

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

9ο ΕΞΑΜΗΝΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών ΕΜΠ

Νίκος Τράκας
Ομότιμος Καθηγητής

- 1 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ
- 2 ΑΝΤΙΣΩΜΑΤΙΔΙΑ
- 3 ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΧΩΡΙΣ ΣΠΙΝ
- 4 Η ΕΞΙΣΩΣΗ DIRAC
- 5 ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΜΕ $SPIN=1/2$
- 6 Η ΔΟΜΗ ΤΩΝ ΑΔΡΟΝΙΩΝ
- 7 ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ
- 8 ΑΣΘΕΝΕΙΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ
- 9 ΜΕΓΑΛΟΕΝΟΠΟΙΗΣΗ
- 10 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ β
- 3 ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
- 4 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Κλασική και Κβαντική Σχετικιστική Θεωρία Πεδίου,
N. Ήργες, Γ. Κουτσούμπας, N. Μαυρόματος

Quarks and Leptons: An introductory course in Modern Particle Physics,
F. Halzen and A.D. Martin

Gauge Theories in Particle Physics,
I.J.R. Aitchison and A.J.G. Hay

Relativistic Quantum Mechanics,
J.D. Bjorken and S.D. Drell

Introduction to Elementary Particles,
D. Griffiths

Field Theory, A Modern Primer,
P. Ramond

Σχετικιστική Κβαντομηχανική,

Σ. Τραχανάς

**Σωματιδιακή Φυσική. Μια Εισαγωγή στην Βασική Δομή
της Ύλης,**

Κ.Ε. Βαγιωνάκης

Οι περισσότερες αλληλεπιδράσεις, π.χ.

$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, \quad eq \rightarrow eq, \quad \gamma q \rightarrow e^+e^-q$$

αποτελούν συστήματα πολλών σωματιδίων και από τα πειράματα που έχουμε στη διάθεσή μας βρισκόμαστε στην περιοχή της σχετικιστικής κινηματικής. Επί πλέον εμφανίζονται και αντισωματίδια που δεν απαιτούνται στην μη σχετικιστική θεωρία.

Στη θεωρία διαταραχών, χρησιμοποιούμε τις κυματοσυναρτήσεις που περιγράφουν ελεύθερο σωματίδιο (IN και OUT καταστάσεις) και την αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων τη θεωρούμε ως διαταραχή σε περιορισμένο χώρο και χρόνο.

Χρησιμοποιούμε σχετικιστικό φορμαλισμό της θεωρίας διαταραχών. Σημαντικό ρόλο παίζουν τα “διαγράμματα Feynman”. Με τη χρήση των “κανόνων Feynman” μπορούμε να υπολογίσουμε φυσικές ποσότητες (ενεργές διατομές, ρυθμούς μετάβασης κ.λπ.) χωρίς να καταφεύγουμε κάθε φορά στη θεωρία πεδίου. Βέβαια, οι κανόνες αυτοί καθορίζονται από τον Λαγκρανζιανό φορμαλισμό και τη θεωρία πεδίου. Αρχικά θα αγνοήσουμε το spin των σωματιδίων, που κάπως περιπλέκει την εικόνα, και θα ασχοληθούμε με “ηλεκτρόνια” χωρίς spin.

Μη σχετικιστική Κβαντομηχανική

Με τις αντικαταστάσεις

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$$

η κλασική σχέση $E = \frac{p^2}{2m}$ γίνεται ($\hbar = 1$)

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 \Psi = 0$$

όπου $|\Psi|^2 = \rho$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας ($|\Psi|^2 d^3x$ δίνει την πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο στον όγκο d^3x). Αυτή είναι η εξίσωση Schrödinger για ελεύθερο σωματίδιο μάζας m .

