

Το $F(\mathbf{q} = 0) = 1$. Για μικρές τιμές του $|\mathbf{q}|$ μπορούμε να αναπτύξουμε το εκθετικό

$$F(\mathbf{q}) = \int \left(1 - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})^2}{2} + \dots \right) \rho(\mathbf{x}) d^3x$$

Αν $\rho(\mathbf{x}) = \rho(|\mathbf{x}|)$, δηλαδή σφαιρικά συμμετρική, ο δεύτερος όρος του ολοκληρώματος μηδενίζεται, γιατί επιλέγοντας $\mathbf{q} = (0, 0, q)$, $\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} = qz = qr \cos \theta$ και $d^3x = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$

$$\int \mathbf{q} \cdot \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) d^3x = \int qr \cos \theta \rho(r) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

Αλλά

$$\int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$$

Ο τρίτος όρος γίνεται

$$-\int \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})^2}{2} \rho(r) d^3x = -\frac{1}{2} \int \sum_i (q_i x_i)^2 \rho(r) d^3x$$

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας

$$\frac{1}{3} \int (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \rho(r) d^3x = \int x_i^2 \rho(r) d^3x, \quad i = 1, 2, 3$$

οπότε

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int \sum (q_i^2 x_i^2) \rho(r) d^3x &= -\frac{1}{2} \int (q_1^2 x_1^2 + q_2^2 x_1^2 + q_3^2 x_1^2) \rho(r) d^3x = \\ -\frac{1}{2} \left(\sum q_i^2 \right) \int x_1^2 \rho(r) d^3x &= -\frac{1}{2} \left(\sum q_i^2 \right) \int \frac{1}{3} \left(\sum x_i^2 \right) \rho(r) d^3x = \\ -\frac{1}{6} \mathbf{q}^2 \int r^2 \rho(r) d^3x &= -\frac{1}{6} \mathbf{q}^2 \langle r^2 \rangle \end{aligned}$$

όπου $\langle r^2 \rangle$ είναι η μέση τιμή του r^2 . Οπότε

$$F(\mathbf{q}) = 1 - \frac{1}{6} \mathbf{q}^2 \langle r^2 \rangle$$

Δηλαδή, για μικρό $|\mathbf{q}|$, η σκέδαση μετρά ακριβώς αυτή τη μέση τιμή του r^2 . Το μικρό μήκος κύματος του φωτονίου μπορεί να ξεχωρίσει μόνο τον συνολικό όγκο του φορτίου $\rho(r)$.

Άσκηση 43 Αν η πυκνότητα φορτίου $\rho(r)$ ήταν της μορφής e^{-mr} , δείξτε ότι ο παράγοντας μορφής είναι

$$F(|\mathbf{q}|) \propto \left(1 - \frac{q^2}{m^2} \right)^{-2}$$

Σκέδαση ηλεκτρονίου-πρωτονίου. Παράγοντες μορφής του πρωτονίου

Δύο είναι τα στοιχεία που διαφοροποιούν το πρωτόνιο-στόχος από

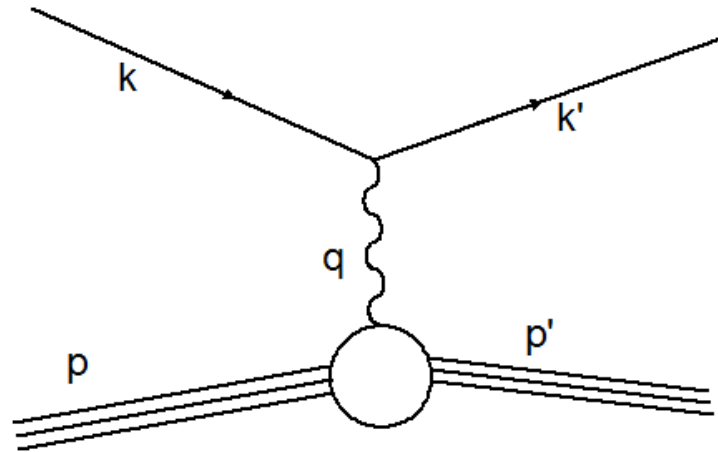
τα προηγούμενα: το πρωτόνιο δεν είναι “στατικό” και το πρωτόνιο έχει μαγνητική ροπή. Αν, παρ’ όλα αυτά, το πρωτόνιο ήταν σημειακό με μαγνητική ροπή a la Dirac ίση με $e/2M$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το τύπο που είχαμε βρεί για την σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου, βάζοντας M την μάζα του πρωτονίου αντί του μιονίου

