Ο ρυθμός διάσπασης ως συνάρτηση του $|\mathcal{M}|$

Για διασπάσεις της μορφής $A \to 1 + 2 + 3 + ... + n$ ακολουθούμε την ίδια μέθοδο

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_A}|\mathcal{M}|^2 \frac{d^3p_1}{2E_1(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3p_n}{2E_n(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4(p_A - p_1 - p_2 - ... - p_n)$$

Το $d\Gamma$ ονομάζεται διαφορικός ρυθμός (differential rate).

Άσκηση 11 Δείξτε ότι για τη διάσπαση $A \to 1 + 2$, και για το σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου A, παίρνουμε

$$\Gamma = \frac{p_f}{32\pi^2 m_A^2} \int |\mathcal{M}|^2 \, d\Omega$$

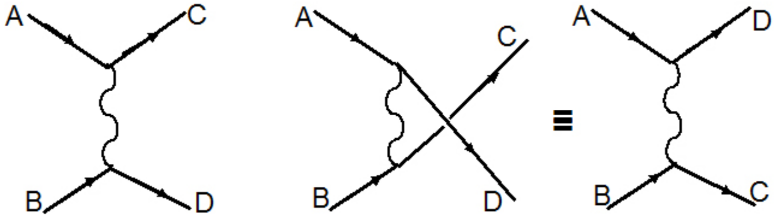
Ο ολικός ρυθμός διάσπασης είναι το άθροισμα των Γ για όλες τις δυνατές διασπάσεις του συγκεκριμένου σωματιδίου. Βέβαια, το Γ δίνεται από τη σχέση

$$\Gamma = -\frac{dN_A}{dt}\frac{1}{N_A} \to N_A(t) = N_A e^{-\Gamma t}$$

Χρόνος ζωής ονομάζεται η ποσότητα Γ^{-1}.

Σκέδαση "ηλεκτρονίου"-"ηλεκτρονίου"

Η διαφορά με την αντίστοιχη σκέδαση "ηλεκτρονίου" - "μιονίου" είναι ότι τώρα έχουμε όμοια σωματίδια. Επομένως, θα πρέπει το πλάτος $\mathcal{M}$ για $A + B \to C + D$ να παραμένει αναλλοίωτο στην αλλαγή $A \longleftrightarrow B$ και $C \longleftrightarrow D$. Έτσι, εκτός από το διάγραμμα(α) θα πρέπει να πάρουμε υπ' όψη μας και το διάγραμμα (β) του ιδίου σχήματος. Ο λόγος είναι ότι έχοντας όμοια σωματίδια, δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε αν το ηλεκτρόνιο C έρχεται από την κορυφή με το ηλεκτρόνιο A ή από την κορυφή με το ηλεκτρόνιο B.



(α) (β)

Επομένως, θα πρέπει να αθροίσουμε τα πλάτη και όχι τις πιθανότητες, μιας και οι δύο περιπτώσεις έχουν τις ίδιες αρχικές και τελικές καταστάσεις. Για το (α) έχουμε ήδη γράψει ότι δίνει αναλλοίωτο πλάτος

$$-i\mathcal{M} = -i(-e^2)\frac{(p_A + p_C)^\mu (p_B + p_D)_\mu}{(p_D - p_B)^2}$$

Τώρα λοιπόν το πλάτος $\mathcal{M}$ θα περιέχει και τη συνεισφορά από το διάγραμμα (β)

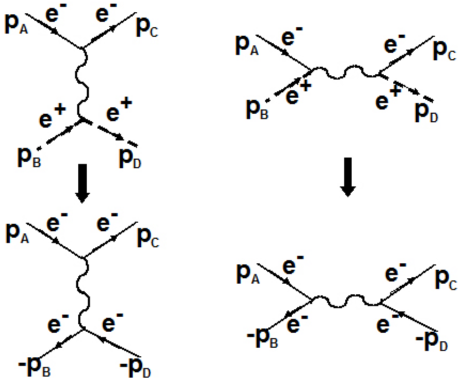
$$-i\mathcal{M} = -i(-e^2)\left[\frac{(p_A+p_C)^\mu (p_B+p_D)_\mu}{(p_D-p_B)^2} + \frac{(p_A+p_D)^\mu (p_B+p_C)_\mu}{(p_C-p_B)^2}\right]$$