Ανάλογα με την διατήρηση φορτίου στον ηλεκτρομαγνητισμό, η διατήρηση της πιθανότητας μας οδηγεί στην εξίσωση

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{διαφορική μορφή}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dv + \oint_{S(V)} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{ολοκληρωτική μορφή}$$

όπου $\mathbf{j}$ είναι η πυκνότητα ρεύματος πιθανότητας. Ας βρούμε τη μορφή του $\mathbf{j}$. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Schrödinger με $-i\Psi^*$ και την συζυγή της με $i\Psi$ και αθροίζουμε

$$-i\Psi^* \left(i\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 \Psi \right) + i\Psi \left(-i\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 \Psi^* \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{i}{2m} \Psi^* \nabla^2 \Psi + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{i}{2m} \Psi \nabla^2 \Psi^* = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} - \frac{i}{2m} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\nabla \cdot \left[-\frac{i}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \right]}_{\mathbf{j}} = 0$$

Η λύση της εξ. Schrödinger για το ελεύθερο σωματίδιο,
 $\Psi = N \exp [i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)]$, δίνει $\rho = |\Psi|^2 = |N|^2$ και

$$\mathbf{j} = \frac{-i|N|^2}{2m} (\nabla(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) - \nabla(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})) = \frac{|N|^2}{2m} 2\mathbf{p} = \frac{|N|^2}{m} \mathbf{p}$$

Τετραδιανύσματα και αναλλοίωτα Lorentz

Άσκηση 1 Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Lorentz αντιστοιχεί με στροφή κατά γωνία $i\theta$ στον χώρο $(ict, \mathbf{x})$

Ό,τι μετασχηματίζεται όπως το $(ct, \mathbf{x})$ καλείται τετραδιάνυσμα. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$(ct, \mathbf{x}) = (ct, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x^\mu$$

Επίσης, το E/c και $\mathbf{p}$ συγκροτούν τετραδιάνυσμα

$$(E/c, \mathbf{p}) = (E/c, p^1, p^2, p^3) = (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv p^\mu$$

Ορίζουμε το βαθμωτό γινόμενο δύο τετραδιανυσμάτων $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ και $B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$

$$A \cdot B = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$$

Ορίζοντας το $A_\mu = (A^0, -\mathbf{A})$ μπορούμε να γράψουμε το βαθμωτό γινόμενο ως (επαναλαμβανόμενος δείκτης άνω και κάτω αθροίζεται)

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = \\ A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$$

Ορίζουμε τον (μετρικό) τανυστή $g_{\mu\nu}$

$$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \text{ οι άλλοι όροι μηδενικοί}$$

Ο αντίστροφός του $g^{\mu\nu}$ (δηλαδή $g^{\mu\nu} g_{\nu\mu'} = \delta_{\mu'}^\mu$) εύκολα φαίνεται ότι έχει τους ίδιους όρους. Το γινόμενο των δύο τετραδιανυσμάτων μπορεί να γραφεί

$$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu$$

Με το $g_{\mu\nu}$ και το $g^{\mu\nu}$ μπορούμε να ανεβοκατεβάσουμε τους δείκτες ενός τετραδιανύσματος

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

Το διάνυσμα με άνω δείκτη ονομάζεται ανταλλοίωτο (contravariant), ενώ με κάτω δείκτη συναλλοίωτο (covariant). Για να σχηματιστεί ένα αναλλοίωτο, ως προς μετασχηματισμούς Lorentz, μέγεθος θα πρέπει για κάθε άνω δείκτη να υπάρχει ο αντίστοιχος κάτω. Επίσης, μια σχέση είναι Lorentz συναλλοίωτη όταν οι μη επαναλαμβανόμενοι (άνω και κάτω) δείκτες στις δυο πλευρές της ισότητας αντιστοιχίζονται ένας προς έναν.

