Ας υπολογίσουμε το αναλλοίωτο πλάτος της σκέδασης ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου ως συνάρτηση των σταθερών s, t και u. Από τη Εξ.11 έχουμε

$$
\begin{aligned}
&-(p_A + p_C)(p_B + p_D) = -(2p_A - p_A + p_C)(p_B + p_D) = \\
&= -(2p_A + p_B - p_D)(p_B + p_D) = -2p_A(p_B + p_D) + p_B^2 - p_D^2 \\
&= -2p_A(p_B + p_D)
\end{aligned}
$$

και

$s - u = (p_A + p_B)^2 - (p_A - p_D)^2 = 2p_Ap_B + 2p_Ap_d = 2p_A(p_B + p_D)$

Όμοια, $t - u = (p_A - p_C)^2 - (p_A - p_D)^2 = -2p_Ap_C + 2p_Ap_d =$ $2p_A(-p_C + p_D)$, και

$$(p_A - p_B)(p_C - p_D) = (2p_A - p_A - p_B)(p_C - p_D) =$$
$$= (2p_A - p_C - p_D)(p_C - p_D) = -2p_A(-p_C + p_d) - p_C^2 + p_B^2 =$$
$$= -2p_A(-p_C + p_D)$$

κια βέβαια $t = (p_D - p_B)^2$ και $s = (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2$. Οπότε η Εξ.11 παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{M}_{e^+e^-} = e^2 \left(\frac{s-u}{t} + \frac{t-u}{s} \right) \tag{13}$$

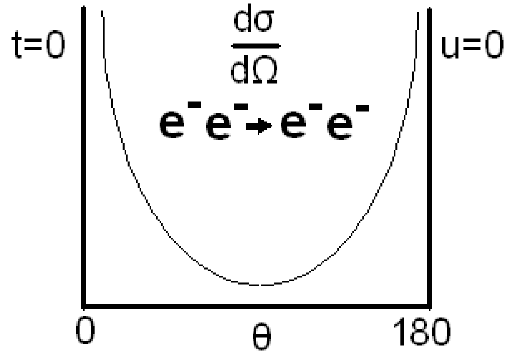
Γιατί το πλάτος παρουσιάζει συμμετρία στην εναλλαγή $s \longleftrightarrow t$;

$$AB \to CD \qquad A\bar{C} \to \bar{B}D$$
$$e^+e^- \to e^+e^- \qquad e^+e^- \to e^+e^-$$

Δηλαδή, στην περίπτωσή μας, η $AB \to CD$ και η $A\bar{C} \to \bar{B}D$ είναι η ίδια σκέδαση. Οι σκεδάσεις $AB \to CD$ και $A\bar{C} \to \bar{B}D$ έχουν συσχέτιση $s \longleftrightarrow t$. Αντίστοιχα, η σκέδαση $A\bar{D} \to \bar{B}C$ (δηλαδή $e^+e^+ \to e^+e^+$) και η $\bar{C}B \to \bar{A}D$ (δηλαδή $e^-e^- \to e^-e^-$) έχουν σχέση με την αρχική $s \longleftrightarrow u$. Δηλαδή το αναλλοίωτο πλάτος για την $e^-e^- \to e^-e^-$ γράφεται αμέσως, χρησιμοποιώντας την Εξ(13),

$$\mathcal{M}_{e^-e^-} = e^2 \left(\frac{u-s}{t} + \frac{t-s}{u} \right) \tag{14}$$

Βλέπουμε ότι το αναλλοίωτο πλάτος, άρα και η ενεργός διατομή, απειρίζονται για $t \to 0$ και $u \to 0$. Σ' αυτές τις περιπτώσεις το τεράγωνο της τετρορμής του εικονικού φωτονίου τείνει στο μηδέν και ουσιαστικά δεν έχουμε αλληλεπίδραση.