Βλέπουμε ότι η αλλαγή $p_C \longleftrightarrow p_D$ μετατρέπει τον ένα όρο του αθροίσματος στον άλλο. Σημειώστε ότι η αναλλοιώτητα του $\mathcal{M}$ στην αλλαγή $p_c \longleftrightarrow p_D$ είναι αρκετή για την αναλλοιώτητα και ως προς $p_A \longleftrightarrow p_B$

Σκέδαση ''ηλεκτρονίου''-''ποζιτρονίου'' (crossing)

Στο σχήμα βλέπουμε τα δύο πιθανά διαγράμματα στην σκέδαση ''ηλεκτρονίου''-''ποζιτρονίου'' καθώς και τα αντίστοιχα όπου τα ποζιτρόνια έχουν αντικατασταθεί από ηλεκτρόνια με αντίθετη ορμή (πηγαίνουν πίσω στο χρόνο και έχουν αρνητική ενέργεια).

Το αναλλοίωτο πλάτος θα δίνεται από τη σχέση



$$\mathcal{M} = (-e^2)\left[\frac{(p_A + p_C)^\mu(-p_B - p_D)_\mu}{(-p_B - (-p_D))^2} + \frac{(p_A - p_B)^\mu(p_C - p_D)_\mu}{(p_C - (-p_D))^2}\right] \tag{11}$$

Υπενθυμίζεται ότι η διατήρηση ενέγειας-ορμής $p_A + p_B = p_C + p_D \rightarrow p_A + (-p_D) = p_C + (-p_B)$. Προσέξτε ότι η κορυφή $+ie(p_B + p_D)$ στην σκέδαση $e^- e^-$ γίνεται $-ie(p_B + p_D)$ για την περίπτωση $e^- e^+$ (το φορτίο του ποζιτρονίου είναι $+e$). Τέλος, το πλάτος είνα αναλλοίωτο στην αλλαγή $p_C \longleftrightarrow -p_B$ που αντιστοιχεί σε ανταλλαγή δύο εξερχόμενων ηλεκτρονίων. Θα μπορούσαμε να πάρουμε το $\mathcal{M}_{e^- e^+ \rightarrow e^- e^+}$ από το $\mathcal{M}_{e^- e^- \rightarrow e^- e^-}$ απλά μέσω της σχέσης

$$\mathcal{M}_{e^- e^+ \rightarrow e^- e^+}(p_A, p_B, p_C, p_D) = \mathcal{M}_{e^- e^- \rightarrow e^- e^-}(p_A, -p_D, p_C, -p_B) \tag{12}$$

Άσκηση 12 Γράψτε το αναλλοίωτο πλάτος για τις σκεδάσεις $e^- \mu^+ \rightarrow e^- \mu^+$ και $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ και ελέγξτε το crossing με την $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$.

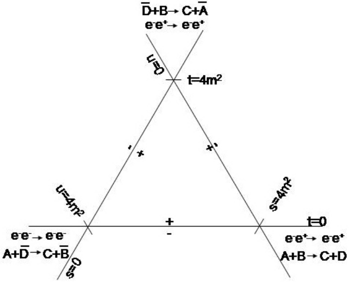
Αναλλοίωτες μεταβλητές

Για την σκέδαση $AB \to CD$ έχουμε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές (π.χ., στο Κ.Μ. έχουμε την εισερχόμενη ενέργεια και τη γωνία σκέδασης). Αλλά είναι χρήσιμο να εκφράσουμε το $\mathcal{M}$ ως συνάρτηση ποσοτήτων αναλλοίωτων σε μετασχηματισμούς Lorentz. Από τις τέσσερις ορμές μπορούμε να φτιάξουμε 3 αναλλοίωτες ποσότητες: $p_A p_C$, $p_A p_D$ και $p_D p_B$, από τις οποίες βέβαια μόνο οι δύο είναι ανεξάρτητες. Χρησιμοποιούμε συνήθως τις σταθερές του Mandelstam