Άσκηση 2 Δείξτε ότι $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$

Παραδείγματα βαθμωτών γινομένων είναι

$$p^\mu x_\mu \equiv p \cdot x = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}, \quad p^\mu p_\mu \equiv p \cdot p \equiv p^2 = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2$$

Από εδώ και στο εξής θα θεωρήσουμε ότι $c = 1$

Άσκηση 3 Δύο σωματίδια με ίση μάζα M συγκρούονται στο σύστημα Κέντρου Μάζας. Η συνολική ενέργεια είναι E_{cm} . Δείξτε ότι

$$s \equiv (p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)^\mu \equiv (p_1 + p_2)^2 = E_{cm}^2$$

Αν η σύγκρουση γίνει στο σύστημα εργαστηρίου όπου το ένα σωματίδιο είναι ακίνητο, τότε η ενέργεια E_{lab} του άλλου σωματιδίου δίνεται από τη σχέση

$$E_{lab} = \frac{E_{cm}^2}{2M} - M$$

Προσοχή στο τετραδιάνυσμα

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = \partial^\mu \text{ και } \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) = \partial_\mu$$

Μπορείτε να δείξετε ότι το πρώτο μετασχηματίζεται όπως το $(t, \mathbf{x})$ ενώ το δεύτερο όπως το $(t, -\mathbf{x})$.

Η αντικατάσταση της ενέργειας και της ορμής με τους αντίστοιχους τελεστές γενικεύεται

$$p^\mu \rightarrow i\partial^\mu$$

Τέλος, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$\partial^\mu \partial_\mu \equiv \square^2$$

Η εξίσωση Klein-Gordon

Χρησιμοποιώντας της σχετικιστική εξίσωση $E^2 = p^2 + m^2$ και τις αντικαταστάσεις $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ και $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$, οδηγούμαστε στην ($\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi &= ((-i\nabla)^2 + m^2) \phi \Rightarrow \\ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi + \nabla^2 \phi &= m^2 \phi \end{aligned}$$

που αποτελεί την εξίσωση Klein-Gordon.

Θέλουμε να γράψουμε την εξίσωση συνέχειας και να αναγνωρίσουμε την πυκνότητα πιθανότητας και την πυκνότητα ρεύματος πιθανότητας. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Klein-Gordon επί $-i\phi^*$ και την συζυγή της επί $i\phi$ και προσθέτουμε

$$-i\phi^* \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi + \nabla^2 \phi \right) + i\phi \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi^* + \nabla^2 \phi^* \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[i \left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial t} \phi^* \right) \right] + \nabla \cdot [-i(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)] = 0$$

οπότε αναγνωρίζουμε ότι

$$\rho = i \left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial t} \phi^* \right) \text{ και } \mathbf{j} = -i(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)$$

Αν πάρουμε για ϕ τη λύση της εξίσωσης Klein-Gordon που αντιστοιχεί σε ελεύθερο σωματίδιο $\phi = Ne^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} = Ne^{-ix^\mu p_\mu}$, τότε

$$\rho = i(-2iE)|N|^2 = 2E|N|^2 \text{ και } \mathbf{j} = -i(2i\mathbf{p})|N|^2 = 2\mathbf{p}|N|^2$$

Η Klein-Gordon μπορεί να γραφεί με τετραδιανύσματα

$$\left[\left(i \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - (-i \nabla)^2 \right] \phi = m^2 \phi \Rightarrow - \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \phi = m^2 \phi \Rightarrow$$
$$-\partial^\mu \partial_\mu \phi = m^2 \phi \Rightarrow (\square^2 + m^2) \phi = 0$$

και

$$j^\mu \equiv (\rho, \mathbf{j}) = 2(E, \mathbf{p}) |N|^2 = 2p^\mu |N|^2$$

Προσέξτε ότι η ρ δεν είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Lorentz, αφού είναι ανάλογη με την ενέργεια, αλλά το ρd^3x είναι αναλλοίωτο.

Τις ιδιοτιμές ενέργειας της Klein-Gordon τις παίρνουμε αντικαθιστώντας τη λύση $\phi = Ne^{-ix^\mu p_\mu}$ στην εξίσωση και παίρνουμε

$$E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

Με αρνητικές ενέργειες μπορούμε να έχουμε μεταπτώσεις σε όλο και χαμηλότερες ενέργειες και επιπλέον η πιθανότητα ρ μπορεί να γίνει αρνητική. Δεν μπορούμε, όμως, απλά να αγνοήσουμε τις αρνητικές ενέργειες γιατί πρέπει να έχουμε πάντοτε το πλήρες σύνολο των καταστάσεων.

