αντιστροφή

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \psi'^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi' = (S_P\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(S_P\psi) = (\gamma^0\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(\gamma^0\psi) =$$

$$= \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi = \begin{cases} +\bar{\psi}\gamma^0\psi, & \mu = 0 \\ -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, & \mu = 1,2,3 \end{cases}$$

Για το $\bar{\psi}\psi$ έχουμε

$$\bar{\psi}'\psi' = \psi^\dagger S^\dagger\gamma^0 S\psi = \psi^\dagger\gamma^0 S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi$$

για S_L και S_P.

Φερμιόνια με μηδενική μάζα. Το νετρίνο

Στην περίπτωση της μηδενικής μάζας, η εξίσωση του Dirac γίνεται

$$H\psi = \mathbf{a}\cdot\mathbf{p}\psi = E\psi$$

Τώρα συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση Weyl των πινάκων **a**

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

Οπότε

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi = E\chi \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\phi = E\phi \end{cases}$$

Για κάθε εξίσωση ισχύει $E^2 = p^2 \rightarrow E = \pm p$.
Ας δούμε την πρώτη εξίσωση $-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi = E\chi$. Για $E > 0$ έχουμε

$$-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi(\mathbf{p}) = E\chi \rightarrow -\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{E}\chi(\mathbf{p}) = \chi(\mathbf{p}) \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\chi(\mathbf{p}) = -\chi(\mathbf{p})$$

Άρα, το χ έχει αρνητική ελικότητα. Η ίδια πρώτη εξίσωση, για

$E < 0$ (ως συνήθως μιλάμε για $-E$ και $-\mathbf{p}$), γράφεται

$$-\boldsymbol{\sigma} \cdot (-\mathbf{p})\chi(-\mathbf{p}) = -E\chi \to \boldsymbol{\sigma} \cdot (-\hat{\mathbf{p}})\chi(-\mathbf{p}) = \chi(-\mathbf{p})$$

Επομένως το $\chi(-\mathbf{p})$ έχει θετική ελικότητα.
Ακριβώς τα αντίθετα συμβαίνουν για την δεύτερη εξίσωση. Το ϕ για $E > 0$ έχει θετική ελικότητα, ενώ για $E < 0$ έχει αρνητική ελικότητα.
Στην αναπαράσταση Weyl, ο $\gamma^5 = \mathrm{diag}(-I, I)$. Εύκολα φαίνεται ότι

$$P_L \equiv \frac{1-\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \equiv \frac{1+\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι τελεστές P_L και P_R είναι προβολικοί: $P_L + P_R = 1$, $P_L P_R = 0$ και $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$.

Αν ψ είναι ένας γενικός spinor, τότε το $P_L\psi$ ονομάζεται αριστερή συνιστώσα και το $P_R\psi$ δεξιά συνιστώσα του ψ. Πάντοτε μπορούμε να γράφουμε $\psi = P_L\psi + P_R\psi$.
Βλέπουμε ότι

$$P_L \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_R \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix}$$

Οπότε ένας spinor με μηδενικές τις δύο κάτω συνιστώσες είναι ιδιοκατάσταση του P_L, δηλαδή είναι αριστερόστροφο

$$P_L \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

ΔΗΛΑΔΗ: το $\begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$ με $E > 0$, έχει αρνητική ελικότητα και είναι αριστερόστροφο. Το ίδιο με $E < 0$ είχαμε δει ότι έχει θετική ελικότητα και

$$P_L \begin{pmatrix} \chi(-\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi(-\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

αλλά λόγω του $-\mathbf{p}$ είναι δεξιόστροφο. Τα αντίθετα ισχύουν για το spinor με μηδενικές τις δύο πάνω συνιστώσες.

