από δεξιά, και αθροίζουμε

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}\gamma^0(\not{p}-m)u=0 \\ \bar{u}\left(\not{p}-m\right)\gamma^0 u=0 \end{aligned}\right\} \bar{u}\left(\gamma^0\not{p}+\not{p}\gamma^0\right)u-2m\bar{u}\gamma^0 u=0$$

$$2p^0\bar{u}u-2mu^\dagger u=0\rightarrow \bar{u}u=\frac{m}{E}u^\dagger u=2m$$

μιας και $u^\dagger u=2E$. Όμοια δείχνεται και η δεύτερη σχέση για τα v.

Άσκηση 24 Δείξτε τις σχέσεις πληρότητας

$$\sum_{s=1,2}u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p)=\not{p}+m,\quad \sum_{s=1,2}v^{(s)}(p)\bar{v}^{(s)}(p)=\not{p}-m$$

Άσκηση 25 Δείξτε ότι $\not{p}\not{p}=p^2$

Άσκηση 26 Δείξτε ότι οι τελεστές

$$\Lambda_+ = \frac{\not{p} + m}{2m}, \quad \Lambda_- = \frac{-\not{p} + m}{2m}$$

προβάλλουν τις καταστάσεις θετικής και αρνητικής ενέργειας αντίστοιχα. Ελέγξτε ότι, ως προβολικοί τελεστές, υπακούουν στους κανόνες: $\Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm$ και $\Lambda_+ + \Lambda_- = 1$.

Διγραμμικές αναλλοίωτες ποσότητες

Είναι χρήσιμο να βρούμε όρους της μορφής $\bar{\psi}\Gamma\psi$, όπου Γ γινόμενο γ πινάκων, με καθορισμένους κανόνες μετασχηματισμού κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz ώστε να φτιάξουμε αναλλοίωτες ποσότητες. Ορίζουμε $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ και εύκολα βλέπουμε ότι

$$\gamma^{5\dagger} = -i\gamma^{3\dagger}\gamma^{2\dagger}\gamma^{1\dagger}\gamma^{0\dagger} = -i(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5$$

χρησιμοποιώντας την αντιμετάθεση των γ πινάκων. Επίσης αποδεικνύεται ότι $(\gamma^5)^2 = I$ και $\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$. Στην Dirac-Pauli αναπαράσταση, ο γ^5 γράφεται

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Όλες οι δυνατές (ανεξάρτητες) διγραμμικές ποσότητες είναι οι ακόλουθες (όπου $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$)

		Αρ. συνιστ.	Χωρ. αναστρ.
$\bar{\psi}\psi$	Βαθμωτό	1	$+$
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	Διάνυσμα	4	Χωρικές $-$
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	Τανυστής	6	
$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	‘Αξονικό’ διάνυσμα	4	Χωρικές $+$
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	Ψευδοβαθμωτό	1	$-$

Θα πρέπει να δούμε πώς μετασχηματίζεται το ψ κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz ώστε να παραμένει αναλλοίωτη η εξίσωση Dirac. Δηλαδή, η $\psi'(x')$ να υπακούει την εξίσωση

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m\right)\psi'(x') = 0$$

με $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$. Το ζητούμενο είναι να βρούμε το S τέτοιο ώστε $\psi'(x') = S\psi(x)$. Υπενθυμίζοντας ότι $\psi = e^{-ipx}u(p)$, περιμένουμε το S να είναι ανεξάρτητο από το x. Γνωρίζοντας ότι

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}$$

έχουμε

$$\left(i\gamma^{\mu} \Lambda^{\nu}{}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} - m \right) S^{-1} \psi'(x') = \left(S i\gamma^{\mu} \Lambda^{\nu}{}_{\mu} S^{-1} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} - m \right) \psi'(x') = 0$$

Άρα, η απαίτηση είναι

$$S\gamma^{\mu} \Lambda^{\nu}{}_{\mu} S^{-1} = \gamma^{\nu} \to \gamma^{\mu} \Lambda^{\nu}{}_{\mu} = S^{-1} \gamma^{\nu} S$$