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

όπου

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

Κάνοντας την ίδια δουλειά όπως με την σκέδαση ηλεκτρονίου - μιονίου, θα γράφαμε



$$T_{fi} = -i \int j_{\mu} \left(-\frac{1}{q^2} \right) J^{\mu} d^4x$$

όπου $q = k - k' = p' - p$ και θεωρώντας πια το πρωτόνιο ως ΜΗ σημειακό

$$j_{\mu} = -e\bar{u}(k')\gamma_{\mu}u(k)e^{-i(k-k')x}$$

$$J^{\mu} = e\bar{u}(p')[...]u(p)e^{-i(p-p')x}$$

Ακριβώς, γράφοντας [...] δείχνουμε ότι το πρωτόνιο δεν είναι σημειακό και δεν μπορούμε απλά να γράψουμε γ^μ . Παρ' όλα αυτά, το J^μ θα πρέπει να είναι ένα τετραδιάνυσμα, και επομένως θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την πιο γενική μορφή ενός τετραδιανύσματος χρησιμοποιώντας τις ορμές p , p' και q καθώς και τους γ πίνακες. Μπορούμε, τελικά, να φτιάξουμε δύο ανεξάρτητες ποσότητες: μια ανάλογη του γ^μ και μια δεύτερη ανάλογη του $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$.

Άσκηση 44 Η πιο γενική μορφή για το J^μ είναι $(q = p' - p)$

$$F_1\gamma^\mu + F_2i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + F_3i\sigma^{\mu\nu}(p + p')_\nu + F_4q^\mu + F_5(p + p')^\mu$$

Δείξτε ότι τελικά μένουν μόνο δύο ανεξάρτητοι όροι που αντιστοιχούν στα F_1 και F_2

Οπότε, γράφουμε

$$[...] = F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{\kappa}{2M}F_2(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \quad (24)$$

όπου κ είναι η ανώμαλη μαγνητική ροπή του πρωτονίου. Προσέξτε ότι το q^2 είναι η μόνη ανεξάρτητη βαθμωτή μεταβλητή στην κορυφή του πρωτονίου ($p^2 = p'^2 = M^2$). Επίσης, το $p \cdot q$ δεν είναι ανεξάρτητο μιας και

$(q + p)^2 = p'^2 \rightarrow M^2 + q^2 + 2p \cdot q = M^2 \rightarrow 2p \cdot q = -q^2$. Αν το $q^2 \rightarrow 0$, δηλαδή όταν το φωτόνιο έχει μεγάλο μήκος κύματος, δεν μπορούμε να διακρίνουμε δομή στο πρωτόνιο και παρατηρούμε σωματίδιο με φορτίο e και μαγνητική ροπή $(1 + \kappa)/2M$.

Πειραματικά, το $\kappa = 1.79$. Θυμηθείτε ότι

$$e\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \frac{e}{2M}\bar{u}(p')(p + p')^\mu u(p) + \frac{e}{2M}\bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}q_\nu u(p)$$

Οπότε, ο όρος γ^μ στην Εξ.24 περιέχει την “κανονική” ροπή ενώ ο άλλος όρος προσφέρει την ανώμαλη ροπή του πρωτονίου, και θα πρέπει να επιλέξουμε, σ' αυτό το όριο,

$$F_1(q^2 \rightarrow 0) = 1, \quad F_2(q^2 \rightarrow 0) = 1$$

Για το νετρόνιο, οι αντίστοιχες τιμές είναι $F_1(q^2 \rightarrow 0) = 0$, $F_2(q^2 \rightarrow 0) = 1$ και $\kappa_n = -1.91$. Χρησιμοποιώντας λοιπόν, για τον υπολογισμό της ενεργού διατομής, την Εξ.(24), θα πάρουμε

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\left(F_1^2 - \frac{\kappa^2 q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} (F_1 + \kappa F_2)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Αυτή είναι η σχέση Rosenbluth. Αποτελεί μια παραμετροποίηση