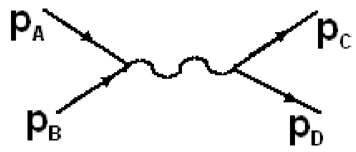


Ο διαδότης

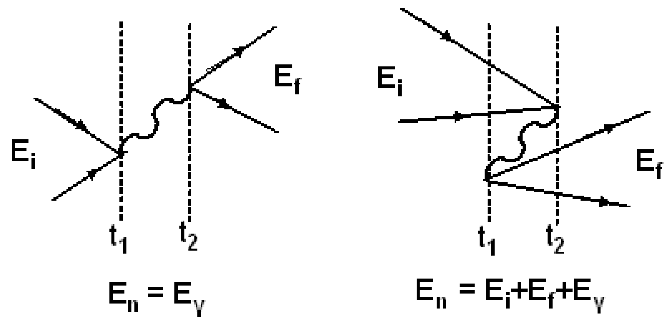
Έχουμε δεί ήδη ότι στα διαγράμματα Feynman η γραμμή του εικονικού φωτονίου αντιστοιχεί στο όρο $1/q^2$ με q η ορμή του εικονικού φωτονίου ($q^2 \neq 0$). Αν το εικονικό σωματίδιο έχει μάζα ο διαδότης γράφεται $1/(q^2 - m^2)$. Ας δούμε πως μπορούμε να το καταλάβουμε αυτό.

Στη μη σχετικιστική προσέγγιση είχαμε δεί ότι

$$T_{fi} = -i \sum V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni} 2\pi\delta(E_f - E_i)$$



Πώς θα πάμε από το $1/(E_i - E_n)$ στο $1/(p_A + p_B)^2$. Ας θυμηθούμε ότι το διάγραμμα Feynman είναι το άθροισμα όλων των χρονικά διατεταγμένων διαγραμμάτων



Επομένως, το αναλλοίωτο πλάτος θα είναι

$$\mathcal{M} \sim V_{fn}\frac{1}{E_i - E_\gamma}V_{ni} + V_{fn}\frac{1}{E_i - (2E_i + E_\gamma)}V_{ni} = V_{fn}\frac{2E_\gamma}{E_i^2 - E_\gamma^2}V_{ni}$$

Το $2E_\gamma$ σχετίζεται με τον νορμαλισμό. Η παραπάνω μέθοδος είναι η λεγόμενη “παλαιά μέθοδος διαταραχών”. Σ′ αυτήν η τριορμή διατηρείται σε κάθε κορυφή αλλά όχι η ενέργεια (πράγμα μη συναλλοίωτο). Τα σωματίδια είναι πάντα στο “κέλυφος μάζας” (mass shell), δηλαδή το τετράγωνο της τετρορμής είναι ίσο με το τετράγωνο της μάζας.
Τώρα μπορούμε να γράψουμε

$$E_i^2 = (p_A + p_B)^2 + (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2 \quad \text{και} \quad E_\gamma^2 = m_\gamma^2 + \mathbf{p}_\gamma^2$$

όπου βάλαμε μιά μάζα στο φωτόνιο για την περίπτωση που το εικονικό σωματίδιο έχει μάζα. Ο όρος $(p_A + p_B)^2$ είναι η συνολική μάζα. Επίσης $\mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B$. Οπότε, ο παρονομαστής της προηγούμενης σχέσης γράφεται

$$E_i^2 - E_\gamma^2 = (p_A + p_B)^2 - m_\gamma^2 = q^2 - m_\gamma^2$$

που στην περίπτωση του άμαζου φωτόνιου γίνεται απλά q^2. Δηλαδή, αθροίζοντας τα δύο διαγράμματα παίρνουμε συναλλοίωτο αποτέλεσμα. Μπορούμε να δούμε το ίδιο γεγονός και στην σκέδαση φωτονίου από ηλεκτρόνιο.

Αριστερά έχουμε το άθροισμα όλων των χρονικά διατεταγμένων διαγραμμάτων όπου η τριορμή διατηρείται σε κάθε κορυφή και για το ενδιάμεσο σωματίδιο ισχύει $p^2 = m^2$. Αλλά η ενέργεια δεν διατηρείται σε κάθε κορυφή. Στο δεξιό διάγραμμα η τετρορμή (ορμή και ενέργεια) διατηρείται σε κάθε κορυφή αλλά $p^2 \neq m^2$.