$$s = (p_A + p_B)^2, \qquad t = (p_A - p_C)^2, \qquad u = (p_A - p_D)^2$$

Άσκηση 13 Δείξτε ότι $s + t + u = \sum m_i^2$

Για να αναπαραστήσουμε τις επιτρεπτές (φυσικές) περιοχές των s, t και u χρησιμοποιούμε ένα διάγραμμα δύο διαστάσεων (βλ. σχήμα). Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει ύψος ισο με $\sum_i m_i^2$. Υπενθυμίζουμε το θεώρημα της γεωμετρίας ότι το άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου στο εσωτερικό ενός ισόπλευρου τριγώνου από τις πλευρές του είναι σταθερό και ίσο με το ύψος του τριγώνου.



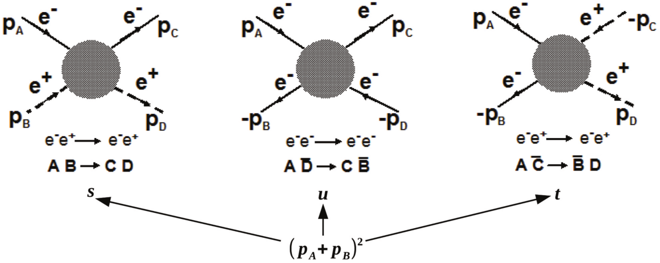
Για την σκέδαση $e^+e^- \to e^+e^-$, στο Κ.Μ., έχουμε

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E + E, \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i)^2 = 4E^2 = 4(m^2 + k^2)$$
$$t = (p_1 - p_3)^2 = (E - E, \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f)^2 = -(2k^2 - 2k^2\cos\theta)$$
$$u = (p_1 - p_4)^2 = (E - E, \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_f)^2 = -(2k^2 + 2k^2\cos\theta)$$

Τα σωματίδια έχουν στο Κ.Μ. έχουν ίδιο μέτρο ορμής, $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| = k$ και επειδή έχουν ίδια μάζα έχουν και ίδια ενέργεια. Βλέπουμε ότι $s \geq 4m^2$ και $t, u \leq 0$. Και φυσικά $s + t + u = 4m^2$.
Βλέπουμε από το Σχήμα ότι η μεταβλητή $s = (p_A + p_B)^2$ για την $e^+e^- \to e^+e^-$ αποτελεί την μεταβλητή $u = (p_A - (-p_B))^2$ για την $e^-e^- \to e^-e^-$ και αντίστροφα.

$$s_{e^+e^-\to e^+e^-} = u_{e^-e^-\to e^-e^-}, \quad u_{e^+e^-\to e^+e^-} = s_{e^-e^-\to e^-e^-}$$

οπότε, για την $e^-e^- \to e^-e^-$, η φυσική περιοχή είναι $t, s \leq 0$ και $u \geq 4m^2$



Άσκηση 14 Δείξτε ότι για την σκέδαση $e^- \mu^- \to e^- \mu^-$, τα όρια της φυσικής περιοχής είναι $t = 0$ και $su = (M^2 - m^2)^2$ όπου M και m είναι οι μάζες του μιονίου και του ηλεκτρονίου. Σχεδιάστε το διάγραμμα Mandelstam.

Άσκηση 15 Ελέγξτε ότι η Εξ.(12) είναι της μορφής

$$\mathcal{M}_{e^- e^+}(s, t, u) = \mathcal{M}_{e^- e^-}(u, t, s)$$

Ας υπολογίσουμε το αναλλοίωτο πλάτος της σκέδασης ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου ως συνάρτηση των σταθερών s, t και u. Από τη Εξ.11 έχουμε

$$\begin{aligned}
&-(p_A + p_C)(p_B + p_D) = -(2p_A - p_A + p_C)(p_B + p_D) = \\
&= -(2p_A + p_B - p_D)(p_B + p_D) = -2p_A(p_B + p_D) + p_B^2 - p_D^2 \\
&= -2p_A(p_B + p_D)
\end{aligned}$$

