Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης

Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές

ΣΕΜΦΕ/ΕΜΠ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ

Νίκος Τράκας
Καθηγητής ΣΕΜΦΕ/ΕΜΠ

Σημειώσεις από τα βιβλία:

Quarks and leptons, F. Halzen and A.D. Martin

Gauge Theories in Particle Physics, I.J.R. Aitchison and A.J.G. Hay

Relativistic Quantum Mechanics, J.D. Bjorken and S.D. Drell

Introduction to Elementary Particles, D. Griffiths

Field Theory, A Modern Primer, P. Ramond

Σχετικιστική Κβαντομηχανική, Σ. Τραχανάς

ΑΝΤΙΣΩΜΑΤΙΔΙΑ

Οι περισσότερες αλληλεπιδράσεις, π.χ.

$$e^+e^- \to \mu^+\mu^-, \quad eq \to eq, \quad \gamma q \to e^+e^-q$$

αποτελούν συστήματα πολλών σωματιδίων και από τα πειράματα που έχουμε στη διάθεσή μας βρισκόμαστε στην περιοχή της σχετικιστικής κινηματικής. Επί πλέον εμφανίζονται και αντισωματίδια που δεν απαιτούνται στην μη σχετικιστική θεωρία.

Χρησιμοποιώντας τη θεωρία διαταραχών θα χρησιμοποιούμε τις κυματοσυναρτήσεις που περιγράφουν ελεύθερο σωματίδιο (IN και OUT καταστάσεις) και την αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων θα τη θεωρούμε ως διαταραχή σε περιορισμένο χώρο και χρόνο.

Χρησιμοποιούμε σχετικιστικό φορμαλισμό της θεωρίας διαταραχών. Σημαντικό ρόλο παίζουν τα “διαγράμματα Feynman”. Με τη χρήση των “κανόνων Feynman” μπορούμε να υπολογίσουμε φυσικές ποσότητες (ενεργές διατομές, ρυθμούς μετάβασης κ.λπ.) χωρίς να καταφεύγουμε κάθε φορά στη θεωρία πεδίου. Βέβαια, οι κανόνες αυτοί καθορίζονται από τον Λαγκρανζιανό φορμαλισμό και τη θεωρία πεδίου.

Αρχικά θα αγνοήσουμε το spin των σωματιδίων, που κάπως περιπλέκει την εικόνα, και θα ασχοληθούμε με ‘ηλεκτρόνια’ χωρίς spin.

Μη σχετικιστική Κβαντομηχανική

Με τις αντικαταστάσεις

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$$

η κλασική σχέση $E = \frac{p^2}{2m}$ γίνεται ($\hbar = 1$)

$$E = \frac{p^2}{2m} \to i\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\Psi = 0$$

όπου $\rho = |\Psi|^2$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας ($|\Psi|^2 d^3x$ δίνει την πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο στον όγκο d^3x). Αυτή είναι η εξίσωση Schrödinger για ελεύθερο σωματίδιο μάζας m.

Ανάλογα με την διατήρηση φορτίου στον ηλεκτρομαγνητισμό, η διατήρηση της πιθανότητας μας οδηγεί στην εξίσωση

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0 \quad \text{διαφορική μορφή}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dv + \oint_{S(V)} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{da} = 0 \quad \text{ολοκληρωτική μορφή}$$

όπου $\boldsymbol{j}$ είναι η πυκνότητα ρεύματος πιθανότητας. Ας βρούμε τη μορφή του. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Schrödinger με $-i\Psi^*$ και την συζυγή της με $i\Psi$ και αθροίζουμε

$$-i\Psi^* \left(i\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{2m} \boldsymbol{\nabla}^2 \Psi \right) + i\Psi \left(-i\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{1}{2m} \boldsymbol{\nabla}^2 \Psi^* \right) = 0$$

$$\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{i}{2m} \Psi^* \boldsymbol{\nabla}^2 \Psi + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{i}{2m} \Psi \boldsymbol{\nabla}^2 \Psi^* = 0$$

$$\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t} - \frac{i}{2m}\left(\Psi^* \boldsymbol{\nabla}^2 \Psi - \Psi \boldsymbol{\nabla}^2 \Psi^*\right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \underbrace{\left[-\frac{i}{2m}\left(\Psi^* \boldsymbol{\nabla} \Psi - \Psi \boldsymbol{\nabla} \Psi^*\right)\right]}_{\boldsymbol{j}} = 0$$

