που αντιστοιχεί στην κορυφή Fermi

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}_{(\mu)}\gamma_\mu\left(1-\gamma_5\right)u_{(\nu_\mu)}\right]g^{\mu\nu}\left[\bar{u}_{(\nu_e)}\gamma_\nu\left(1-\gamma_5\right)u_{(e)}\right]$$

Οπότε, για $q^2 << M_W^2$,

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}=\frac{g^2}{8M_W^2}$$

και αυτό αποτελεί τον ορισμό του G_F.

Γράφοντας το

$$\bar{u}_1\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}u_2=\bar{u}_1\frac{1+\gamma_5}{2}\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}u_2=\bar{u}_1P_R\gamma^\mu P_Lu_2=\overline{(u_{1_L})}\gamma^\mu u_{2_L}$$

σημαίνει ότι μόνο το αριστερόστροφο (L) τμήμα της κυματοσυνάρτησης παίζει ρόλο στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις.

Θυμόμαστε ότι στην ΚΗΔ έχουμε

$$\bar{u}\gamma^\mu u = \overline{u_L}\gamma^\mu u_R + \overline{u_R}\gamma^\mu u_L$$

Τι γίνεται για τα δεξιόστροφα τμήματα;

Ας δούμε τι συμβαίνει στην απαίτηση η Λαγκραντζιανή να παραμένει αναλλοίωτη όταν η κυματοσυνάρτηση ψ μετασχηματίζεται κάτω από δύο μετασχηματισμούς

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha(x)Q}\psi, \quad \text{και} \quad \psi \rightarrow e^{-i\beta(x)Y}\psi$$

Τότε, θα πρέπει να εισαγάγουμε την συναλλοίωτη παράγωγο ως

$$D^\mu = \partial^\mu - ig_1 Q A^\mu - ig_2 Y B^\mu$$

όπου τα πεδία βαθμίδας μετασχηματίζονται ως

$$A^\mu \to A^\mu - \frac{1}{g_1 Q}\partial^\mu \alpha(x)$$
$$B^\mu \to B_\mu - \frac{1}{g_2 Y}\partial^\mu \beta(x)$$

Ουδέτερα ρεύματα

Η διάσπαση $n \to p + e^- + \nu_e$, στο επίπεδο των κουάρκ αντιστοιχεί στην $d \to u + W^-$ και με τη σειρά του το $W^- \to e^- + \nu_e$. Οπότε, η αλληλεπίδραση του ασθενούς ρεύματος των κουάρκ με το W^- γράφεται

$$(\overline{u_L}\gamma^\mu d_L)\, W_\mu^- = \left(\bar{u}\,\bar{d}\right)_L \gamma^\mu \tau^+ \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L W_\mu^-$$

όπου

$$\tau^{+} = \frac{1}{2}\left(\tau_1 + i\tau_2\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Και βέβαια, για την διαδικασία $u \to d + W^{+}$ θα έχουμε αντίστοιχα

$$\left(\overline{d_L}\gamma^{\mu}u_L\right) W^{+}_{\mu} = \left(\bar{u}\,\bar{d}\right)_L \gamma^{\mu}\tau^{-}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L W^{+}_{\mu}$$

με

$$\tau^{-} = \frac{1}{2}\left(\tau_1 - i\tau_2\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Περιμένουμε (;) λοιπόν και την παρουσία του τ_3

$$(\bar{u}\,\bar{d})_L\,\gamma^\mu \tau_3 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = (\overline{u_L}\gamma^\mu u_L - \overline{d_L}\gamma^\mu d_L)$$

όπου βέβαια το αντίστοιχο $W_\mu^{(3)}$ πρέπει να είναι ηλεκτρικά ουδέτερο.

