δηλαδή η πυκνότητα πιθανότητας στον Dirac είναι θετική (στην εξίσωση Klein-Gordon ήταν ανάλογη της ενέργειας).
Χρησιμοποιώντας την Pauli-Weiskopf περιγραφή, το j^μ γίνεται πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Το γ^μ είναι τετραδιάνυσμα με την έννοια ότι το j^μ είναι τετραδιάνυσμα.

Spinor ελεύθερου σωματιδίου

Άσκηση 17 Δείξτε ότι κάθε συνιστώσα του ψ υπακούει την εξίσωση Klein-Gordon.

Ψάχνουμε για λύσεις ελεύθερων σωματιδίων (ιδιοσυναρτήσεις της ορμής) της μορφής

$$\psi = u(p)e^{-ip^\mu x_\mu}$$

με $u(p)$ ένας spinor με 4 συνιστώσες. Χρησιμοποιώντας την μορφή αυτή στην εξίσωση Dirac (το $u(p)$ δεν εξαρτάται από το x^μ).

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \rightarrow i\gamma^\mu u(p)(-ip_\mu)e^{-ip^\mu x_\mu} - mu(p)e^{-ip^\mu x_\mu} = 0$$

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0 \rightarrow (\not{p} - m)u(p) = 0$$

χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $\gamma^\mu u_\mu = \not{u}$, με u_μ τετραδιάνυσμα. Μιας και ψάχνουμε για ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας πάμε στην αρχική εξίσωση

$$Hu = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m)u = Eu$$

Βρίσκουμε πρώτα τις λύσεις για $\mathbf{p} = 0$. Οπότε

$$Hu = m\beta u = \begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{pmatrix} u$$

με ιδιοτιμές $E = m, m, -m, -m$ και ιδιοδιανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Οι δύο πρώτες λύσεις, με $E > 0$, περιγράφουν ηλεκτρόνιο ενώ οι δύο άλλες, με $E < 0$ το ποζιτρόνιο. Για $\mathbf{p} \neq 0$ έχουμε

$$Hu = \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

όπου χωρίσαμε το u σε 2 spinor με 2 συνιστώσες το καθένα. Οπότε

$$\left. \begin{array}{r} m u_A + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_B = E u_A \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_A - m u_B = E u_B \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_B = (E - m) u_A \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_A = (E + m) u_B \end{array}$$

Για $E > 0$ επιλέγουμε τη μορφή του u_A, για παράδειγμα

$$u_A = \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \acute{\eta} \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ή γραμμικό συνδυασμό τους) και το u_B το παίρνουμε από την δεύτερη εξίσωση

$$u_B = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi^{(s)}, \quad s = 1,2$$

Επομένως, για $E > 0$, έχουμε (με N σταθερά νορμαλισμού)

$$u^{(s)} = N \left(\begin{array}{c} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi^{(s)} \end{array} \right), \quad s = 1,2$$

Αντίστοιχα, για $E < 0$, επιλέγουμε $u_B = \chi^{(s)}$ και τότε παίρνοντας το u_A από την πρώτη εξίσωση

$$u^{(s+2)} = N \left(\begin{array}{c} \frac{-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|E|+m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{array} \right), \quad s = 1,2$$

Άσκηση 18 Δείξτε ότι οι 4 λύσεις της εξίσωσης Dirac είναι ορθογώνιες

$$u^{(r)\dagger}u^{(s)} = 0, \quad r \neq s$$

Ας αποδείξουμε μια πολύ χρήσιμη σχέση: $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = p^2 I$

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2 = \sum_{i,j}(\sigma_i p_i)(\sigma_j p_j) = \sum_i \sigma_i^2 p_i^2 + \sum_{i,j(i\neq j)} (\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i)p_i p_j = p^2$$

μιας και το τετράγωνο $\sigma_i^2 = 1$ για κάθε πίνακα και επίσης $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0$ για $i \neq j$.
Η σχέση μπορεί να αποδειχθεί επίσης με άμεση αντικτάσταση της μορφής των πινάκων του Pauli.

A la Aitchison and Hey Λύσεις της εξίσωσης Dirac

Από την αρχική μορφή της Dirac

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-i\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta m)\psi$$

και γράφοντας $\psi = \omega\, e^{-ip^\mu x_\mu}$ όπου $\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ έχουμε

$$\begin{aligned} E\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} &= (-i\mathbf{a}\cdot(i)\mathbf{p} + \beta m)\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{p} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

Οπότε, παίρνουμε

$$E\phi = m\phi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi$$
$$E\chi = -m\chi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\phi$$

Η δεύτερη εξίσωση δίνει $\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi$.