Ιστορική αναδρομή

“Εξήγηση” του Dirac για τις αρνητικές ενέργειες της εξίσωσής του.

“Εξήγηση” των Pauli και Weisskopf για τις αρνητικές ενέργειες της Klein-Gordon. Μετέτρεψαν το j^μ σε πυκνότητα ρεύματος ηλεκτρικού φορτίου $j^\mu = -ie \left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial t} \phi^* \right)$.

Η περιγραφή των λύσεων με $E < 0$ από τους Feynman-Stückelberg

Η βασική ιδέα είναι ότι η κατάσταση με ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ περιγράφει σωματίδιο που “διαδίδεται” πίσω στο χρόνο, ή ΑΝΤΙΣΩΜΑΤΙΔΙΟ που διαδίδεται κανονικά με τον χρόνο.

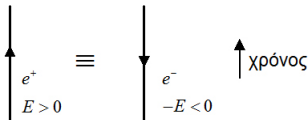
Ας ξεχάσουμε τη “δυσκολία” του σπιν και ας θεωρήσουμε ότι η KG περιγράφει ηλεκτρόνια με φορτίο $-e$. Οπότε, το τετραδύανυσμα του ηλεκτρομαγνητικού ρεύματος γίνεται

$$j^\mu(e^-) = -2e|N|^2(E, \mathbf{p})$$

Για το αντισωματίδιο, με φορτίο $+e$ θα γράφαμε

$$j^\mu(e^+) = +2e|N|^2(E, \mathbf{p}) = -2e|N|^2(-E, -\mathbf{p})$$

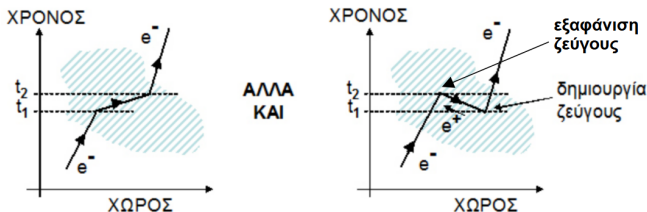
Αυτό περιγράφει σωματίδιο φορτίου $-e$ με ενέργεια $-E$ και ορμή $-\mathbf{p}$. Δηλαδή



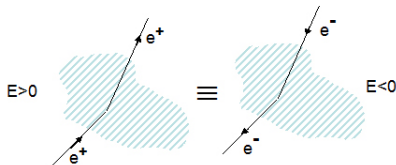
Προσέξτε ότι

$$e^{-iEt} = e^{-i(-E)(-t)}$$

Γί' αυτό ακριβώς μπορούμε να περιγράψουμε αρνητικής ενέργειας σωματίδια που πηγαίνουν “πίσω” στο χρόνο ως θετικής ενέργειας αντισωματίδια που πηγαίνουν “μπροστά” στον χρόνο (δηλαδή με ανάποδη ορμή).



Διπλή σκέδαση ηλεκτρονίου από πεδίο. Στο δεύτερο διάγραμμα, μεταξύ των t_1 και t_2 , η κατάσταση περιγράφει 3 σωματίδια!!



Μπορούμε να περιγράψουμε τα πάντα με την κυματοσυνάρτηση του e^- . Δεν χρειαζόμαστε την κυματοσυνάρτηση του e^+ .

