Παράρτημα 1

Ανταλλοίωτο και συναλλοίωτο τετρα-διάνυσμα

Ο μετασχηματισμός Lorentz, για κίνηση στον άξονα x (δηλαδή x_1) είναι ($c = 1$)

$$t = \frac{t - vx_1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2}}$$

ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι

$$t = \frac{t' + vx_1'}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x_1 = \frac{x_1' + vt'}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Όσα τετραδιανύσματα μετασχηματίζονται όπως ο ευθύς ανασχηματισμός τα ονομάζουμε ανταλλοίωτα (contravariant) διανύσματα και τα συμβολίζουμε με δείκτη πάνω. Οπότε, το t και το $\mathbf{x}$ αποτελούν ανταλλοίωτο τετραδιάνυσμα

$$(t, \mathbf{x}) = (t, x_1, x_2, x_3) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = x^\mu$$

Τα τετραδιανύσματα που μετασχηματίζονται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό ονομάζομται συναλλοίωτα (covariant) και βάζουμε τον δείκτη κάτω. Εύκολα φαίνεται ότο το τετραδιάνυσμα $(t, -\mathbf{x})$ είναι ένα συναλλοίωτο τετραδιάνυσμα:

$$(t, -\mathbf{x}) = (t, -x_1, -x_2, -x_3) = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) = x_\mu$$

Τώρα μπορούμενα δείξουμε ότι το $(\partial/\partial t, \boldsymbol{\nabla})$ μετασχηματίζεται με τον αντίστροφο μετασηματισμό. Πράγματι

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t'} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1'} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_1'} + \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_1'} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + v\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

Το $(\partial/\partial t, -\boldsymbol{\nabla})$ μετασχηματίζεται με τον ευθύ μετασχηματισμό. Οπότε, γράφουμε

$$(\partial/\partial t, -\boldsymbol{\nabla}) = \partial^\mu, \quad (\partial/\partial t, \boldsymbol{\nabla}) = \partial_\mu$$