

Κανόνες για πλάτης σκέδαση στην εικόνα

Feynman-Stückelberg

Πρέπει λοιπόν να εισάγουμε αντισωματίδια που πηγαίνουν πίσω στο χρόνο. Βέβαια έως τώρα δεν έχουμε δουλέψει σε “συναλλοίωτο περιβάλλον” (το δυναμικό $V(x)$ ήταν στατικό).

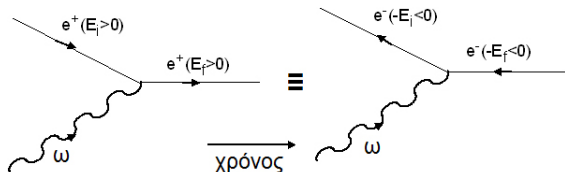
Πώς θα περιγράψουμε κρούσεις σωματιδίων;

Ας κάνουμε μερικά προθύστερα σχήματα. Ας εισάγουμε το φωτόνιο ως το σωματίο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και ας δούμε την επίδραση του δυναμικού ως σκέδαση του σωματιδίου με το φωτόνιο. Τότε χρειαζόμαστε μια χρονική εξάρτηση για το φωτόνιο: $e^{-i\omega t}$. Το χρονικό ολοκλήρωμα στο T_{fi} γίνεται

$$\frac{1}{2\pi} \int dt \left(e^{-iE_f t} \right)^* e^{-i\omega t} e^{-iE_i t} = \delta(E_f - \omega - E_i)$$

απ’ όπου φαίνεται ότι $E_f = E_i + \omega$. Για αντισωματίδιο θα έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int dt \left(e^{-i(-E_i)t} \right)^* e^{-i\omega t} e^{-i(-E_f)t} = \delta(E_f - \omega - E_i)$$



οπότε και πάλι έχουμε $E_f = E_i + \omega$. Δηλαδή ο κανόνας είναι

$$\int d^4x \phi_{\text{εκτός}}^* V \phi_{\text{εντός}}$$

όπου ϕ είναι για σωματίδια και όχι για αντισωματίδια.

Άσκηση 5 Δείξτε ότι ο κανόνας $\int \phi_{\text{outgoing}}^* V \phi_{\text{ingoing}} d^4x$ πληροί τη διατήρηση ενέργειας στην περίπτωση της δημιουργίας ζεύγους e^+e^- ή στην αντίστοιχη εξαύλωση. Να γίνει το ίδιο και για την διατήρηση της ορμής. Ο όρος του φωτονίου είναι $e^{-i(\omega t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$.

Η εξίσωση Klein-Gordon και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περιγράφεται από ένα διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A}$ και ένα βαθμωτό δυναμικό V . Ξεκινώντας από τις εξισώσεις του Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

επειδή η δεύτερη ικανοποιείται αν θέσουμε $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, η πρώτη γράφεται

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

και επομένως η ποσότητα στην παρένθεση μπορεί να γραφεί ως η βαθμίδα ενός βαθμωτού πεδίου

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V$$

(το αρνητικό πρόσημο στο όρο ∇V επιλέγεται για να δείνει τη γνωστή σχέση στην ηλεκτροστατική περίπτωση). Τα V και $\mathbf{A}$ συγκροτούν το τετραδιάνυσμα $A^\mu = (V, \mathbf{A})$.

Τα δυναμικά $\mathbf{A}$ και V δεν ορίζονται μονοσήμαντα. Θα πάρουμε τα ίδια $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ από τα $\mathbf{A}'$ και V' που ορίζονται από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \quad V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu} f$$

όπου f μια τυχαία συνάρτηση των $\mathbf{x}$ και t . Πράγματι

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla f = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla V' = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \nabla f}{\partial t} - \nabla V + \nabla \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V$$