Το Καθιερωμένο Πρότυπο

Δουλεύοντας σε μια γενιά μόνο (u, d, e, ν_e), θα έχουμε

$$u_L, \quad u_R, \quad d_L, \quad d_R, \quad e_L, \quad e_R, \quad \nu_{e_L}$$

Οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις μας οδηγούν σε αριστερόστρεφες διπλέτες και δεξιόστροφες "μονάδες" (singlets)

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L , \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L , \quad u_R, \quad d_R, \quad e_R$$

Τα αριστερόστροφα "βλέπουν" μια συμμετρία $SU(2)$ και μια $U(1)$ ενώ τα δεξιόστροφα "βλέπουν" μόνο την $U(1)$. Δηλαδή, ο αντίστοιχος μετασχηματισμός είναι

$$\Psi_L^{(i)} \to \exp\left(-i\boldsymbol{\alpha}(x)\cdot\boldsymbol{\tau}/2 - i\beta(x)Y_L^{(i)}/2\right)\Psi_L^{(i)}$$
$$\Psi_R^{(i)} \to \exp\left(-i\beta(x)Y_R^{(i)}/2\right)\Psi_R^{(i)}$$

οπότε, οι αντίστοιχες συναλλοίωτες παράγωγοι θα είναι

$$D^\mu_{(L)} = \partial^\mu + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\mathbf{W}^\mu + ig'\frac{Y}{2}B^\mu, \quad \text{για τα } L \text{ πεδία}$$

$$D^\mu_{(R)} = \partial^\mu + ig'\frac{Y}{2}B^\mu, \qquad \text{για τα } R \text{ πεδία}$$

και η Λαγκραντζιανή θα γράφεται

$$\mathcal{L} = (\bar{u}\,\bar{d})_L\, i\gamma^\mu D^{(L)}_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + (\bar{\nu}_e\,\bar{e})_L\, i\gamma^\mu D^{(L)}_\mu \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L +$$
$$+\overline{u_R} i\gamma^\mu D^{(R)}_\mu u_R + \overline{d_R} i\gamma^\mu D^{(R)}_\mu d_R + \overline{e_R} i\gamma^\mu D^{(R)}_\mu e_R -$$
$$-\frac{1}{4}\boldsymbol{W}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

Για να δούμε πώς παρουσιάζεται το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα, π.χ.

$\bar{e}\gamma^\mu e$. Ας πάρουμε το ρεύμα της $SU(2)$ που αντιστοιχεί στο τ_3

$$j_\mu^{(3)} = (\bar{\nu}_e \, \bar{e})_L \, \gamma_\mu \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{1}{2} \overline{\nu_{e_L}} \gamma_\mu \nu_{e_L} - \frac{1}{2} \overline{e_L} \gamma_\mu e_L$$

Για την ίδια διπλέτα, το ρεύμα που αντιστοιχεί στην $U(1)$ θα είναι

$$j_\mu^{(Y_L)} = (\bar{\nu}_e \, \bar{e})_L \, \gamma_\mu \frac{1}{2} Y_L \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{1}{2} Y_L \overline{\nu_{e_L}} \gamma_\mu \nu_{e_L} + \frac{1}{2} Y_L \overline{e_L} \gamma_\mu e_L$$

Αν, λοιπόν, επιλεχθεί για την λεπτονική διπλέτα $Y_L = -1$, θα πάρουμε

$$j_\mu^{(3)} + j_\mu^{(Y_L)} = -\overline{e_L} \gamma_\mu e_L$$

Το ρεύμα για το δεξιόστροφο e_R είναι, βέβαια, μόνο από την $U(1)$

$$j_\mu^{(Y_R)} = \overline{e_R}\gamma_\mu \frac{1}{2} Y'_R e_R$$

Επιλέγουμε $Y'_R = -2$, οπότε

$$j_\mu^{(3)} + j_\mu^{(Y_L)} + j_\mu^{(Y_R)} = -\overline{e_L}\gamma_\mu e_L - \overline{e_R}\gamma_\mu e_R = -\bar{e}\gamma_\mu e$$

που είναι το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα. Δηλαδή, το φορτίο κάθε ψ θα δίνεται από τη σχέση

$$Q = t_3 + \frac{Y}{2}$$

όπου

$$t_3 = \begin{cases} \pm\frac{1}{2} & \text{για τις πάνω και κάτω συνιστώσες της } L \text{ διπλέτας} \\ 0 & \text{για τις } R \end{cases}$$