της άγνοιάς μας για την δομή του πρωτονίου. Παρατηρήστε ότι για $F_1 = 1$ και $\kappa = 0$ καταλήγουμε στην σκέδαση από σημειακό στόχο. Πειραματικά οι παράγοντες μορφής μετριοούνται σε σκέδαση (συνάρτηση της γωνίας σκέδασης του ηλεκτρονίου). Στην πράξη χρησιμοποιούνται δύο γραμμικοί συνδυασμοί των F

$$G_E = F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2} F_2, \quad G_M = F_1 + \kappa F_2$$

και η ενεργός διατομή γράφεται

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

με $\tau = -q^2/2M$. Προσέξτε ότι με αυτήν την αλλαγή δεν υπάρχουν όροι ανάλογοι του $G_M G_E$.

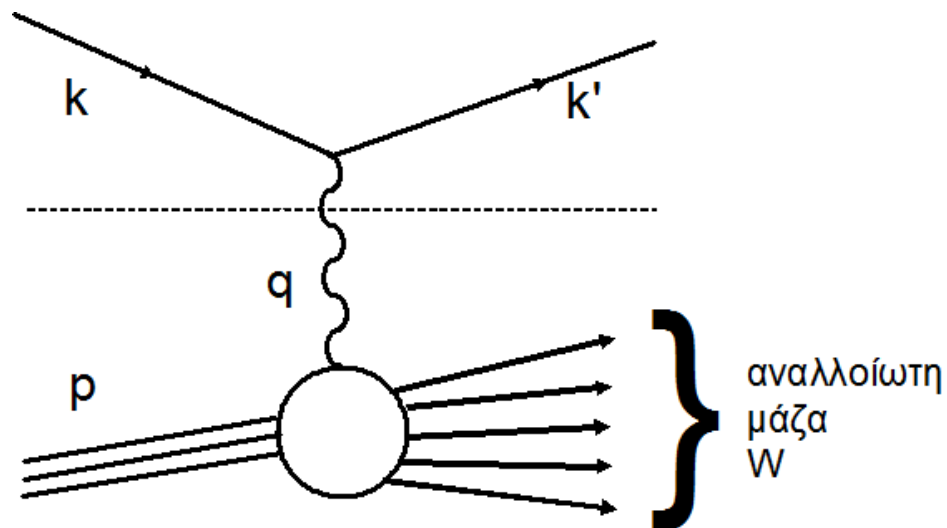
Ανελαστική Σκέδαση $ep \rightarrow eX$

Τι γίνεται όταν μεγαλώσει η ενέργεια που χάνει το ηλεκτρόνιο;

Δηλαδή όταν το $-q^2$ είναι μεγάλο. Για μεσαία $-q^2$

παρουσιάζονται διάφορα σωματίδια-συντονισμοί (resonances):

$ep \rightarrow e\Delta^+ \rightarrow ep\pi^0$. Σ' αυτήν την περίπτωση η αναλλοίωτη μάζα των προϊόντων $W^2 \simeq M_{\Delta}^2$. Για πιο μεγάλη μεταφερόμενη ενέργεια το πρωτόνιο "σπάει" και χρειαζόμαστε ένα καινούργιο φορμαλισμό για να περιγράψουμε το γεγονός.



Στην ελαστική σκέδαση αντικαταστήσαμε, στο αναλλοίωτο πλάτος, το $\bar{u}\gamma^\mu u$ του μιονίου με $\bar{u}\Gamma^\mu u$ και χρησιμοποιήσαμε την πιο γενική μορφή για το Γ^μ . Τώρα ούτε αυτό γίνεται. Θα πρέπει να πάμε άμεσα στην ενεργό διατομή (δηλαδή στο τετραγωνισμένο αναλλοίωτο πλάτος) και αντί

$$d\sigma = L_{\mu\nu}^{(e)} (L^{(\mu)})^{\mu\nu}$$

που ισχύει για την περίπτωση του μιονίου, να γράψουμε

$$d\sigma = L_{\mu\nu}^{(e)} W^{\mu\nu}$$

Το λεπτονικό κομμάτι παραμένει το ίδιο. Το $W^{\mu\nu}$ παραμετροποιεί την συνολική μας άγνοια για την μορφή του ρεύματος στην μεριά του πρωτονίου. Και πάλι θα πρέπει να γράψουμε το $W^{\mu\nu}$ με την πιο γενική μορφή χρησιμοποιώντας τα p^μ , q^μ και το $g^{\mu\nu}$. Προσέξτε