Μη σχετικιστική θεωρία διαταραχών

Ας θεωρήσουμε ότι γνωρίζουμε τις λύσεις ϕ_n της εξίσωσης Schrödinger για το ελεύθερο σωματίδιο. Η χαμιλτονιανή H_0 είναι ανεξάρτητη από το χρόνο.

$$H_0 \phi_n = E_n \phi_n \quad \mu\epsilon \quad \int_V \phi_m^* \phi_n d^3x = \delta_{mn}$$

(νορμαλισμός=1 σωματίδιο/όγκο V , $\rho = |\phi|^2 \Rightarrow N = V^{-1/2}$)

Ζητάμε να λύσουμε την

$$(H_0 + V(\mathbf{x}, t)) \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1)$$

Οι λύσεις ϕ_n αποτελούν πλήρες σύνολο, οπότε μπορούμε να αναλύσουμε την ψ

$$\psi = \sum_n a_n(t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t}$$

Βάζοντας αυτήν την έκφραση στην Εξ.(1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} (H_0 + V(\mathbf{x}, t)) \sum_n a_n(t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} &= i \frac{\partial}{\partial t} \sum_n a_n(t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} \Rightarrow \\ \sum_n a_n(t) E_n \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} + V(\mathbf{x}, t) \sum_n a_n(t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} &= \\ i \sum_n \frac{da_n}{dt} \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} + i \sum_n a_n(t) (-iE_n) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} \end{aligned}$$

Απαλοίφοντας τον πρώτο και τελευταίο όρο στην παραπάνω ισότητα καταλήγουμε στην σχέση

$$V(\mathbf{x}, t) \sum_n a_n(t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} = i \sum_n \frac{da_n}{dt} \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t}$$

Πολλαπλασιάζοντας με ϕ_f^* και ολοκληρώνοντας

$$i \sum_n \frac{da_n}{dt} \int d^3x \phi_f^*(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} =$$

$$\sum_n \int d^3x V(\mathbf{x}, t) a_n(t) \phi_f^*(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} \Rightarrow$$

$$\frac{da_f}{dt} = -i \sum_n a_n(t) \int d^3x \phi_f^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}, t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-i(E_n - E_f)t} \quad (2)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το V δρα σε μια ορισμένη κατάσταση ϕ_i της ελεύθερης χαμιλτονιανής την χρονική στιγμή $t = -T/2$, δηλαδή

$$\text{για } t = -\frac{T}{2}, \quad \phi_n = \phi_i \rightarrow \begin{array}{ll} a_n = 1, & n = i \\ a_n = 0, & n \neq i \end{array}$$

και τότε

$$\frac{da_f}{dt} = -i \int d^3x \phi_f^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}, t) \phi_i(\mathbf{x}) e^{-i(E_i - E_f)t} \quad (3)$$

Θεωρώντας ότι το V είναι ασθενές και αργά μεταβαλλόμενο, η μεταβολή κάθε a_n είναι μικρή και επομένως κάθε a_n με $n \neq i$ θα παραμένει κοντά στο μηδέν. Με αυτό το συλλογισμό η Εξ.(3) ισχύει για κάθε χρονική στιγμή (και όχι μόνο για $t = -T/2$). Ολοκληρώνοντας την Εξ.(3) παίρνουμε

$$a_f = -i \int_{-T/2}^t dt' \int d^3x \phi_f^* V \phi_i e^{-i(E_i - E_f)t'} \Rightarrow \quad (4)$$

$$T_{fi} \equiv a_f(T/2) = -i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d^3x \left(\phi_f e^{-iE_f t} \right)^* V \left(\phi_i e^{-iE_i t} \right) \Rightarrow$$

$$T_{fi} = -i \int d^4x \phi_f^*(\mathbf{x}, t) V(\mathbf{x}, t) \phi_i(\mathbf{x}, t)$$

Για να ισχύει η προσέγγιση θα πρέπει $a_f(t) \ll 1$. Μπορούμε να αποδόσουμε στο $|T_{fi}|^2$ την έννοια της πιθανότητας ότι το σωματίδιο από την αρχική κατάσταση i πηγαίνει στην τελική f ;

Ας υποθέσουμε ότι $V(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x})$. Τότε

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d^3x \phi_f^* e^{iE_f t} V(\mathbf{x}) \phi_i e^{-iE_i t} = \\ &= -i \left[\int d^3x \phi_f^* V \phi_i \right] \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i(E_i - E_f)t} = \\ &= -i V_{fi} 2\pi \delta(E_f - E_i) \end{aligned}$$