Αυτό αναμενόταν, μιας και κάθε κατάσταση έχει καθορισμένο φορτίο. Οπότε, ο τελεστής του φορτίου θα πρέπει να είναι διαγώνιος πίνακας, άρα γραμμικός συνδυασμός του t_3 και του Y. Ας επαληθεύσουμε ότι ο συνδυασμός $Q = t_3 + \frac{Y}{2}$ δίνει το σωστό φορτίο σε κάθε σωματίδιο.

$$\begin{aligned}
\text{για το } \nu_{e_L} : \qquad & +\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} = 0 \\
\text{για το } e_L : \qquad & -\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} = -1 \\
\text{για το } e_R : \qquad & 0 + \frac{-2}{2} = -1
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, βρίσκουμε την τιμή του Y για την διπλέτα των κουάρκ και των δεξιόστροφων πεδίων

$$Y = \frac{1}{3}, \text{ για το } \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad Y = \frac{4}{3}, \text{ για το } u_R, \quad Y = -\frac{2}{3}, \text{ για το } u_R$$

Εφ′ όσον το φορτίο είναι γραμμικός συνδυασμός του t_3 και του Y, το φωτόνιο θα είναι γραμμικός συνδυασμός του W_3^μ και του B^μ

$$W_3^\mu = \sin\theta_W A^\mu + \cos\theta_W Z^\mu$$
$$B^\mu = \cos\theta_W A^\mu - \sin\theta_W Z^\mu$$

όπου θ_W η γωνία Weinberg που μας πηγαίνει από το ζευγάρι (W_3^μ, B^μ) στο (A^μ, Z^μ). Τώρα, οι όροι αλληλεπίδρασης των ρευμάτων $j_\mu^{(3)}$ και $j_\mu^{(Y)}$ γίνονται

$$
\begin{aligned}
& -igj_\mu^{(3)}W_3^\mu - ig'\frac{1}{2}j_\mu^{(Y)}B^\mu = \\
& = -i\left[g\sin\theta_W j_\mu^{(3)} + g'\frac{1}{2}\cos\theta_W j_\mu^{(Y)}\right]A^\mu - \\
& \qquad\qquad - i\left[g\cos\theta_W j_\mu^{(3)} - g'\frac{1}{2}\sin\theta_W j_\mu^{(Y)}\right]Z^\mu = \\
& = -ig\sin\theta_W\left[j_\mu^{(3)} + \frac{g'}{g}\frac{1}{\tan\theta_W}\frac{1}{2}j_\mu^{(Y)}\right]A^\mu - \\
& \qquad\qquad - i\frac{g}{\cos\theta_W}\left[\cos^2\theta_W j_\mu^{(3)} - \frac{1}{2}\frac{g'}{g}\sin\theta_W\cos\theta_W j_\mu^{(Y)}\right]Z^\mu
\end{aligned}
$$

Αν $\frac{g'}{g} = \tan\theta_W$, τοτε, ο πρώτος όρος γίνεται

$$- ig\sin\theta_W \left[j_\mu^{(3)} + \frac{g'}{g}\frac{1}{\tan\theta_W}\frac{1}{2} j_\mu^{(Y)} \right] A^\mu =$$

$$- ig\sin\theta_W \left[j_\mu^{(3)} + \frac{1}{2} j_\mu^{(Y)} \right] A^\mu \equiv -iej_\mu^{(em)} A^\mu$$

όπου

$$e = g\sin\theta_W, \quad \text{και} \quad j_\mu^{(em)} = j_\mu^{(3)} + \frac{1}{2} j_\mu^{(Y)}$$

Ο δεύτερος όρος, ανάλογος του Z^μ, γίνεται

$$- i\frac{g}{\cos\theta_W} \left[\cos^2\theta_W j_\mu^{(3)} - \frac{1}{2}\frac{g'}{g}\sin\theta_W \cos\theta_W j_\mu^{(Y)} \right] Z^\mu =$$

$$= -i\frac{g}{\cos\theta_W} \left[\cos^2\theta_W j_\mu^{(3)} - \sin^2\theta_W \frac{1}{2} j_\mu^{(Y)} \right] Z^\mu =$$

$$= -i\frac{g}{\cos\theta_W}\left[\cos^2\theta_W j_\mu^{(3)} - \sin^2\theta_W\left(j_\mu^{(em)} - j_\mu^{(3)}\right)\right]Z^\mu =$$
$$= -i\frac{g}{\cos\theta_W}\left[j_\mu^{(3)} - \sin^2\theta_W j_\mu^{(em)}\right]Z^\mu =$$