ότι $p' = p + q$ και επίσης δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γ πίνακες μιας και γράφουμε το τετράγωνο του αναλλοίωτου πλάτους όπου έχουμε αθροίσει στα spin. Επομένως γράφουμε

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g_{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p^\mu p^\nu + \frac{W_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2} (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu)$$

Κρατήσαμε το $W^{\mu\nu}$ συμμετρικό στους δείκτες μιας και το $L_{\mu\nu}^{(e)}$ είναι συμμετρικό. Κάθε μη συμμετρικό κομμάτι του $W^{\mu\nu}$ δεν θα συνεισέφερε στο $d\sigma$. Τα W θα εξαρτώνται από τα μόνο δύο βαθμωτά μεγέθη που σχετίζονται με την κορυφή του πρωτονίου. Μπορούμε να επιλέξουμε τα

$$q^2 \quad \text{και} \quad \nu = \frac{p \cdot q}{M}$$

Η αναλλοίωτη μάζα της τελικής κατάστασης συνδέεται με τις δύο

παραπάνω μεταβλητές

$$W^2 = (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2p \cdot q = M^2 + 2M\nu + q^2$$

Η διατήρηση του ρεύματος οδηγεί στις σχέσεις

$$q^\mu L_{\mu\nu}^{(e)} = q^\nu L_{\mu\nu}^{(e)} = 0, \quad \text{και} \quad q^\mu W_{\mu\nu}^{(e)} = q^\nu W_{\mu\nu}^{(e)} = 0$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις οδηγούν σε συσχέτιση μεταξύ των τεσσάρων διαφορετικών W . Οπότε, ξαναγράφουμε

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + W_2 \frac{1}{M^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right)$$

Άσκηση 45 Δείξτε ότι η διατήρηση του ρεύματος στην

αδρονική κορυφή (δηλαδή $q^\nu W_{\mu\nu} = 0$) οδηγεί στις σχέσεις

$$W_5 = -\frac{p \cdot q}{q^2} W_2, \quad W_4 = \frac{M^2}{q^2} W_1 + \left(\frac{p \cdot q}{q^2} \right)^2 W_2$$

Υπενθυμίζουμε ότι τα W_1 και W_2 εξαρτώνται από τα q^2 και ν .

Συνήθως χρησιμοποιούνται, αντ' αυτών, οι x και y

$$x = \frac{-q^2}{2p \cdot q} = \frac{-q^2}{2M\nu} \quad y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k}$$

όπου k η (τετρ)ορμή του εισερχόμενου ηλεκτρονίου.

Υπολογίζουμε τώρα την ενεργό διατομή $ep \rightarrow eX$.

$$L_{(e)}^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 4W_1(k \cdot k') + \frac{2W_2}{M^2} (2(p \cdot k)(p \cdot k') - M^2 k \cdot k')$$

που στο σύστημα εργαστηρίου γίνεται ($m_e = 0$)

$$L_{(e)}^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \Big|_{\text{lab}} = 4EE' \left[W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Άσκηση 46 Δείξτε την παραπάνω σχέση.

Τελικά η ενεργός διατομή γράφεται

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} \Big|_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[W_2(\nu, q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (25)$$

Βάθμιση Bjorken και το πρότυπο των παρτονίων

Χρησιμοποιώντας τις νέες μεταβλητές

$$Q^2 = -q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2EE'(1 - \cos \theta), \quad \nu = E - E'$$

έχουμε (θεωρώντας αζιμουθιακή συμμετρία, οπότε $\int d\phi = 2\pi$)

$$d\Omega = 2\pi d(\cos \theta), \quad (\cos \theta = (-1, 1))$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial E'} = -1, \quad \frac{\partial \nu}{\partial \cos \theta} = 0$$

$$\frac{\partial Q^2}{\partial E'} = 2E(1 - \cos \theta), \quad \frac{\partial Q^2}{\partial \cos \theta} = -2EE'$$

$$d\nu dQ^2 = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial \nu}{\partial E'} & \frac{\partial \nu}{\partial \cos \theta} \\ \frac{\partial Q^2}{\partial E'} & \frac{\partial Q^2}{\partial \cos \theta} \end{pmatrix} \right| dE' d(\cos \theta) = 2EE' dE' d(\cos \theta)$$