Συνοψίζουμε (για $m = 0$)

$\begin{pmatrix} \chi(\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$ αριστερόστροφο με $h = -1$ (αριστερόστροφο νετρίνο)

$\begin{pmatrix} \chi(-\mathbf{p}) \\ 0 \end{pmatrix}$ δεξιόστροφο με $h = +1$ (δεξιόστροφο αντινετρίνο)

$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$ δεξιόστροφο με $h = +1$ (δεξιόστροφο νετρίνο)

$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi(-\mathbf{p}) \end{pmatrix}$ αριστερόστροφο με $h = -1$ (αριστερόστροφο αντινετρίνο)

Το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα είναι $j^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e$. Στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις το αντίστοιχο ρεύμα είναι

$$\frac{1}{2}\,\bar{\psi}_e \left[\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^5\right] \psi_{\nu_e} = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \psi_{\nu_e}$$

Αλλά, για άμαζο νετρίνο, η ποσότητα $\frac{1-\gamma^5}{2}\psi_{\nu_e}$ αντιστοιχεί στο αριστερόστροφο νετρίνο (ή δεξιόστροφο αντινετρίνο). Στη θεωρία των ασθενών αλληλεπιδράσεων δεν εμφανίζεται δεξιόστροφο νετρίνο (ή αριστερόστροφο αντινετρίνο).

Για $m \neq 0$, το $u_L = P_L u$ δεν είναι ιδιοκατάσταση της ελικότητας.

Χρησιμοποιώντας την Dirac-Pauli αναπαράσταση θα έχουμε

$$P_L u(p) = \frac{1-\gamma^5}{2} u(p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left(-1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή της ελικότητας έχουμε

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left(-1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \frac{p}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left(-\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \frac{p}{E+m}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

βλέπουμε ότι το u_L δεν είναι ιδιοκατάσταση της ελικότητας. Αν όμως $m = 0$, και τότε $p = E$, θα έχουμε

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι για $m = 0$ η δράση του γ^5 και του τελεστή της ελικότητας ταυτίζονται

$$\gamma^5 u(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Majorana spinors

Ας υποθέσουμε ότι ένα σωματίδιο, που περιγράφεται από την ψ_M, συμπίπτει με το αντισωματίδιό του. Δηλαδή, $\psi_M^C = \psi_M$. Βέβαια, ένα τέτοιο σωματίδιο θα πρέπει να είναι ηλεκτρικά αφόρτιστο. Ας δούμε ποιες σχέσεις πληρούν οι συνιστώσες του. Γνωρίζουμε ότι

$$\psi_M^C = C\gamma^0\psi_M^* = i\gamma^2\psi_M^* = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \psi_M^*$$

Γράφοντας το ψ_M με δυο συνιστώσες ϕ και χ έχουμε

$$\psi_M^C = \psi_M \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^* \\ \chi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

ή με άλλα λόγια

$$i\sigma_2\,\chi^* = \phi$$

Η άλλη σχέση, $-i\sigma_2\,\phi^* = \chi$ είναι ισοδύναμη μιας και $\sigma_2^* = -\sigma_2$ καθώς και $(\sigma_2)^2 = 1$. Οπότε, το ψ_M γράφεται

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \phi \\ -i\sigma_2\,\phi^* \end{pmatrix}, \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \psi_M = \begin{pmatrix} i\sigma_2\,\chi^* \\ \chi \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να δείξουμε τώρα ότι αν το ϕ έχει αρνητική ελικότητα, δηλαδή, $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\phi = -\phi$, τότε το $-i\sigma_2\,\phi^*$ έχει θετική ελικότητα.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}(-i\sigma_2\,\phi^*) &= -i(\sigma_1\sigma_2\hat{p_1} + \sigma_2\sigma_2\hat{p_2} + \sigma_3\sigma_2\hat{p_3})\phi^* = \\
&= -i(-\sigma_2\sigma_1\hat{p_1} + \sigma_2\sigma_2\hat{p_2} - \sigma_2\sigma_3\hat{p_3})\phi^* = \\
&= -i(-\sigma_2\sigma_1^*\hat{p_1} - \sigma_2\sigma_2^*\hat{p_2} - \sigma_2\sigma_3^*\hat{p_3})\phi^* = \\
&= -i\sigma_2(-\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\phi)^* = -i\sigma_2\,\phi^*
\end{aligned}$$

Επομένως ο ψ_M (Majorana spinor), μπορεί να περιγράφει με την πάνω συνιστώσα ϕ ένα αριστερόστροφο νετρίνο και με την κάτω συνιστώσα $-i\sigma_2\,\phi^*$ ένα δεξιόστροφο αντινετρίνο.

ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΜΕ SPIN=1/2

Αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο A^μ

Το ελεύθερο ηλεκτρόνιο υπακούει την εξίσωση Dirac $(\not{p} - m)\psi = 0$ με $\psi = u(\mathbf{p})e^{-ipx}$. Η παρουσία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου εισάγεται με την ‘‘ελάχιστη αντικατάσταση’’ $p^\mu \to p^\mu + eA^\mu$ (θεωρώντας το φορτίο του ηλεκτρονίου $-e$). Ξεκινώντας λοιπόν από την εξίσωση Dirac

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-i\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta m\right)\psi$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + eA^0\right)\psi = \mathbf{a}\cdot\left(-i\boldsymbol{\nabla} + e\mathbf{A}\right)\psi + \beta m\psi$$

$$\gamma^0 \left(i\frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = \gamma^0 \left(-i\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m + \hat{V} \right) \psi$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\gamma^0\psi + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi - m\psi = \gamma^0\hat{V}\psi$$

$$(\not{p} - m)\psi = \gamma^0\hat{V}\psi$$

όπου $\hat{V} \equiv -eA^0 + e\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}$ και $\gamma^0\hat{V} = -e(\gamma^0 A^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}) = -e\not{A}$.
Οπότε $(\gamma^0\hat{V} = -e\not{A} \rightarrow \hat{V} = -e\gamma^0\not{A})$

$$T_{fi} = -i\int \psi_f^\dagger \hat{V}\psi_i \, d^4x = -i\int \psi_f^\dagger \gamma^0(-e)\not{A}\psi_i \, d^4x$$

$$= -i\int (-e)\bar{\psi}_f\gamma^\mu\psi_i A_\mu \, d^4x = -i\int j^\mu A_\mu \, d^4x$$

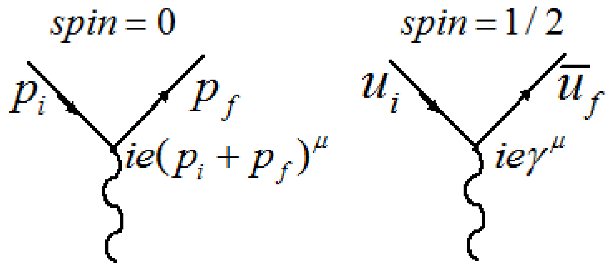
με

$$j^\mu = -e\bar{\psi}_f\gamma^\mu\psi_i = -e\bar{u}(\mathbf{p}_f)\gamma^\mu u_(\mathbf{p}_i)e^{-i(p_i-p_f)x}$$

Υπενθυμίζουμε ότι για σωματίδια με spin=0 το αντίστοιχο ρεύμα είναι

$$j^\mu = -e(p_f + p_i)^\mu e^{-i(p_i - p_f)x}$$

Η κορυφή στην περίπτωση spin=1/2 είναι τώρα ένας πίνακας.



Άσκηση 28 Δείξτε την παρακάτω σχέση (ανάπτυξη Gordon)

$$\bar{u}_f \gamma^\mu u_i = \frac{1}{2m} \bar{u}_f \left[(p_i + p_f)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p_f - p_i)_\nu \right] u_i$$

Δηλαδή, ενώ το σωματίδιο με spin=0 δρα με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με το φορτίο του ($-e(p_f + p_i)^\mu$), το spin=1/2 δρα και με την μαγνητική ροπή του ($\sigma^{\mu\nu}(p_f - p_i)_\nu$). Αυτή η έννοια φαίνεται καλύτερα όταν πάμε στο όριο των μικρών ενεργειών όπου $p/m << 1$. Ας θεωρήσουμε $A^\mu \neq f(t)$. Οπότε (χρησιμοποιούμε κεφαλαία I και F αντί των i f)

$$T_{FI} = -i \int j^\mu A_\mu \, d^4x = -i \int -e\bar{u}_F \gamma^\mu u_I A_\mu e^{-i(p_F - p_I)x} \, d^4x$$

$$= -i \left[\int (-e\bar{u}_F \gamma^\mu u_I) A_\mu e^{-i(\mathbf{p}_F - \mathbf{p}_I)\cdot \mathbf{x}} \, d^3x \right] 2\pi\delta(E_F - E_I)$$

Χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη Gordon, ο δεύτερος όρος της ανάπτυξης του $\bar{u}_F \gamma^\mu u_I$ δίνει $\bar{u}_F i\sigma^{\mu\nu} u_I (p_F - p_I)_\nu A_\mu$. Γράφοντας το $u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$ όπου u_A και u_B είναι οι μεγάλες και οι μικρές συνιστώσες αντίστοιχα ο όρος $\bar{u}_F i\sigma^{\mu\nu} u_I$ γράφεται για τις τρεις περιπτώσεις:

α) $\nu, \mu = 1,2,3$. $\bar{u}_F i\sigma^{\mu\nu} u_I \to (u_A^\dagger \; u_B^\dagger)_F \gamma^0 i\sigma^{ij} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}_I$. Αλλά

$$i\gamma^0\sigma^{ij} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{i}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -(\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i) & 0 \\ 0 & -(\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i) \end{pmatrix} =$$

$$= i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{i}{2} 2 \begin{pmatrix} -i\epsilon_{ijk}\sigma_k & 0 \\ 0 & -i\epsilon_{ijk}\sigma_k \end{pmatrix}$$

Άρα, θα εμφανιστούν όροι $\bar{u}_{AF}u_{AI}$ και $\bar{u}_{BF}u_{BI}$. Ο δεύτερος όρος είναι κατά $(p/m)^2$ μικρότερος από τον πρώτο. Επομένως, θα μείνει ο όρος $\bar{u}_{AF} i\sigma_k u_{AI}\ \epsilon_{ijk}(p_F - p_I)^j A^i$

β) $\mu = 0$, $\nu = 1, 2, 3$. Το $\gamma^0\sigma$ είναι πίνακας με στοιχεία εκτός διαγωνίου, άρα αναμιγνύει μεγάλες και μικρές συνιστώσες, επομένως όλοι οι όροι είναι τάξης (p/m) και τέλος

γ) $\mu = \nu = 0$, το $\sigma^{\mu\nu} = 0$

Επομένως, μαζεύοντας τους ''μεγάλους'' όρους μόνο, έχουμε

$$T_{fi} = -e2\pi\delta(E_F - E_I)\int d^3x e^{-i(\mathbf{p}_F - \mathbf{p}_I)\cdot\mathbf{x}} \bar{u}_{AF}\epsilon_{ijk}\sigma^k (p_F - p_I)^j A^i u_{AI} =$$

$$= -ie2\pi\delta(E_F - E_I)\int d^3x \left(\partial^j e^{-i(\mathbf{p}_F - \mathbf{p}_I)\cdot\mathbf{x}}\right) \bar{u}_{AF}\epsilon_{ijk}\sigma^k A^i u_{AI} =$$

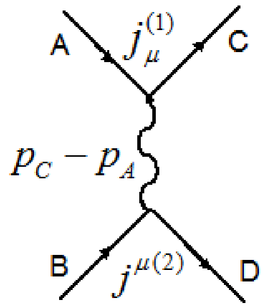
$$= ie2\pi\delta(E_F - E_I)\int d^3x e^{-i(\mathbf{p}_F - \mathbf{p}_I)\cdot\mathbf{x}} \bar{u}_{AF}\epsilon_{ijk}\sigma^k \left(\partial^j A^i\right) u_{AI} =$$

$$= -ie2\pi\delta(E_F - E_I)\int d^3x e^{-i(\mathbf{p}_F - \mathbf{p}_I)\cdot\mathbf{x}} \bar{u}_{AF}\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\right] u_{AI}$$