και

$$(p_A - p_B)(p_C - p_D) = (2p_A - p_A - p_B)(p_C - p_D) =$$
$$= (2p_A - p_C - p_D)(p_C - p_D) = -2p_A(-p_C + p_d) - p_C^2 + p_B^2 =$$
$$= -2p_A(-p_C + p_D)$$

Αλλά
$s - u = (p_A + p_B)^2 - (p_A - p_D)^2 = 2p_A p_B + 2p_A p_d = 2p_A(p_B + p_D)$
και $t - u = (p_A - p_C)^2 - (p_A - p_D)^2 = -2p_A p_C + 2p_A p_d =$
$2p_A(-p_C + p_D)$, και βέβαια $t = (p_D - p_B)^2$ και
$s = (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2$. Οπότε η Εξ.11 παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{M}_{e^+e^-} = e^2 \left(\frac{s-u}{t} + \frac{t-u}{s} \right) \tag{13}$$

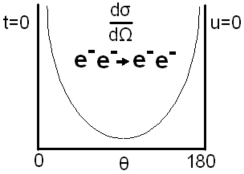
Γιατί το πλάτος παρουσιάζει συμμετρία στην εναλλαγή $s \longleftrightarrow t$;

$$\begin{array}{cc} AB \to CD & A\bar{C} \to \bar{B}D \\ e^+e^- \to e^+e^- & e^+e^- \to e^+e^- \end{array}$$

Δηλαδή, στην περίπτωσή μας, η $AB \to CD$ και η $A\bar{C} \to \bar{B}D$ είναι η ίδια σκέδαση. Οι σκεδάσεις $AB \to CD$ και $A\bar{C} \to \bar{B}D$ έχουν συσχέτιση $s \longleftrightarrow t$. Αντίστοιχα, η σκέδαση $A\bar{D} \to \bar{B}C$ (δηλαδή $e^+e^+ \to e^+e^+$) και η $\bar{C}B \to \bar{A}D$ (δηλαδή $e^-e^- \to e^-e^-$) έχουν σχέση με την αρχική $s \longleftrightarrow u$. Δηλαδή το αναλλοίωτο πλάτος για την $e^-e^- \to e^-e^-$ γράφεται αμέσως, χρησιμοποιώντας την Εξ(13),

$$\mathcal{M}_{e^-e^-} = e^2 \left(\frac{u-s}{t} + \frac{t-s}{u} \right) \tag{14}$$

Βλέπουμε ότι το αναλλοίωτο πλάτος, άρα και η ενεργός διατομή, απειρίζονται για $t \to 0$ και $u \to 0$. Σ' αυτές τις περιπτώσεις το τεράγωνο της τετρορμής του εικονικού φωτονίου τείνει στο μηδέν και ουσιαστικά δεν έχουμε αλληλεπίδραση.

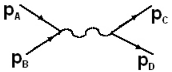


Ο διαδότης

Έχουμε δει ήδη ότι στα διαγράμματα Feynman η γραμμή του εικονικού φωτονίου αντιστοιχεί στο όρο $1/q^2$ με q η ορμή του εικονικού φωτονίου ($q^2 \neq 0$). Αν το εικονικό σωματίδιο έχει μάζα ο διαδότης γράφεται $1/(q^2 - m^2)$. Ας δούμε πως μπορούμε να το καταλάβουμε αυτό.

Στη μη σχετικιστική προσέγγιση είχαμε δεί ότι

$$T_{fi} = -i \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni} 2\pi\delta(E_f - E_i)$$



Άσκηση 11 Δείξτε ότι για τη διάσπαση $A \to 1 + 2$, και για το σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου A, παίρνουμε

$$\Gamma = \frac{p_f}{32\pi^2 m_A^2} \int |\mathcal{M}|^2 \, d\Omega$$

(Π)
Λύση

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \int \frac{1}{2E_A} |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \, \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_A) = \\
&= \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 m_A} \frac{1}{E_1 E_2} d^3 p_1 \, d^3 p_2 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_A) = \\
&= \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 m_A} \frac{1}{E_1 E_2} d^3 p_1 \, \delta(E_1 + E_2 - m_A) = \\
&= \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 m_A} \frac{d\Omega}{E_1 E_2} p_1^2 dp_1 \delta \left(\sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_1^2} - m_A \right)
\end{aligned}$$