Άσκηση 27 Δείξτε ότι για ένα απειροστό ορθό μετασχηματισμό Lorentz, $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu}$, η μορφή

$$S_L = 1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}$$

πληροί την αναγκαία σχέση. Δείξτε επίσης ότι

$$S_L^{-1} = \gamma^0 S_L^{\dagger}\gamma^0 \quad \text{και} \quad \gamma^5 S_L = S_L \gamma^5$$

Για χωρική αντιστροφή, όπου ο πίνακας $\Lambda^{\nu}{}_{\mu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, η βασική απαίτηση που θα πρέπει να πληροί ο S είναι $S_P^{-1}\gamma^0 S_P = \gamma^0$ και $S_P^{-1}\gamma^k S_P = -\gamma^k,\ k = 1,2,3.$ Αυτές οι σχέσεις πληρούνται με $S_P = \gamma^0$. Οπότε, στην Dirac-Pauli αναπαράσταση, όπου $\gamma^0 = \mathrm{diag}(1,1,-1,-1)$, οι τέσσερεις συνιστώσες του ψ μετασχηματίζονται, για χωρική στροφή, ως

$$\psi'_{1,2} = \psi_{1,2}, \quad \psi'_{3,4} = -\psi_{3,4}$$

Δηλαδή, στο σύστημα ηρεμίας, οι θετικής και οι αρνητικής ενέργειας καταστάσεις (δηλαδή το ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο) έχουν αντίθετη εσωτερική ομοτιμία.
Τώρα μπορούμε να ελέγξουμε τους μετασχηματισμούς των διγραμμικών ποσοτήτων. Ας δούμε πρώτα πώς μετασχηματίζεται το $\bar{\psi}$ στον μετασχηματισμό $\psi'(x') = S\psi(x)$

$$\bar{\psi}' = \psi'^{\dagger}\gamma^0 = (S\psi)^{\dagger}\gamma^0 = \psi^{\dagger}S^{\dagger}\gamma^0 = \psi^{\dagger}\gamma^0 S^{-1} = \bar{\psi}S^{-1}$$

Οπότε, σε μετασχηματισμό Lorentz,

$$\bar{\psi}'\gamma^{\mu}\psi' = \bar{\psi}S_L^{-1}\gamma^{\mu}S_L\psi = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi)$$

δηλαδή μετασχηματίζεται ως τετραδιάνυσμα. Για χωρική αντιστροφή

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \psi'^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi' = (S_P\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(S_P\psi) = (\gamma^0\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(\gamma^0\psi) =$$

$$= \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi = \begin{cases} +\bar{\psi}\gamma^0\psi, & \mu = 0 \\ -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, & \mu = 1,2,3 \end{cases}$$

Για το $\bar{\psi}\psi$ έχουμε

$$\bar{\psi}'\psi' = \psi^\dagger S^\dagger\gamma^0 S\psi = \psi^\dagger\gamma^0 S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi$$

για S_L και S_P.

Φερμιόνια με μηδενική μάζα. Το νετρίνο

Στην περίπτωση της μηδενικής μάζας, η εξίσωση του Dirac γίνεται

$$H\psi = \mathbf{a}\cdot\mathbf{p}\psi = E\psi$$

Άσκηση 25 Δείξτε ότι $\not p \not p = p^2$ (Π)

Λύση

$$\not p \not p = p^\mu \gamma_\mu p^\lambda \gamma_\lambda = \gamma_\mu \gamma_\lambda p^\mu p^\lambda$$

Αλλάζοντας τα ονόματα στους 'τυφλούς' δείκτες έχουμε

$$\not p \not p = \gamma_\lambda \gamma_\mu p^\lambda p^\mu$$

Αθροίζοντας κατά μέλη

$$2\not p \not p = [\gamma_\mu, \gamma_\lambda]_+ p^\lambda p^\mu = 2 g_{\mu\lambda} p^\lambda p^\mu = 2p^2$$

Άσκηση 27 Δείξτε ότι για ένα απειροστό ορθό μετασχηματισμό Lorentz, $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu}$, η μορφή

$$S_L = 1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}$$

πληροί την αναγκαία σχέση: $S_L^{-1}\gamma^{\sigma}S_L = \gamma^{\tau}\Lambda^{\sigma}{}_{\tau}$. Δείξτε επίσης ότι

$$S_L^{-1} = \gamma^0 S_L^{\dagger}\gamma^0 \quad \text{και} \quad \gamma^5 S_L = S_L\gamma^5$$