Η ΕΞΙΣΩΣΗ DIRAC

... τα κουάρκ και τα λεπτόνια όμως έχουν spin 1/2 και δεν περιγράφονται από την απλή κυματοσυνάρτηση που ικανοποιεί την Klein-Godon. Πρέπει να βρούμε μια εξίσωση με λύσεις που να μπορούν να περιγράφουν το spin των σωματιδίων και αντισωματιδίων.

Ο Dirac προσπάθησε να γράψει μια εξίσωση γραμμική ως προς το $\partial/\partial t$, επομένως γραμμική και ως προς $\mathbf{\nabla}$ (συναλλοιώτητα). Η πιο γενική μορφή είναι

$$H\psi = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{P} + \beta m)\,\psi = 0$$

Οι παράμετροι $\mathbf{a}$ και β πρέπει να είναι κατάλληλοι ώστε για το ελεύθερο σωματίδιο να πληρούται η σχέση

$$H^2\psi = \left(P^2 + m^2\right)\psi$$

Βέβαια, η αρχική προσπάθεια του Dirac ήταν να αποφύγει την αρνητική πυκνότητα πιθανότητας. Αλλά αυτό για μας δεν είναι πλέον πρόβλημα. Αντίθετα, έχουμε το κέρδος περιγραφής των αντισωματιδίων. Έχουμε λοιπόν

$$H^2\psi = (a_iP_i + \beta m)(a_jP_j + \beta m)\psi =$$

$$= \Big((a_iP_i)(a_jP_j) + \beta^2 m^2 + (a_iP_i)\beta m + \beta(a_jP_j)m\Big)\psi =$$

$$= \left(a_i^2 p_i^2 + (\underbrace{a_ia_j + a_ja_i}_{i \neq j})P_iP_j + \beta^2 m^2 + (a_iP_i)\beta m + \beta(a_jP_j)m\right)\psi$$

Επομένως, ϑα πρέπει

$$a_i^2 = 1 \quad \text{και} \quad a_i\beta + \beta a_i = 0 \quad \text{για } i = 1, 2, 3$$

$$\beta^2 = 1 \quad \text{και} \quad a_i a_j + a_j a_i = 0 \quad \text{για } i \neq j$$

Επομένως, τα a_i και β δεν μπορεί να είναι απλοί αριθμοί. Θα πρέπει να πάμε σε πίνακες που δρουν στην κυματοσυνάρτηση ψ που γίνεται πια διάνυσμα με συνιστώσες.

Άσκηση 16 Δείξτε ότι οι a_i και β πρέπει να είναι ερμητιανοί πίνακες, να έχουν ίχνος 0, να είναι αρτίων διαστάσεων με ιδιοτιμές ± 1.

Η ελάχιστη διάσταση, λοιπόν, είναι 4. Η περίπτωση 2 διαστάσεων πρέπει να απορριφθεί διότι γνωρίζουμε ότι υπάρχουν μόνο 3 ανεξάρτητοι 2×2 πίνακες (του Pauli) ενώ εμείς χρειαζόμαστε 4 πίνακες. Μια άπο τις δυνατές αναπαραστάσεις των a_i και β είναι η λεγόμενη αναπαράσταση Pauli-Dirac (όπου $\boldsymbol{\sigma}$ οι πίνακες του Pauli)

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \text{όπου}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Μια άλλη αναπαράσταση είναι αυτή του Weyl

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Με άλλα λόγια, η επιλογή των a_i και β δεν είναι μοναδική. Θυμίζοντας ότι ένας μοναδιαίος μετασχηματισμός διατηρεί τις αντιμεταθετικές ιδιότητες, έπεται ότι οι μετασχηματισμοί

$$a_i' = U a_i U^{-1}, \quad \beta' = U \beta U^{-1}$$

όπου U ένας μοναδιαίος πίνακας 4×4, δίνει μια νέα αναπαράσταση των a_i και β. Φυσικά, όλα τα μετρήσιμα μεγέθη είναι ανεξάρτητα από την αναπαράσταση. Το διάνυσμα ψ έχει τέσσερις συνιστώσες και ονομάζεται spinor του Dirac.