Αλλά $p_A^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu \to \{m_A = E_1 + E_2,\ p_1 = p_2 = p_f\}$

$$\int \frac{p_1^2}{E_1 E_2} dp_1 \delta\left(\sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_1^2} - m_A\right) = \frac{p_f^2/(E_1 E_2)}{p_f \frac{m_A}{E_1 E_2}}$$

όπου τώρα $E_1 = \sqrt{m_1^2 + p_f^2}$ και $E_2 = \sqrt{m_2^2 + p_f^2}$. Οπότε

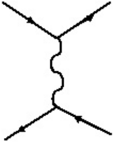
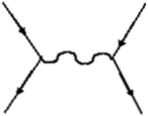
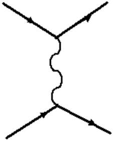
$$\begin{aligned}\Gamma &= \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 m_A} d\Omega \, \frac{p_f}{m_A} = \\ &= \frac{p_f}{32\pi^2 m_A^2} \int |\mathcal{M}|^2 d\Omega\end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\int f(x)\delta\left(g(x) - a\right) dx = \frac{f(x_0)}{\frac{dg(x)}{dx}\big|_{x=x_0}}, \qquad \text{όπου}\, g(x_0) = a$$

Άσκηση 12 Γράψτε το αναλλοίωτο πλάτος για τις σκεδάσεις $e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$ και $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ και ελέγξτε το crossing με την $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$. (Π)

Λύση

$e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$	$e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$	$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$
		
$(ie)^2 \frac{(p_A+p_C)(-p_B-p_D)}{(p_A-p_C)^2}$	$(ie)^2 \frac{(p_A-p_B)(p_D-p_C)}{(p_A+p_B)^2}$	$(ie)^2 \frac{(p_A+p_C)(p_B+p_D)}{(p_A-p_C)^2}$

Η κατάλληλη εναλλαγή από την $e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$ στην $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ είναι $p_B \leftrightarrow -p_D$. Η αντίστοιχη από την $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ στην $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ είναι $p_B \leftrightarrow -p_C$.

Άσκηση 14 Δείξτε ότι για την σκέδαση $e^- \mu^- \to e^- \mu^-$, τα όρια της φυσικής περιοχής είναι τα $t = 0$ και $su = (M^2 - m^2)^2$ όπου M και m είναι οι μάζες του μιονίου και του ηλεκτρονίου. Σχεδιάστε το διάγραμμα Mandelstam. (Π)

Λύση

Στο Κ.Μ. έχουμε

$$s = (p_A + p_B)^2 = m^2 + M^2 + 2(E_A E_B + p^2) \geq (m + M)^2$$
$$t = (p_A - p_C)^2 = 2m^2 - 2p_C p_A = 2m^2 - 2(E_A^2 - p^2 \cos\theta) =$$
$$= 2p^2(\cos\theta - 1), \quad \text{άρα} \quad -4p^2 \leq t \leq 0$$

Πρέπει να εκφράσουμε το p ως συνάρτηση του s ή/και u για να βρούμε την καμπύλη όπου το t είναι ελάχιστο. Από την έκφραση για το s έχουμε

$$\begin{aligned} -2E_A E_B &= 2p^2 - s + M^2 + m^2 \\ 4(m^2 + p^2)(M^2 + p^2) &= (2p^2 - s + M^2 + m^2)^2 \\ 4m^2 M^2 &= (M^2 + m^2 - s)^2 - 4p^2 s \\ 4p^2 &= \frac{(M^2 + m^2 - s)^2 - 4m^2 M^2}{s} \end{aligned}$$