Επομένως, $\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi \end{pmatrix}$ χωρίς νορμαλισμό. Χρησιμοποιώντας την μορφή του χ στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$$E\phi = m\phi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi$$

$$E = m + \frac{p^2}{E+m} \rightarrow (E-m)(E+m) = p^2$$

$$E^2 = p^2 + m^2 \rightarrow E = \pm\sqrt{p^2+m^2}$$

Ποια είναι η φυσική σημασία του ω με τις δύο συνιστώσες; Στη σχέση που δίνει το ω, το ϕ είναι αυθαίρετο. Μπορεί να πάρει τις τιμές $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα

ιδιοδιανύσματα του τελεστή $S_z = \frac{1}{2}\sigma_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ με ιδιοτιμές $\pm\frac{1}{2}$. Βέβαια, η πιο γενική μορφή του ϕ είναι $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ με a, b μιγαδικοί αριθμοί. Έχουμε λοιπόν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, όπως ακριβώς ένα σύστημα με $j = 1/2$ ($2j + 1$ καταστάσεις).

Στο σύστημα ηρεμίας ($\mathbf{p}$=0), η ερμηνεία είναι άμεση. Το $\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} = 0$, άρα και $\chi = 0$, και οι δύο λύσεις γίνονται

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}$$

Και οι δύο λύσεις έχουν ίδια ενέργεια. Άρα υπάρχει κάποιος τελεστής που μετατίθεται με τον αντίστοιχο της ενέργειας (την χαμιλτονιανή) και ξεχωρίζει τις δύο καταστάσεις. Αυτός είναι ο

$$\Sigma_z = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad \text{όπου} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

που βέβαια μετατίθεται με την χαμιλτονιανή που στην περίπτωσή μας ($\mathbf{p} = 0$) είναι απλά βm (είναι και οι δύο διαγώνιοι). Οι δύο καταστάσεις έχουν ιδιοτιμές ± 1.

Γενικεύοντας $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ με την ιδιότητα $\left[\frac{1}{2}\Sigma_x, \frac{1}{2}\Sigma_y\right] = i\frac{1}{2}\Sigma_z$ και $\left(\frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}\right)^2 = \frac{3}{4}I$. Αυτές ακριβώς είναι οι ιδιότητες ενός κβαντομηχανικού τελεστή στροφορμής με $j = 1/2$. Επομένως, ο

$\frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}$ μπορεί να ερμηνευθεί ως ο spin 1/2 κατάλληλος τελεστής για το σύστημα ηρεμίας. Ακριβώς, για το σύστημα ηρεμίας η εξίσωση Dirac περιγράφει ένα σωματίδιο με spin 1/2.

Περιμένουμε να μην αλλάζει το spin αν πάμε σε σύστημα με $\mathbf{p} \neq 0$. Αλλά τότε, ο τελεστής $\frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}$ δεν είναι πια κατάλληλος γιατί δεν μετατίθεται με τον αντίστοιχο της ενέργειας, που τώρα είναι $\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \beta m$. Βέβαια συνεχίζουμε να έχουμε 2 ανεξάρτητες καταστάσεις. Οπότε θα πρέπει να υπάρχει τελεστής που μετατίθεται με την χαμιλτονιανή. Η επιλογή δεν είναι μοναδική αλλά μια χρήσιμη είναι ο τελεστής της ελικότητας

$$\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$$

που πράγματι μετατίθεται με την $\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}+\beta m$.

Άσκηση 19 Δείξτε ότι ο $\mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ μετατίθεται με την χαμιλτονιανή $H=\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}+\beta m$, $[H,\mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}]=0$.

Οι ιδιοτιμές του $\mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ είναι ± 1 (δύο φορές). Ο $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ έχει ιδιοτιμές ± 1 και αν $U^T A U = A_{diag}$ τότε και

$$\begin{pmatrix} U^T & 0 \\ 0 & U^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{diag} & 0 \\ 0 & A_{diag} \end{pmatrix}$$

Επομένως, ψάχνουμε να βρούμε την μορφή του ϕ τέτοια ώστε

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi \end{pmatrix}$$

ή $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}\phi = \pm\phi$. Ας ονομάσουμε $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}\phi_+ = \phi_+$ και $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}\phi_- = -\phi_-$. Ας βρούμε τα ϕ_+ και ϕ_-. Παρατηρούμε ότι το $(1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}})\phi$ είναι ιδιοσυνάρτηση του $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}}$, με ιδιοτιμή $+1$ για αυθαίρετο ϕ

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}}(1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}})\phi = (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}}+1)\phi$$