(Π)

Λύση

Πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$S_L^{-1}\gamma^{\sigma}S_L = \gamma^{\tau}\Lambda^{\sigma}{}_{\tau}$$

Ξεκινάμε με το αριστερό σκέλος. Για απειροστό μετασχηματισμό

$$S_L = 1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu} \rightarrow S_L^{-1} = 1 + \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} S_L^{-1}\gamma^\sigma S_L &= \left(1 + \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}\right)\gamma^\sigma\left(1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}\right) \\ &= \gamma^\sigma + \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\left(\sigma_{\mu\nu}\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\sigma_{\mu\nu}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Ας συγκεντρωθούμε στην παρένθεση της τελευταίας σχέσης. Εισάγοντας τον ορισμό του $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$, παίρνουμε

$$\frac{i}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\sigma - \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma^\sigma\gamma_\nu\gamma_\mu\right) =$$

$$\frac{i}{2}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\sigma - \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\sigma - 2g^\sigma_\mu\gamma_\nu + 2g^\sigma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\sigma \right.$$
$$\left. +2g^\sigma_\nu\gamma_\mu - 2g^\sigma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\sigma\right) =$$
$$-2i\left(g^\sigma_\mu\gamma_\nu - g^\sigma_\nu\gamma_\mu\right)$$

Οπότε, η αρχική σχέση γίνεται

$$\begin{aligned}
S_L^{-1}\gamma^\sigma S_L &= \gamma^\sigma + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}\left(g^\sigma_\mu\gamma_\nu - g^\sigma_\nu\gamma_\mu\right) \\
&= \gamma^\sigma + \frac{1}{2}\left(\epsilon^{\sigma\nu}\gamma_\nu - \epsilon^{\mu\sigma}\gamma_\mu\right) \qquad \left(\epsilon^{\sigma\mu} = -\epsilon^{\mu\sigma}\right) \\
&= \gamma^\sigma + \frac{1}{2}\left(\epsilon^{\sigma\nu}\gamma_\nu + \epsilon^{\sigma\mu}\gamma_\mu\right) \\
&= \gamma^\sigma + \epsilon^{\sigma\nu}\gamma_\nu = \gamma^\sigma + \epsilon^\sigma{}_\tau g^{\nu\tau}\gamma_\nu = \gamma^\sigma + \epsilon^\sigma{}_\tau\gamma^\tau
\end{aligned}$$

Αλλά το δεξί μέλος της αρχικής προς απόδειξη σχέσης γράφεται

$$\gamma^\tau \Lambda^\sigma{}_\tau = \gamma^\tau \left(\delta^\sigma_\tau + \epsilon^\sigma{}_\tau\right) = \gamma^\sigma + \epsilon^\sigma{}_\tau \gamma^\tau$$

Οπότε, αποδείξαμε την αρχική σχέση

$$S_L^{-1} \gamma^\sigma S_L = \gamma^\tau \Lambda^\sigma{}_\tau$$

Για την σχέση $S_L^{-1} = \gamma^0 S_L^\dagger \gamma^0$, προσέξτε ότι

$$\gamma^0 \sigma^\dagger_{\mu\nu} \gamma^0 = -\frac{i}{2} \gamma^0 \left(\gamma^\dagger_\nu \gamma^\dagger_\mu - \gamma^\dagger_\mu \gamma^\dagger_\nu\right) \gamma^0 = -\frac{i}{2} \left(\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu\right) = \sigma_{\mu\nu}$$

λόγω της ταυτότητας $\gamma^0 \gamma^\dagger_\mu = \gamma_\mu \gamma^0$. Οπότε, εύκολα φαίνεται ότι

$$\gamma^0 S_L^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \left(1 - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu}\right)^\dagger \gamma^0 = 1 + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu} = S_L^{-1}$$

Η τελευταία σχέση, $\gamma^5 S_L = S_L \gamma^5$ αποδεικνύεται εύκολα μιας και ο

γ_5 αντιμετατίθεται με τους υπόλοιπους γ πίνακες, οπότε

$$\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} \gamma_5$$