Επομένως

$$t_{min} = -\frac{1}{s}\left[(M^2+m^2-s)^2 - 4m^2M^2\right]$$

που είναι μια παραβολή. Να βρούμε τις ασύπτωτες ευθείες

$$\text{για} \quad s \to 0^+ \quad \text{τότε} \quad t_{min} \to -\infty$$

Για $s \to \infty$ τότε $t_{min} \to -\infty$ με ασύπτωτη που την βρίσκουμε γράφοντας το t_{min}

$$t_{min} = -\left(\frac{s^2}{s} - \frac{2s(M^2+m^2)}{s} + \frac{1}{s}(\cdots)\right)$$

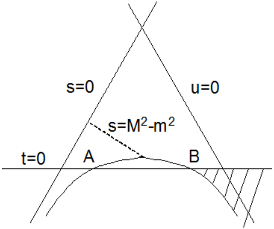
οπότε η ασύμπτωτη είναι η $t = -s + 2(M^2+m^2)$ ή άλλως $0 = -t - s + 2(M^2+m^2)$ ή $u = 0$. Τα σημεία Α και Β αντιστοιχούν στον μηδενισμό της t_{min}

$$(M^2+m^2-s)^2 = 4m^2M^2$$

$$s^2 + (M^2+m^2)^2 - 2s(M^2+m^2) = 4M^2m^2$$

$$\left[s-(M+m)^2\right]\left[s-(M-m)^2\right] = 0$$

Επίσης μπορούμε να βρούμε το μέγιστο της καμπύλης t_{min}. Μηδενίζοντας την παράγωγο ως προς s βρίσκουμε ότι το μέγιστο αντιστοιχεί στην τιμή $s = (M^2 - m^2)$ που δεν ανήκει στην φυσική περιοχή του s (στην αρχή της άσκησης είχαμε βρει $s \geq (m+M)^2$). Γι' αυτήν την τιμή του $s = (m+M)^2$, το $t = 0$. Είναι το σημείο B.



Από την εξίσωση του t_{min}, εύκολα παίρνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
st &= 4M^2m^2 - (M^2 + m^2 - s)^2 \rightarrow \\
s(2M^2 + 2m^2 - s - u) &= 4M^2m^2 - M^4 - m^4 - s^2 \\
&\quad - 2M^2m^2 + 2M^2s + 2m^2s \rightarrow \\
-su = 2M^2m^2 - M^4 - m^4 &= -(M^2 - m^2)^2
\end{aligned}
$$

Άσκηση 15 Ελέγξτε ότι η Εξ.12 είναι της μορφής

$$\mathcal{M}_{e^-e^+}(s,t,u) = \mathcal{M}_{e^-e^-}(u,t,s)$$

(Π)

Λύση

Η Εξ.12 είναι η

$$\mathcal{M}_{e^-e^+\to e^-e^+}(p_A,p_B,p_C,p_D) = \mathcal{M}_{e^-e^-\to e^-e^-}(p_A,-p_D,p_C,-p_B)$$

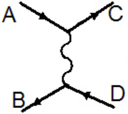
Οπότε, για τις δυο σκεδάσεις έχουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned} s &= (p_A+p_B)^2 \qquad & s &= (p_A+(-p_D))^2 \\ t &= (p_A-p_C)^2 \qquad & t &= (p_A-p_C)^2 \\ u &= (p_A-p_D)^2 \qquad & u &= (p_A-(-p_B))^2 \end{aligned}$$

οπότε φαίνεται άμεσα το crossing $s \longleftrightarrow u$.

$$\boxed{e^- e^+ \to e^- e^+}$$

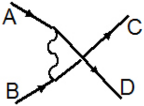
$$\sim \frac{(p_A - p_B)^\mu (p_C - p_D)_\mu}{(p_A + p_B)^2}$$



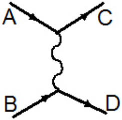
$$\sim \frac{(p_A + p_C)^\mu (-p_B - p_D)_\mu}{(p_A - p_C)^2}$$

$$\boxed{e^- e^- \to e^- e^-}$$

$$\sim \frac{(p_A + p_D)^\mu (p_B + p_C)_\mu}{(p_A - p_D)^2}$$



$$\sim \frac{(p_A + p_C)^\mu (p_B + p_D)_\mu}{(p_A - p_C)^2}$$



$$p_B \leftrightarrow -p_D$$