Όμοια, το $(1-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}})\phi$ είναι ιδιοσυνάρτηση του $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{u}}$, με ιδιοτιμή -1. Επομένως, το τυχαίο $\hat{\mathbf{p}} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ και αν επιλέξουμε το αυθαίρετο $\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ έχουμε

$$\phi_+ = (1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta\cos\varphi - i\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\phi_+ = \begin{pmatrix} 1+\cos\theta \\ \sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Βέβαια χρειάζεται να νορμαλίσουμε το ϕ_+. Εύκολα υπολογίζεται ότι η σταθερά νομαλισμού είναι $N = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos\theta/2}$. Επομένως, το νορμαλισμένο ϕ_+ γράφεται

$$\phi_+ = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}} \begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\theta}{2} \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\phi_+ = \left(\begin{array}{c} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{array} \right)$$

Για το ϕ_- βολεύει να επιλέξουμε για αυθαίρετο $\phi = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right)$ και

έχουμε εντελώς ανάλογα

$$\phi_- = (1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & -\sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi - i\sin\theta\sin\varphi & 1+\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_- = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi \\ 1+\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ο νορμαλισμός είναι ο ίδιος και καταλήγουμε

$$\phi_- = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2}(-\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Εύκολα φαίνεται ότι $\phi_+^\dagger \phi_- = 0$. Τα ϕ_+ και ϕ_- είναι νορμαλισμένα και ορθογώνια. Επίσης για $\mathbf{p} = (0,0,p)$ ή $\hat{\mathbf{p}} = (0,0,1)$, οπότε έχουμε $\theta = 0$ τα ϕ_+ και ϕ_- γίνονται

$$\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Μετασχηματισμός του spinor σε χωρικές στροφές

Ας θεωρήσουμε μια απλή στροφή γύρω από τον άξονα x, με γωνία θ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ας υποθέσουμε επίσης ότι ξεκινάμε με ένα σύστημα συντεταγμένων όπου η ορμή είναι $\mathbf{p} = (0, 0, p)$. Τότε τα $\phi_\pm$ είναι τα $\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Η ορμή μετασχηματίζεται ως διάνυσμα στην στροφή

$$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

δηλαδή, $p'_x = p_x = 0$, $p'_y = p\sin\theta$ και $p'_z = p\cos\theta$. Στο νέο σύστημα, τα $\phi_\pm$ θα πρέπει να υπακούουν αντίστοιχες σχέσεις

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}'\phi'_+ = \phi'_+, \qquad \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}'\phi'_- = -\phi'_-$$

δηλαδή, για το ϕ'_+

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}'\phi'_+ = \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\phi'_+ = \phi'_+$$

Γράφοντας το $\phi'_+ = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ έχουμε ότι

$$a\cos\theta - b\sin\theta = a \to b = ia\frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2}$$

Άρα, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ i\frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2} \end{pmatrix}$. Νορμαλίζοντας παίρνουμε

$\phi'_+ = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ i\sin\theta/2 \end{pmatrix}$. Αυτό μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\phi'_+ = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ i\sin\theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \phi_+$$

όπου το $\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ακριβώς ανάλογα έχουμε για το ϕ_-

$$\phi'_- = \begin{pmatrix} i\sin\theta/2 \\ \cos\theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \phi_-$$

όπου το $\phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Παρατηρήστε ότι τα ϕ_+ και ϕ_- παραμένουν ορθογώνια. Δηλαδή έχουμε και εδώ μια ‘‘στροφή’’, μόνο που γωνία είναι $\theta/2$. Για να το γενικεύσουμε, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} e^{i\sigma_x\theta/2} &= 1 + i\sigma_x\theta/2 + \frac{1}{2!}(i\sigma_x\theta/2)^2 + \frac{1}{3!}(i\sigma_x\theta/2)^3 + \cdots \\ &= 1 + i\sigma_x\theta/2 - \frac{1}{2}(\theta/2)^2 - \frac{1}{3!}i\sigma_x(\theta/2)^3 + \cdots \\ &= \cos\theta/2 + i\sigma_x\sin\theta/2 = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

η πιο γενικά, αν η στροφή θ είναι γύρω από τον άξονα που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$

$$\phi' = e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta/2}\phi$$

Ο πίνακας $e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta/2}\phi \equiv U$ είναι μοναδιαίος ($U^\dagger U = UU^\dagger = 1$), οπότε το "μήκος" $\phi^\dagger\phi$ διατηρείται. Αυτός ο κανόμας, παρ΄ όλο που ξεκινήσαμε με ειδικά ϕ που είναι ιδιοκαταστάσεις της ελικότητας, είναι γενικός για κάθε spinor.