όπου ορίσαμε V_{fi} το ολοκλήρωμα μέσα στις αγκύλες της δεύτερης σειράς ενώ η συνάρτηση δ δείχνει την διατήρηση της ενέργειας. Αλλά για $E_f = E_i$, η αρχή της αβεβαιότητας μας λέει ότι χρειαζόμαστε άπειρο χρόνο για να μεταβούμε από τη μια κατάσταση στην άλλη. Γι' αυτό καλύτερα ορίζουμε την ποσότητα

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |V_{fi}|^2 4\pi^2 [\delta(E_f - E_i)]^2$$

που αποτελεί την πιθανότητα μετάπτωσης ανά μονάδα χρόνου (transition probability per unit time).

Ο τετραγωνισμός της συνάρτησης δ δίνει

$$\begin{aligned}(2\pi)^2 [\delta(E_f - E_i)]^2 &= 2\pi \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_f - E_i)t} \delta(E_f - E_i) dt \\ &= T 2\pi \delta(E_f - E_i)\end{aligned}$$

οπότε παίρνουμε

$$W = |V_{fi}|^2 2\pi \delta(E_f - E_i)$$

Αυτή η τελευταία εξίσωση έχει έννοια αν ολοκληρωθεί σε ένα σύνολο τελικών καταστάσεων. Συνήθως ξεκινάμε από μια καθορισμένη κατάσταση και καταλήγουμε σε ένα σύνολο τελικών καταστάσεων με πυκνότητα $\rho(E_f)$ (δηλαδή $\rho(E_f)dE_f$ είναι ο αριθμός καταστάσεων με ενέργεια μεταξύ των E_f και $E_f + dE_f$). Οπότε ορίζουμε ως ρυθμό μετάπτωσης (transition rate)

$$\begin{aligned}W_{fi} &= \int dE_f \rho(E_f) W = 2\pi \int dE_f \rho(E_f) |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) = \\ &= 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_i)\end{aligned}$$

Μπορούμε να πάρουμε μία τάξη προσέγγισης παρακάτω βάζοντας την λύση για το a_f , Εξ.(4), στην διαφορική εξίσωση του a_f , Εξ.(2)

$$\frac{da_f}{dt} = \dots + (-i) \sum_{n \neq i} \left[(-i) \int_{-T/2}^t dt' V_{ni} e^{-i(E_i - E_n)t'} \right] V_{fn} e^{-i(E_n - E_f)t}$$

όπου ... είναι ο όρος πρώτης τάξης και η έκφραση μέσα στις αγκύλες είναι ο συντελεστής a_n . Οπότε, έχουμε

$$T_{fi} = \dots + (-i)^2 \sum_{n \neq i} V_{fn} V_{ni} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(E_n - E_f)t} \int_{-\infty}^t dt' e^{-i(E_i - E_n)t'}$$

Για να έχει νόημα η δεύτερη ολοκλήρωση εισάγουμε μια απειροστή ποσότητα $\epsilon > 0$ και στο τέλος βέβαια $\epsilon \rightarrow 0$

$$\int_{-\infty}^t dt' e^{-i(E_i - E_n + i\epsilon)t'} = i \frac{e^{-i(E_i - E_n + i\epsilon)t}}{(E_i - E_n + i\epsilon)}$$

και το T_{fi} γράφεται

$$T_{fi} = \dots + (-2\pi i) \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n + i\epsilon} V_{ni} \delta(E_f - E_i)$$

Άσκηση 4 Δείξτε ότι ο ρυθμός μετάβασης $i \rightarrow f$ για την προσέγγιση 2ης τάξης δίνεται από τη σχέση $W_{fi} = 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_i)$, όπου το V_{fi} αντικαθίσταται από τη σχέση

$$V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n + i\epsilon} V_{ni} + \dots$$