Ο μηχανισμός Higgs

Θα πρέπει τώρα να εφαρμόσουμε τον μηχανισμό Higgs ώστε τα $W^\pm$ και Z να αποκτήσουν μάζα, ενώ το φωτόνιο να παραμείνει άμαζο. Εισάγουμε μια διπλέτα ϕ με $Y = 1$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

Βέβαια, θα προσθέσουμε στη Λαγκραντζιανή τους κατάλληλους όρους, κινητικό και δυναμικού, για το ϕ

$$\mathcal{L}_\phi = \left[\left(\partial_\mu + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot \boldsymbol{W}_\mu + ig'\frac{1}{2}B^\mu\right)\phi\right]^2 - \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$$

με $\mu^2 < 0$ και $\lambda > 0$. Επιλέγουμε για

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

με $v^2 = -\mu^2/\lambda$. Γιατί αυτή η επιλογή: μια διπλέτα μιγαδικών πεδίων με $Y = 1$ και τη συγκεκριμένη επιλογή του κενού, είναι η κατάλληλη για την περίπτωσή μας; Κάθε τιμή του ϕ_0 που παραβιάζει μια συμμετρία θα δημιουργήσει όρο μάζας για το αντίστοιχο μποζόνιο βαθμίδας. Αλλά, αν το ϕ_0 παραμένει αναλλοίωτο από κάποια υποομάδα των μετασχηματισμών βαθμίδας, το μποζόνιο βαθμίδας που αντιστοιχεί σ΄ αυτήν την υποομάδα θα παραμείνει άμαζο. Η επιλογή του $\phi_0 = v$ παραβιάζει την $SU(2)$ και την $U(1)$. Αλλά, το ηλεκτρικό φορτίο του ϕ_0 είναι $Q = t_3 + Y/2 = -1/2 + 1/2 = 0$, δηλαδή

$$Q\phi_0 = 0$$

και βέβαια

$$\phi_0 \to e^{i\alpha(x)Q}\phi_0 = \phi_0$$

Δηλαδή, το κενό παραμένει αναλλοίωτο στο μετασχηματισμό $U(1)_{em}$ και το φωτόνιο παραμένει άμαζο. Από τους τέσσερεις γενήτορες του $SU(2) \times U(1)$, $\boldsymbol{\tau}/2$ και Y, μόνο ο συνδυασμός Q υπακούει την σχέση $Q\phi_0 = 0$. Οι άλλοι τρεις παραβιάζουντην συμμετρία και δημιουργούν όρους μάζας. Με άλλα λόγια, λόγω της διατήρησης του φορτίου, μόνο αφόρτιστα βαθμωτά πεδία μπορούν να αποκτήσουν αναμενόμενη τιμή στο μηδέν διάφορη του μηδενός.

Οι μάζες των μποζονίων βαθμίδας

Οι μάζες θα προέλθουν από τον κινητικό ορο της Λαγκραντζιανής του ϕ, επιλέγοντας την αναμενόμενη τιμή του κενού ϕ_0

$$\left|\left(ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{W_\mu}+i\frac{g'}{2}B_\mu\right)\phi\right|^2=$$

$$=\frac{1}{8}\left|\begin{pmatrix} gW_\mu^{(3)}+g'B_\mu & g(W_\mu^{(1)}-iW_\mu^{(2)}) \\ g(W_\mu^{(1)}+iW_\mu^{(2)}) & -gW_\mu^{(3)}+g'B_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}\right|^2=$$

$$=\frac{v^2g^2}{8}\left[(W_\mu^{(1)})^2+(W_\mu^{(2)})^2\right]+\frac{v^2}{8}\left(g'B_\mu-gW_\mu^{(3)}\right)\left(g'B^\mu-gW^{\mu(3)}\right)=$$

$$
= \left(\frac{vg}{2}\right)^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{v^2}{8} \left(W_\mu^{(3)}\, B_\mu\right) \left(\begin{array}{cc} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} W^{(3)\mu} \\ B^\mu \end{array} \right)
$$