Ο τρόπος εισαγωγής των δυναμικών στην Klein-Gordon θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε αυτή η ελευθερία επιλογής τους να μην έχει φυσική σημασία. Αυτός ο τρόπος είναι ο λεγόμενος της “ελάχιστης αντικατάστασης” (minimal substitution)

$$E \rightarrow E - qV = i\frac{\partial}{\partial t} - qV, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - q\mathbf{A} = -i\nabla - q\mathbf{A}$$

$$\text{ή σε τετραδιανύσματα} \quad p^{\mu} \rightarrow p^{\mu} - qA^{\mu} = i\partial^{\mu} - qA^{\mu}$$

με q το φορτίο του σωματιδίου. Η Klein-Gordon γίνεται

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - qV\right)^2 \phi = (-i\nabla - q\mathbf{A})^2 \phi + m^2 \phi \Rightarrow$$
$$[(\partial^\mu + iqA^\mu)(\partial_\mu + iqA_\mu) + m^2] \phi = 0$$

Αυτή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας αν η κυματοσυνάρτηση αλλάξει με μια φάση

$$\phi' = \phi e^{iqf}$$

Άσκηση 6 Δείξτε την παραπάνω πρόταση

Στην ηλεκτροστατική περίπτωση, $\mathbf{A} = 0$, ο όρος qV είναι η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου U . Με την γνωστή αντικατάσταση $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x})e^{-iEt}$, όπου E η ενέργεια του σωματιδίου, παίρνουμε την χρονοανεξάρτητη εξίσωση

$$\begin{aligned}
& (\partial^\mu + iqA^\mu)(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi + m^2\phi = 0 \Rightarrow \\
& (\partial_t + iqV, -\nabla)(\partial_t + iqV, \nabla)\phi + m^2\phi = 0 \Rightarrow \\
& \left[(\partial_t + iqV)^2 - \nabla^2 \right] \phi + m^2\phi = 0 \Rightarrow \\
& \left[(\partial_t + iqV)^2 - \nabla^2 \right] \phi(\mathbf{x})e^{-iEt} + m^2\phi(\mathbf{x})e^{-iEt} = 0 \Rightarrow \\
& (E - U)^2\phi(\mathbf{x}) = -\nabla^2\phi(\mathbf{x}) + m^2\phi(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{5}$$

Η εξίσωση Klein-Gordon και το πεδίο Coulomb

Η δυναμική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου στο ηλεκτρικό πεδίο ενός πρωτονίου είναι $U = -e^2/r$. Η σφαιρική συμμετρία του προβλήματος μας οδηγεί άμεσα στο να γράψουμε τη λύση με τη μορφή χωριζομένων μεταβλητών

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_l^m(\theta, \varphi) \tag{6}$$

όπου $Y_l^m(\theta, \varphi)$ οι σφαιρικές αρμονικές (όπως ακριβώς στην εξίσωση του Schrödinger). Αν συγκρίνουμε το τετράγωνο του τελεστή της στροφορμής

$$I^2 = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

με την Λαπλασιανή σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

βλέπουμε ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{I^2}{r^2}$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι $Y_m^l(\theta, \varphi)$ αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή I^2 με ιδιοτιμές $l(l+1)$: $I^2 Y_m^l(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_m^l(\theta, \varphi)$.

Οπότε, αντικαθιστώντας την Εξ.(6) στην Εξ.(5), παίρνουμε

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(rR)}{\partial r^2} Y_m^l - \frac{l(l+1)}{r^2} R Y_m^l + [(E - U)^2 - m^2] R Y_m^l = 0$$

Η Y_m^l απαλοίφεται. Πολλαπλασιάζοντας επί r και ορίζοντας $y(r) = rR(r)$, παίρνουμε την διαφορική εξίσωση ως προς $y(r)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \left[(E - U)^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - m^2 \right] y &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \left[E^2 - m^2 + \frac{2Ee^2}{r} - \frac{l(l+1) - e^4}{r^2} \right] y &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

όπου αντικαταστήσαμε την δυναμική ενέργεια με $-e^2/r$. Επειδή ψάχνουμε για δέσμιες καταστάσεις, θα πρέπει $y(r \rightarrow \infty) = 0$ και βέβαια $y(r = 0) = 0$ από τον ορισμό του $y(r)$. Για τη λύση της, ακολουθούμε την γνωστή διαδικασία που ακολουθείται για την αντίστοιχη λύση της Schrödinger. Για μεγάλα r , η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$\frac{\partial^2 y_\infty}{\partial r^2} + [E^2 - m^2] y_\infty = 0 \quad (8)$$