Σκέδαση Moeller$(e^- e^- \rightarrow e^- e^-)$

Γνωρίζουμε ότι

$$T_{fi} = -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)\mathcal{M}$$



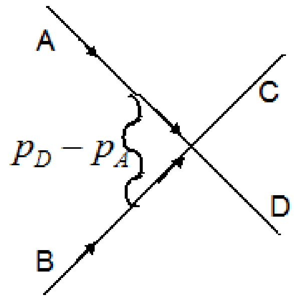
Αλλά

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{(1)} \left(-\frac{1}{q^2} \right) j^{\mu(2)}(x)\, d^4x =$$

$$-\, i\, (-e\bar{u}_C \gamma_\mu u_A) \left(-\frac{1}{q^2} \right) (-e\bar{u}_D \gamma^\mu u_B)\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)$$

όπου $q = p_C - p_A$. Οπότε, το αναλλοίωτο πλάτος $\mathcal{M}$ είναι

$$-i\mathcal{M} = (ie\bar{u}_C\gamma_\mu u_A)\,\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}\,(ie\bar{u}_D\gamma_\nu u_B)$$



όπως είχαμε ορίσει τις ''κορυφές''. Βέβαια, υπάρχει και το διάγραμμα με διασταυρωμένα τα ηλεκτρόνια C και D και το επιπλέον $-$. Το συνολικό πλάτος είναι λοιπόν

$$\mathcal{M} = -e^2\frac{(\bar{u}_C\gamma_\mu u_A)\,(\bar{u}_D\gamma^\mu u_B)}{(p_A - p_C)^2} + e^2\frac{(\bar{u}_D\gamma_\mu u_A)\,(\bar{u}_C\gamma^\mu u_B)}{(p_A - p_D)^2} \qquad (15)$$

Για να πάμε στην ''μη πολωμένη'' ενεργό διατομή (δηλαδή σ′

αυτήν που δεν διακρίνουμε το spin πριν και μετά την σκέδαση), θα πρέπει να τετραγωνίσουμε το αναλλοίωτο πλάτος, να πάρουμε μέσο όρο του spin των εισερχομένων και να αθροίσουμε στα spin των εξερχομένων ηλεκτρονίων

$$\frac{1}{(2s_A+1)(2s_B+1)}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}|^2$$

Ας δούμε αυτήν την ‘‘πράξη’’ πρώτα στην περίπτωση χαμηλής ενέργειας. Τότε τα εισερχόμενα ηλεκτρόνια είναι

$$u^{(s)}=\sqrt{2m}\begin{pmatrix}\chi^{(s)}\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \bar{u}^{(s)}=\sqrt{2m}\left(\chi^{\dagger(s)}\ 0\right) \quad s=1,2$$

και παίρνουμε

$$\bar{u}^{(s)}\gamma^{\mu}u^{(s')} = \left\{ \begin{array}{ll} 2m & \mu = 0 \\ 0 & \mu \neq 0 \end{array} \right\} \delta^{ss'}$$

μιας και

$$\gamma^0 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right), \gamma^i = \left(\begin{array}{cc} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{array} \right), \chi^{(s)} = \left(\begin{array}{c} \delta^{1s} \\ \delta^{2s} \end{array} \right)$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι για $p/m << 1$ το spin δεν αλλάζει. Αυτό το περιμέναμε. Το ηλεκτρικό πεδίο δεν αλλάζει την προβολή του spin. Το μαγνητικό πεδίο το κάνει και αυτό εμφανίζεται σε μεγάλες ταχύτητες (ενέργειες). Επομένως, η Εξ.(15) δίνει

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow\uparrow) = \mathcal{M}(\downarrow\downarrow\rightarrow\downarrow\downarrow) = -e^2 4m^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u}\right)$$

$$\mathcal{M}(\uparrow\downarrow\rightarrow\uparrow\downarrow) = \mathcal{M}(\downarrow\uparrow\rightarrow\downarrow\uparrow) = -e^2 4m^2 \frac{1}{t}$$

$$\mathcal{M}(\uparrow\downarrow\rightarrow\downarrow\uparrow) = \mathcal{M}(\downarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\downarrow) = -e^2 4m^2 \frac{1}{u}$$

και

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(4m^2e^2)^2 2\left(\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u}\right)^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2}\right)$$

Στο Κ.Μ. έχουμε

$t = (p_1 - p_3)^2 = 2m^2 - 2p_1^\mu p_{3\mu} = 2m^2 - 2(E^2 - p^2\cos\theta) =$
$2(m^2 - E^2 + p^2\cos\theta) = -2p^2(1-\cos\theta) = -4p^2\sin^2\theta/2$ και