Η λύση της εξ. Schrödinger για το ελεύθερο σωματίδιο $\Psi = N \exp\left[i\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - Et\right)\right]$ δίνει $\rho = |N|^2$ και

$$\boldsymbol{j} = \frac{-i|N|^2}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla}(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\nabla}(-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})\right) = \frac{|N|^2}{2m} 2\boldsymbol{p} = \frac{|N|^2}{m}\boldsymbol{p}$$

Τετραδιανύσματα και αναλλοίωτα Lorentz

Άσκηση 1 Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Lorentz αντιστοιχεί με στροφή κατά γωνία $i\theta$ στον χώρο (ict, x)

Ό,τι μετασχηματίζεται όπως το $(ct, \mathbf{x})$ καλείται τετραδιάνυσμα. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$(ct, \mathbf{x}) = (ct, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x^\mu$$

Επίσης, το E/c και $\mathbf{p}$ συγκροτούν τετραδιάνυσμα

$$(E/c, \mathbf{p}) = (E/c, p^1, p^2, p^3) = (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv p^\mu$$

Ορίζουμε το βαθμωτό γινόμενο δύο τετραδιανυσμάτων $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ και $B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$

$$A \cdot B = A^0 B^0 - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$$

Ορίζοντας το $A_\mu = (A^0, -\boldsymbol{A})$ μπορούμε να γράψουμε το βαθμωτό γινόμενο ως (επαναλαμβανόμενος δείκτης άνω και κάτω αθροίζεται)

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 =$$

$$A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$$

Ορίζουμε τον (μετρικό) τανυστή $g_{\mu\nu}$

$$g_{00} = 1,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,\ \text{οι άλλοι όροι μηδενικοί}$$

Ο αντίστροφός του $g^{\mu\nu}$ (δηλαδή $g^{\mu\nu} g_{\nu\mu'} = \delta^\mu_{\mu'}$) εύκολα φαίνεται ότι έχει τους ίδιους όρους. Το γινόμενο των δύο τετραδιανυσμάτων μπορεί να γραφεί

$$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu$$

Με το $g_{\mu\nu}$ και το $g^{\mu\nu}$ μπορούμε να ανεβοκατεβάσουμε τους δείκτες ενός τετραδιανύσματος

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

Το διάνυσμα με άνω δείκτη ονομάζεται ανταλοίωτο (contravariant), ενώ με κάτω δείκτη συναλλοίωτο (covariant). Για να σχηματιστεί ένα αναλλοίωτο, ως προς μετασχηματισμούς Lorentz, μέγεθος θα πρέπει για κάθε άνω δείκτη να υπάρχει ο αντίστοιχος κάτω. Επίσης, μια σχέση είναι Lorentz συναλλοίωτη όταν οι μη επαναλαμβανόμενοι (άνω και κάτω) δείκτες στις δυο πλευρές της ισότητας αντιστοιχίζονται ένας προς έναν.

Άσκηση 2 Δείξτε ότι $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$

Παραδείγματα βαθμωτών γινομένων είναι

$$p^\mu x_\mu \equiv p \cdot x = Et - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}, \quad p^\mu p_\mu \equiv p \cdot p \equiv p^2 = E^2 - \boldsymbol{p}^2$$

Άσκηση 3 Δύο σωματίδια με ίση μάζα M συγκρούονται στο σύστημα Κέντρου Μάζας. Η συνολική ενέργεια είναι E_{cm}. Δείξτε ότι

$$s \equiv (p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)^\mu \equiv (p_1 + p_2)^2 = E_{cm}^2$$

Αν η σύγκρουση γίνει στο σύστημα εργαστηρίου όπου το ένα σωματίδιο είναι ακίνητο, τότε η ενέργεια E_{lab} του άλλου σωματιδίου δίνεται από τη σχέση (υπολογίστε το s στο σύστημα εργαστηρίου)

$$E_{lab} = \frac{E_{cm}^2}{2M} - M$$

Προσοχή στο τετραδιάνυσμα

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right) = \partial^\mu \text{ και } \left(\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right) = \partial_\mu$$

Μπορείτε να δείξετε ότι το πρώτο μετασχηματίζεται όπως το $(t, \boldsymbol{x})$ ενώ το δεύτερο όπως το $(t, -\boldsymbol{x})$.

Η αντικατάσταση της ενέργειας και της ορμής με τους αντίστοιχους τελεστές γενικεύεται

$$p^\mu \rightarrow i\partial^\mu$$

Τέλος, χρησιμοποείται ο συμβολισμός

$$\Box^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu$$