όπου $W^\pm = (W^{(1)} \mp iW^{(2)})/\sqrt{2}$. Βλέπουμε άμεσα από τον πρώτο όρο ότι η μάζα των $W^\pm$

$$
M_W = \frac{1}{2} vg
$$

Ο δεύτερος όρος θα πρέπει να διαγωνοποιειθεί. Τα ιδιοδιανύσματα και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι

$$
\left(\begin{array}{c} 1 \\ \frac{g^2}{gg'} \end{array} \right) \quad \text{με ιδιοτιμή } 0, \qquad \left(\begin{array}{c} 1 \\ \frac{-g'^2}{gg'} \end{array} \right) \quad \text{με ιδιοτιμή } g^2 + g'^2
$$

Επομένως, ο γραμμικός συνδυασμός των $W^{(3)}$ και B που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές είναι

$$\frac{1}{\sqrt{g'^2+g^2}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{g^2}{gg'} \\ 1 & \frac{-g'^2}{gg'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^{(3)} \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g'^2+g^2}}\begin{pmatrix} g'W^{(3)}+gB \\ gW^{(3)}-g'B \end{pmatrix}$$

Έτσι

$$A_\mu \equiv \frac{g'W_\mu^{(3)}+gB_\mu}{\sqrt{g'^2+g^2}} \quad \text{με } m_A = 0$$

$$Z_\mu \equiv \frac{gW_\mu^{(3)}-g'B_\mu}{\sqrt{g'^2+g^2}} \quad \text{με } m_Z^2 = \frac{v^2}{4}(g^2+g'^2)$$

Επειδή $g'/g = \tan\theta_W$, οπότε

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g'^2 + g^2}}, \qquad \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g'^2 + g^2}}$$

μπορούμε να γράψουμε

$$A_\mu = \sin\theta_W W_\mu^{(3)} + \cos\theta_W B_\mu$$
$$Z_\mu = \cos\theta_W W_\mu^{(3)} - \sin\theta_W B_\mu$$

όπως ακριβώς και στα ρεύματα.

Το ότι το φωτόνιο παραμένει άμαζο, είναι δική μας κατασκευή! Ο λόγος των μαζών του W και

$$\frac{M_W}{M_Z} = \frac{vg/2}{v\sqrt{g^2 + g'^2}/2} = \cos\theta_W$$

είναι πρόβλεψη που αξαρτάται από το ότι το H είναι διπλέτα. Δηλαδή, στο πρότυπό μας η παράμετρος ρ είναι

$$\rho \equiv \frac{M_W^2}{m_Z^2 \cos^2\theta_W} = 1$$

Από τις σχέσεις

$$\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}, \qquad M_W^2 = \frac{1}{4}g^2v^2$$

και με γνωστή την τιμή του G_F, παίρνουμε

$$v = 246 \text{ GeV}$$

Οπότε

$$M_W = \frac{1}{2}gv = \frac{1}{2}\frac{e}{\sin\theta_W} \sim \frac{37.3 \text{ GeV}}{\sin\theta_W}$$

$$M_Z \sim \frac{74.6 \text{ GeV}}{\sin 2\theta_W}$$

Το 1982 παρατηρήθηκαν W και Z σε αντιδράσεις $p\bar{p} \to ZX \to (e^+e^-)X$ και $p\bar{p} \to W^\pm X \to (e^\pm \nu)X$, με $M_W \sim 81$ GeV και $M_Z \sim 93$ GeV.

Μάζες φερμιονίων

Ο όρος μάζας για τα φερμιόνια είναι $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$. Τώρα όμως τα αριστερόστροφα πεδία είναι ανήκουν σε διπλέτα της $SU(2)$, αντίθετα με τα δεξιόστροφα που βλέπουν μόνο την $U(1)$. Επομένως, ο όρος της μάζας δεν παραμένει αναλλοίωτος σε