η Εξ.(25) γράφεται

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{EE'} \left[W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Ο Bjorken πρότεινε ότι στο όριο

$$\left. \begin{array}{l} Q^2 \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow \infty \end{array} \right\} \text{ με } x = \frac{Q^2}{2M\nu} = \text{σταθερό}$$

οι συναρτήσεις W γίνονται

$$MW_1(Q^2, \nu) \rightarrow F_1(x), \quad \nu W_2(Q^2, \nu) \rightarrow F_2(x)$$

πράγμα που τα πειραματικά δεδομένα το επιβεβαιώνουν.

Σημαντικό στοιχείο της υπόθεσης του Bjorken είναι ότι στο όριο αυτό, οι συναρτήσεις F_1 και F_2 είναι πεπερασμένες.

Πώς καταλαβαίνουμε αυτήν την βάρυση;

Ο Feynman πρότεινε να θεωρήσουμε ελαστική σκέδαση με σημειακά φορτία (παρτόνια) που βρίσκονται μέσα στο πρωτόνιο.

Το φωτόνιο μπαίνει βαθιά και βλέπει εσωτερική δομή στο πρωτόνιο.

Αν γράψουμε $p_i^\mu = xP^\mu$ (και $m_i \simeq xM$), δηλαδή ότι το παρτόνιο i έχει κάποιο κλάσμα της ορμής του πρωτονίου, ελαστική σκέδαση του ηλεκτρονίου με το παρτόνιο θα δίνει

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{EE'} \left[e_i^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2e_i^2 \frac{Q^2}{4m_i^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i} \right)$$

που θα πρέπει να συγκριθεί με την

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{EE'} \left[W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Άρα θα πρέπει η συνεισφορά στα W_1 και W_2 από ένα είδος παρτονίου να είναι

$$W_1^i = e_i^2 \frac{Q^2}{4xM^2} \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2xM} \right)$$

$$W_2^i = e_i^2 \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2xM} \right)$$

Για $Q^2, \nu \rightarrow \infty$ θεωρούμε ότι οι συνεισφορές των παρτονίων αθροίζονται ασύμφωνα (incoherently). Άρα, αθροίζουμε για όλα τα είδη των παρτονίων και ολοκληρώνουμε για όλα τα $x = (0, 1)$. Βέβαια, το ολοκλήρωμα στα x θα πρέπει να έχει και κάποια συνάρτηση βάρους $f_i(x)$ για κάθε είδος παρτονίου. Αυτές οι συναρτήσεις, που καλούνται κατανομές πιθανότητας, δεν

προβλέπονται από αυτό το πρότυπο. Επομένως,

$$W_2(\nu, Q^2) = \sum_i \int_0^1 dx f_i(x) e_i^2 \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2xM} \right)$$

και επειδή

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{\left| \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0}}, \quad \text{με } g(x_0) = 0$$

θα έχουμε

$$\delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2xM} \right) = \delta \left(x - \frac{Q^2}{2M\nu} \right) \left(\frac{Q^2}{2Mx_0} \right)^{-1} = \delta \left(x - \frac{Q^2}{2M\nu} \right) \left(\frac{x}{\nu} \right)$$

Επομένως,

$$\nu W_2(\nu, Q^2) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \equiv F_2(x)$$

όπου $x = \frac{Q^2}{2M\nu}$.

Ανάλογα παίρνουμε

$$MW_1(\nu, Q^2) = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 f_i(x) \equiv F(x)$$

οπότε

$$F_2(x) = 2xF_1(x)$$

Η τελευταία σχέση, σχέση Callan-Gross είναι άμεσα συνδεδεμένη με το ότι τα παρτόνια έχουν spin=1/2.