$u = -2p^2(1+\cos\theta) = -4p^2\cos^2\theta/2$, και η ενεργός διατομή

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\mathrm{KM}} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{s}\frac{p_f}{p_i}\left|\mathcal{M}\right|^2$$

$$= \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{s}\frac{1}{4}16m^4e^42\left[\left(\frac{1}{\sin^2\theta/2} - \frac{1}{\cos^2\theta/2}\right)^2\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin^4\theta/2} + \frac{1}{\cos^4\theta/2}\right]\frac{1}{16p^4}$$

$$= \frac{1}{128\pi^2}\frac{1}{s}m^4\left[\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2(4\pi)^2\right]\frac{2}{p^4}$$

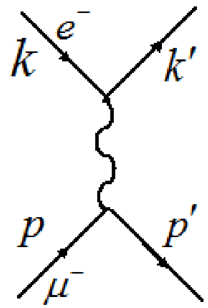
$$\left[\frac{1}{\sin^4\theta/2} + \frac{1}{\cos^4\theta/2} - \frac{1}{\sin^2\theta/2\cos^2\theta/2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{p^4}\frac{m^4}{s}\left[\frac{1}{\sin^4\theta/2} + \frac{1}{\cos^4\theta/2} - \frac{1}{\sin^2\theta/2\cos^2\theta/2}\right]$$

όπου $\alpha = e^2/(4\pi)$. Για $p/m << 1$, $s \simeq 4m^2$ οπότε $m^4/s = m^2/4$.

Σκέδαση $e^- \mu^- \to e^- \mu^-$

Ας πάμε πίσω στη σκέδαση $e^- \mu^- \to e^- \mu^-$ οπότε έχουμε μόνο ένα διάγραμμα. Το αναλλοίωτο πλάτος γράφεται



$$\mathcal{M} = -e^2 \left[\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)\right] \frac{1}{q^2} \left[\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)\right]$$

με $q = k - k'$. Γράφουμε

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{q^4} L_{(e)}^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{(\mu)}$$

με

$$L_{(e)}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\text{spin e}} \left[\bar{u}(k')\gamma^{\mu} u(k)\right] \left[\bar{u}(k')\gamma^{\nu} u(k)\right]^*$$

Να υπολογίσουμε την δεύτερη αγκύλη

$$\begin{aligned}
\left[\bar{u}(k')\gamma_{\mu} u(k)\right]^* &= \left[\bar{u}(k')\gamma_{\mu} u(k)\right]^{\dagger} = u^{\dagger}(k)\gamma^{\mu\dagger}\bar{u}^{\dagger}(k') = \\
&= u^{\dagger}(k)\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger} u(k') = u^{\dagger}(k)\gamma^{0}\gamma^{\mu} u(k') \\
&= \bar{u}(k)\gamma_{\mu} u(k')
\end{aligned}$$

Άρα

$$L^{\mu\nu}_{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \left[\bar{u}^{(s')}(k')_\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} u^{(s)}(k)_\beta \right] \left[\bar{u}^{(s)}(k)_\delta \gamma^\nu_{\delta\epsilon} u^{(s')}(k')_\epsilon \right]$$

όπου βέβαια υπονοείται άθροιση στα α, β, δ και ϵ. Αλλά

$$\sum_s u^{(s)}(k)_\beta \, \bar{u}^{(s)}(k)_\delta = (\not{k} + m)_{\beta\delta} \quad \text{και}$$

$$\sum_{s'} u^{(s')}(k')_\epsilon \, \bar{u}^{(s')}(k')_\alpha = (\not{k}' + m)_{\epsilon\alpha}$$

Οπότε, γράφουμε

$$L^{\mu\nu}_{(e)} = \frac{1}{2} (\not{k}' + m)_{\epsilon\alpha} \gamma^\mu_{\alpha\beta} (\not{k} + m)_{\beta\delta} \gamma^\nu_{\delta\epsilon} = \frac{1}{2} Tr \left[(\not{k}' + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\nu \right]$$