Ο spinor του Dirac, με 4 συνιστώσες, γράφεται τώρα, για τις συγκεκριμένες ιδιοκαταστάσεις ϕ_+ και ϕ_-

$$\omega_+ = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\phi_+ \end{pmatrix}, \qquad \omega_- = \begin{pmatrix} \phi_- \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\phi_- \end{pmatrix}$$

Δηλαδή το πάνω και το κάτω τμήμα μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο (το $\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}$ είναι βαθμωτό). Άρα γενικεύουμε τον μετασχηματισμό για τον spinor του Dirac

$$\omega' = e^{i\mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta/2}\omega$$

όπου $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ και ισχύει για κάθε τετρα-spinor. Έτσι η πιθανότητα

$$\rho' = \psi^{\dagger\prime}\psi' = \omega^{\dagger\prime}\omega' = \omega^\dagger e^{-i\mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta/2}e^{i\mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta/2}\omega = \omega^\dagger\omega$$

Οι αρνητικές λύσεις της εξίσωσης Dirac

Είχαμε ξεκινήσει από την εξίσωση του Dirac με τη μορφή

$$E\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} \to \begin{cases} E\phi = m\phi + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\chi\\ E\chi = -m\chi + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\phi\end{cases}$$

Για $E > 0$ γνωρίζουμε ήδη τον spinor $\omega = \begin{pmatrix}\phi^s\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi^s\end{pmatrix}$, $s = 1, 2$.

Για να νορμαλίσουμε $\omega^\dagger\omega = 2E$. Οπότε (τα ϕ^s είναι νορμαλισμένα)

$$N^2\left(1 + \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2}{(E+m)^2}\right) = 2E \to N^2\frac{(E+m)^2 + p^2}{(E+m)^2} = 2E$$

$$N = \sqrt{E+m}$$

και τότε $u(p,s) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix}\phi^s\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\phi^s\end{pmatrix}$, $s = 1, 2$ και

$\psi = e^{-ip\cdot x}u(p,s)$.

Για τις αρνητικές λύσεις, στο σύστημα ηρεμίας $\mathbf{p}=0$, θά έχουμε $E=-m$ οπότε

$$-m\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0\\ 0 & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}$$

οπότε $\phi = 0$ και έχομε δύο ανεξάρτητες λύσεις

$$\omega(E<0) = \begin{pmatrix} o\\ \chi^s\end{pmatrix}.$$

Για $\mathbf{p}\neq 0$ θα έχουμε $E\phi = m\phi + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\chi \rightarrow \phi = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E-m}\chi$, οπότε

$$\omega(E<0) = \begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E-m}\chi^s\\ \chi^s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^s\\ \chi^s\end{pmatrix}, \qquad s=1,2$$

Θυμίζουμε τα αντισωματίδια που πηγαίνουν αντίθετα στο χρόνο $(\mathbf{p} \to -\mathbf{p})$, οπότε ορίζουμε

$$\omega(E < 0, -\mathbf{p}, s) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τον ίδιο νορμαλισμό $N = \sqrt{E+m}$ έχουμε

$$v(p,s) = \sqrt{|E|+m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix}, \qquad s = 1,2$$

και $\psi = v(p,s)e^{-i(-p)\cdot x} = v(p,s)e^{ip\cdot x}$ με $p = (E,\mathbf{p})$. Η επιλογή είναι $\chi^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\chi^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ γιατί η απουσία ενός άνω spin ηλεκτρονίου με αρνητική ενέργεια ισοδυναμεί με παρουσία ποζιτρονίου με κάτω spin με θετική ενέργεια.

Άσκηση 20 Δείξτε ότι πράγματι η εξίσωση Dirac περιγράφει εσωτερική στροφορμή 1/2. Δηλαδή, δείξτε ότι η χαμιλτονιανή δεν ματατίθεται με τη στροφορμή $\mathbf{L}$ αλλά με τον τελεστή $\mathbf{L} + \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}$

Στη μη σχετικιστική προσέγγιση η "κάτω" συνιστώσα του 4-spinor είναι κατά $v(/c)$ μικρότερη από την "άνω" συνιστώσα: $m + E \sim 2m \rightarrow (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})/(2m) \sim v$.

Άσκηση 21 Δείξτε ότι στη μη σχετικιστική προσέγγιση η εξίσωση του Dirac καταλήγει στην εξίσωση του Pauli παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $A^\mu = (V, \mathbf{A})$

$$(E + eV - m)\psi_A = \left[\frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}\right]\psi_A$$