Το πρότυπο των κουάρκ-παρτονίων

Ας υποθέσουμε ότι τα παρτόνια είναι τα κουάρκ του Gell-Mann με τις γνωστές ιδιότητες (φορτίο, τιμή του βαριονικού αριθμού, της παραδοξότητας κ.λπ.). Τότε για την αλληλεπίδραση φωτονίου με

τα κουάρκ, θα έχουμε

$$F_2^{ep}(x) = x \left[\frac{4}{9} (u(x) + \bar{u}(x)) + \frac{1}{9} (d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)) \right]$$

με $u(x)$, $d(x)$, $s(x)$, ... η κατανομή πιθανότητας για κάθε ένα από αυτά. Ίσως φαίνεται ότι αντικαταστήσαμε μια άγνωστη ποσότητα, F_2 , από έξι άγνωστες ποσότητες! Αλλά, οι ίδιες ποσότητες παρουσιάζονται, με διαφορετικούς συνδυασμούς βέβαια, για στόχο νετρονίων (αντί πρωτονίων) ή, ακόμα, για χρήση νετρίνων και αντινετρίνων αντί φωτονίων. Για παράδειγμα, για στόχο νετρονίων (χρησιμοποιώντας την διατήρηση του isospin) μπορούμε να γράψουμε για το νετρόνιο

$$u^{(n)}(x) = d^{(p)}(x) \equiv d(x), \quad d^{(n)}(x) = u^{(p)}(x) \equiv u(x)$$

οπότε

$$F_2^{en}(x) = x \left[\frac{4}{9} (d(x) + \bar{d}(x)) + \frac{1}{9} (u(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{s}(x)) \right]$$

Μιας και όλες οι συναρτήσεις πιθανότητας πρέπει να είναι θετικές, αποδεικνύεται ότι

$$\frac{1}{4} \leq \frac{F_2^{en}}{F_2^{ep}} \leq 4$$

σχέση που επιβεβαιώνεται και πειραματικά.

Άσκηση 47 Αποδείξτε την παραπάνω σχέση.

Επίσης, για το πρωτόνιο και το νετρόνιο με παραδοξότητα 0, θα ισχύει

$$\int_0^1 dx [s(x) - \bar{s}(x)] = 0$$

Από το φορτίο του πρωτονίου και του νετρονίου έχουμε τις σχέσεις

$$\int_0^1 dx \left[\frac{2}{3}(u - \bar{u}) - \frac{1}{3}(d - \bar{d}) \right] = 1, \quad \text{για το πρωτόνιο}$$

$$\int_0^1 dx \left[\frac{2}{3}(d - \bar{d}) - \frac{1}{3}(u - \bar{u}) \right] = 0, \quad \text{για το νετρόνιο}$$

Από τις παραπάνω δύο σχέσεις παίρνουμε τις

$$\int_0^1 dx [u - \bar{u}] = 2$$

$$\int_0^1 dx [d - \bar{d}] = 1$$

που ακριβώς δείχνει την περίσσεια των κουάρκ u και των κουάρκ d σε σχέση με τα αντι-κουάρκ.

Ακόμα μια ενδιαφέρουσα σχέση πηγάζει από το γεγονός ότι $x f_i(x)$ είναι το κλάσμα της ορμής που μεταφέρει το κουάρκ i . Οπότε

$$\int_0^1 dx x [u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}] = 1 - \epsilon$$

όπου με ϵ δηλώνουμε το κλάσμα της ορμής του πρωτονίου που δεν μεταφέρεται από τα κουάρκ. Πειραματικά το $\epsilon \sim 1/2$, που υποδηλώνει ότι μεγάλο κλάσμα της ορμής μεταφέρεται από αφόρτιστα αντικείμενα. Κατά την Κβαντική Χρωμοδυναμική, τα αντικείμενα αυτά είναι τα γκλουόνια.

Μπορούμε να πάρουμε και άλλους τέτοιους κανόνες αν προχωρήσουμε σε θεωρητικά πρότυπα για τις κατανομές των κουάρκ. Έτσι, εισάγουμε την έννοια για τα κουάρκ “σθένους” και τα κουάρκ “θάλασσας”. Για παράδειγμα, για το πρωτόνιο οι

κατανομές των κουάρκ u και d παραμετροποιούνται

$$u = u_v + q_s, \quad d = d_v + q_s$$

ενώ για τα κουάρκ s και τα αντι-κουάρκ

$$\bar{u} = \bar{d} = s = \bar{s} = q_s$$

Έτσι, οι έξι άγνωστες συναρτήσεις αντικαθίστανται από τρεις. Φυσικά, υπάρχουν παρεκλίσεις από την βάνθμιση Bjorken και το απλό πρότυπο που περιγράψαμε παραπάνω, αλλά η ΚΧΔ δίνει απαντήσεις.