigma_j] \frac{p_i p_j}{|\mathbf{p}|} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix} \right] \frac{p_i p_j}{|\mathbf{p}|} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i \\ \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \frac{p_i p_j}{|\mathbf{p}|} = 2i \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \frac{p_i p_j}{|\mathbf{p}|} = 0$$

γιατί το ϵ_{ijk} είναι αντισυμμετρικό στα i, j ενώ το $p_i p_j$ είναι συμμετρικό.