Συναλλοίωτη μορφή της εξίσωσης Dirac. Πίνακες γ

Από την $H\psi = (\mathbf{aP} + \beta m)\psi$ παίρνουμε, πολλαπλασιάζοντας επί β,

$$\beta i \frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-i\beta \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta^2 m\right)\psi \to \left(\beta i \frac{\partial}{\partial t} + i\beta\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\psi = \beta^2 m\psi \to$$

$$(\beta, \beta \mathbf{a}) \left(i \frac{\partial}{\partial t}, i \boldsymbol{\nabla} \right) \psi = m\psi \rightarrow \left(i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m \right) \psi = 0$$

όπου ορίσαμε $\gamma^{\mu} = (\beta, \beta \mathbf{a})$ τους πίνακες γ. Αυτή είναι η συναλλοίωτη μορφή της εξίσωσης Dirac. Αντιστοιχεί σε τέσσερις διαφορικές εξισώσεις

$$\sum_{k} \left(i \left(\gamma^{\mu}\right)_{jk} \partial_{\mu} - m\delta_{jk} \right) \psi_k = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των $\mathbf{a}$ και β πινάκων, βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu} I$$

και επίσης τις σχέσεις

$$\gamma^0 = \beta \to \left(\gamma^0\right)^2 = 1, \quad \gamma^{0\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0$$

$$\gamma^{k\dagger} = (\beta a^k)^\dagger = a^k \beta = -\gamma^k, \quad (\gamma^k)^2 = \beta a^k \beta a^k = -1, \quad k = 1, 2, 3$$

ή, πιο γενικά $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$.

Διατηρήσιμο ρεύμα και η συζυγής εξίσωση Dirac

Η ερμητιανή συζυγής της εξίσωση Dirac
$(i\gamma^0\partial_t + i\gamma^k\partial_k - m)\psi = 0$ είναι

$$-i(\partial_t\psi^\dagger)\gamma^{0\dagger} - i(\partial_k\psi^\dagger)\gamma^{k\dagger} - m\psi^\dagger = 0$$

$$-i(\partial_t\psi^\dagger)\gamma^0 + i(\partial_k\psi^\dagger)\gamma^k - m\psi^\dagger = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με γ^0 και χρησιμοποιώντας ότι

$\gamma_0\gamma_k = -\gamma_k\gamma_0$

$$-i\partial_t(\psi^\dagger\gamma^0)\gamma^0 - i\partial_k(\psi^\dagger\gamma^0)\gamma^k - m\psi^\dagger\gamma^0 = 0$$

$$i\partial_t\bar{\psi}\gamma^0 + i\partial_k\bar{\psi}\gamma^k + m\bar{\psi} = 0 \rightarrow i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

όπου ορίσαμε $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ που είναι ένας spinor γραμμή.
Τώρα χρησιμοποιώντας την $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0$ επί $(\bar{\psi}\cdot)$
και την $i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$ επί $(\cdot\psi)$
και αθροίζοντας παίρνουμε

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + m\bar{\psi}\psi = 0 \rightarrow \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$$

Επομένως, ορίζουμε το ρεύμα πιθανότητας $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ και βέβαια τώρα

$$\rho = j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = \sum_{i=1}^{4}|\psi_i|^2 \geq 0$$

δηλαδή η πυκνότητα πιθανότητας στον Dirac είναι θετική (στην εξίσωση Klein-Gordon ήταν ανάλογη της ενέργειας).
Χρησιμοποιώντας την Pauli-Weiskopf περιγραφή, το j^μ γίνεται πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Το γ^μ είναι τετραδιάνυσμα με την έννοια ότι το j^μ είναι τετραδιάνυσμα.

Spinor ελεύθερου σωματιδίου

Άσκηση 17 Δείξτε ότι κάθε συνιστώσα του ψ υπακούει την εξίσωση Klein-Gordon.

Ψάχνουμε για λύσεις ελεύθερων σωματιδίων (ιδιοσυναρτήσεις της