Στις δέσμιες καταστάσεις που αναζητούμε, η δυναμική ενέργεια είναι αρνητική, οπότε η ολική ενέργεια είναι μικρότερη από την ελάχιστη m . Οπότε, $E^2 - m^2 = -\gamma^2$. Η λύση της Εξ.(8) είναι

$$y_{\infty} = e^{\pm\gamma r}$$

Κρατάμε βέβαια την φθίνουσα λύση και ξαναγράφουμε

$$y(r) = e^{-\gamma r} F(r)$$

όπου η F θα θέλαμε να είναι ένα πολυώνυμο. Η εξίσωση για την $F(r)$, βάζοντας την προηγούμενη λύση στην Εξ.(7), γίνεται

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - 2\gamma \frac{\partial F}{\partial r} + \left[\frac{2Ee^2}{r} - \frac{l(l+1) - e^4}{r^2} \right] F = 0$$

Αν η F είναι ένα πολυώνυμο n βαθμού, για μεγάλα r θα έχουμε $F(r) \sim r^n$, και η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned} n(n-1)r^{n-2} - 2\gamma nr^{n-1} + 2Ee^2 r^{n-1} - (l(l+1) - e^4)r^{n-2} &= 0 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \\ -2\gamma nr^{n-1} + 2Ee^2 r^{n-1} &= 0 \rightarrow \gamma = \frac{Ee^2}{n} \end{aligned}$$

Αν τώρα s είναι η μικρότερη δύναμη του πολυωνύμου F , τότε για μικρά r θα είναι $F(r) \sim r^s$ και η διαφορική εξίσωση θα δίνει

$$s(s-1)r^{s-2} - 2\gamma sr^{s-1} + 2Ee^2r^{s-1} - (l(l+1) - e^4)r^{s-2} = 0 \xrightarrow{r \rightarrow 0}$$

$$s(s-1)r^{s-2} - (l(l+1) - e^4)r^{s-2} = 0 \Rightarrow$$

$$s = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4l(l+1) - 4e^4}}{2}$$

Κρατάμε την θετική λύση

$$s = \frac{1 + \sqrt{1 + 4l(l+1) - 4e^4}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - e^4}$$

Βέβαια, ο ανώτερος βαθμός του πολωνύμου n και ο κατώτερος s συνδέονται με την σχέση $n = s + k$ με $k = 0, 1, 2, \dots$

Από την $E^2 - m^2 = -\gamma^2$ και την $\gamma = \frac{Ee^2}{n}$ προκύπτει η σχέση για τις ενέργειες

$$E^2 - m^2 = -E^2 \frac{e^4}{n^2} \Rightarrow E = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{e^4}{n^2}}}$$

Αναπτύσσοντας σε δυνάμεις του e^4 παίρνουμε

$$E = m - \frac{me^4}{2n^2} + \frac{3me^8}{8n^4} + \dots$$

Αλλά, το n είναι συνάρτηση του s ($n = s + k$) ενώ το s είναι κι αυτό συνάρτηση του e^4 , επομένως θα πρέπει και αυτό να αναπτυχθεί σε δυνάμεις του e^4

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - e^4} + k = \frac{1}{2} + \left(l + \frac{1}{2}\right) \sqrt{1 - \frac{e^4}{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}} + k = \\ &\frac{1}{2} + \left(l + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{e^4}{2\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}\right) + k = l + k + 1 - \frac{e^4}{2l + 1} + \dots \end{aligned}$$

Ονομάζοντας $4N = l + k + 1$ παίρνουμε

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{N^2 \left(1 - \frac{e^4}{N(2l+1)}\right)^2} = \frac{1}{N^2} \left(1 + \frac{2e^4}{N(2l+1)}\right)$$

και η έκφραση για την ενέργεια γίνεται

$$E = m - \frac{me^4}{2N^2} - \frac{me^8}{2N^4} \left(\frac{N}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right)$$

Ο τρίτος όρος αποτελεί την σχετικιστική διόρθωση η οποία όμως δεν συμφωνεί με την αντίστοιχη του τύπου του Sommerfeld και ο λόγος είναι ότι το ηλεκτρόνιο έχει ιδιοστροφομή (spin). Η Klein-Gordon περιγράφει σωματίδια με μηδενικό spin, π.χ. σωματίδια π (πιόνια).