Ποιά είναι η σχέση για την επόμενη διόρθωση (3ης τάξης σε V).
Δηλαδή για κάθε σημείο αλληλεπίδρασης έχουμε έναν παράγοντα V_{ij} και για κάθε ενδιάμεση διάδοση έχουμε ένα διαδότη $\sim 1/(E_i - E_j)$. Αυτή η ενδιάμεση κατάσταση είναι “εικονική” (virtual) με την έννοια ότι $E_i \neq E_j$ (δεν διατηρείται η ενέργεια) αλλά βέβαια $E_f = E_i$ που φαίνεται από την παρουσία της $\delta(E_f - E_i)$. Όλα τα παραπάνω πρέπει να γενικευτούν για σχετικιστικά σωματίδια και αντισωματίδια.

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1 Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Lorentz αντιστοιχεί με στροφή κατά γωνία $i\theta$ στον χώρο (x, ict) . (Π)

Λύση

$$x' = \frac{x - (v/c)ct}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad ct' = \frac{ct - (v/c)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}, \quad \cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}, \quad \tanh \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta}$$

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1, \quad e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

$$\cos(i\theta) = \frac{1}{2} \left(e^{i(i\theta)} + e^{-i(i\theta)} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{-\theta} + e^\theta \right) = \cosh \theta$$

$$\sin(i\theta) = \frac{1}{2i} \left(e^{i(i\theta)} - e^{-i(i\theta)} \right) = \frac{1}{2i} \left(e^{-\theta} - e^\theta \right) = i \sinh \theta$$

Ονομάζοντας $\tanh \theta = v/c$, παίρνουμε

$$(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = [(\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta) / \cosh^2 \theta]^{-1/2} = \cosh \theta$$

Οπότε

$$x' = x \cosh \theta - ct \sinh \theta, \quad ct' = ct \cosh \theta - x \sinh \theta$$

ή δουλεύοντας με x και ict

$$x' = x \cos(i\theta) + ict \sin(i\theta), \quad ict' = ict \cos(i\theta) - x \sin(i\theta)$$

που γράφεται και ως

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(i\theta) & \sin(i\theta) \\ -\sin(i\theta) & \cos(i\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2 Δείξτε ότι $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$.

(Π)

Λύση

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} &= g_{00}g^{00} + g_{11}g^{11} + g_{22}g^{22} + g_{33}g^{33} = \\ &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = 4 \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι τόσο ο $g_{\mu\nu}$ όσο και ο $g^{\mu\nu}$ περιγράφονται από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3 Δύο σωματίδια με ίση μάζα M συγκρούονται στο σύστημα Κέντρου Μάζας. Η συνολική ενέργεια είναι E_{cm} . Δείξτε ότι

$$s \equiv (p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)^\mu \equiv (p_1 + p_2)^2 = E_{cm}^2$$

Αν η σύγκρουση γίνει στο σύστημα εργαστηρίου όπου το ένα σωματίδιο είναι ακίνητο, τότε η ενέργεια E_{lab} του άλλου σωματιδίου δίνεται από τη σχέση

$$E_{lab} = \frac{E_{cm}^2}{2M} - M$$

(Π)

Λύση

Στο σύστημα Κέντρου Μάζας

$$p_1^\mu = (E_1, \mathbf{p}) \text{ και } p_2^\mu = (E_2, -\mathbf{p})$$

Οπότε

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2, 0)^2 = E_{cm}^2$$

Στη δεύτερη περίπτωση $p_1^\mu = (E_{lab}, \mathbf{p}_1)$ και $p_2^\mu = (M, 0)$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_{lab} + M, \mathbf{p}_1)^2 = (E_{lab} + M)^2 - \mathbf{p}_1^2 = \\ (E_{lab} + M)^2 - (E_{lab}^2 - M^2) = 2E_{lab}M + 2M^2$$

Αλλά το s είναι αναλλοίωτο, οπότε

$$E_{cm}^2 = 2E_{lab}M + 2M^2 \Rightarrow E_{lab} = \frac{E_{cm}^2}{2M} - M$$