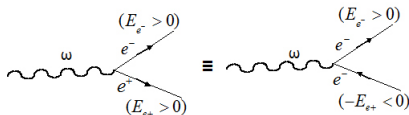
Άσκηση 5 Δείξτε ότι ο κανόνας $\int \phi_{\text{outgoing}}^* V \phi_{\text{ingoing}} d^4x$ πληροί τη διατήρηση ενέργειας στην περίπτωση της δημιουργίας ζεύγους e^+e^- ή στην αντίστοιχη εξαύλωση. Να γίνει το ίδιο και για την διατήρηση της ορμής. Ο όρος του φωτονίου είναι $e^{-i(\omega t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$
(Π)

Λύση

Δίδυμη γένεση

$$\int \left(e^{-iE_{e^-}t} \right)^* e^{-i\omega t} e^{-i(-E_{e^+})t} dt = 2\pi \delta(E_{e^+} - \omega + E_{e^-})$$

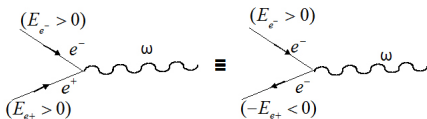
δηλαδή $\omega = E_{e^+} + E_{e^-}$



Για την εξαύλωση

$$\int \left(e^{-i(-E_{e+}t)} \right)^* (e^{-i\omega t})^* e^{-iE_{e-}t} dt = 2\pi\delta(-E_{e+} + \omega - E_{e-})$$

δηλαδή, και πάλι, $\omega = E_{e+} + E_{e-}$.



Άσκηση 6 Δείξτε ότι η Klein-Gordon

$$[(\partial^\mu + iqA^\mu)(\partial_\mu + iqA_\mu) + m^2]\phi = 0$$

παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητισμού

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu f$$

και την αλλαγή φάσης της κυματοσυνάρτησης $\phi' = \phi e^{iqf}$. (Π)

Λύση

Με $A = A^\mu - \partial^\mu f$ και $\phi' = e^{iqf}\phi$ έχουμε

$$\begin{aligned}(\partial^\mu + iqA'^\mu)\phi' &= (\partial^\mu + iqA^\mu - iq\partial^\mu f)e^{iqf}\phi = \\e^{iqf}\partial^\mu\phi + iq(\partial^\mu f)\phi e^{iqf} + iqA^\mu\phi e^{iqf} - iq(\partial^\mu f)e^{iqf}\phi &= \\= e^{iqf}(\partial^\mu + iqA^\mu)\phi\end{aligned}$$

Δηλαδή η έκφραση $\Phi = (\partial^\mu + iqA^\mu)\phi$ μετασχηματίζεται όπως η ϕ .

Επομένως

$$\begin{aligned}(\partial^\mu + iqA'^\mu) (\partial_\mu + iqA'_\mu) \phi' &= (\partial^\mu + iqA'^\mu) \Phi' = \\&= e^{iqf} (\partial^\mu + iqA^\mu) \Phi = e^{iqf} (\partial^\mu + iqA^\mu) (\partial_\mu + iqA_\mu) \phi\end{aligned}$$

Και

$$\begin{aligned}&[(\partial^\mu + iqA'^\mu) (\partial_\mu + iqA'_\mu) + m^2] \phi' = 0 \rightarrow \\&e^{iqf} [(\partial^\mu + iqA^\mu) (\partial_\mu + iqA_\mu) + m^2] \phi = 0 \\&[(\partial^\mu + iqA^\mu) (\partial_\mu + iqA_\mu) + m^2] \phi = 0\end{aligned}$$