γράφεται

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{K.M.}} = |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{64\pi^2} \frac{p_f}{p_i s}$$

Άσκηση 10 Δείξτε ότι για υψηλές ενέργειες, η ενεργός διατομή για την σκέδαση "ηλεκτρονίου"-"μιονίου" δίνεται από τη σχέση

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{K.M.}} = \frac{\alpha^2}{4s}\left(\frac{3+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)^2$$

Ο ρυθμός διάσπασης ως συνάρτηση του $|\mathcal{M}|$

Για διασπάσεις της μορφής $A \to 1 + 2 + 3 + ... + n$ ακολουθούμε την ίδια μέθοδο

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_A}|\mathcal{M}|^2 \frac{d^3p_1}{2E_1(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3p_n}{2E_1(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4(p_A - p_1 - p_2 - \ldots - p_n)$$

Το $d\Gamma$ ονομάζεται διαφορικός ρυθμός (differential rate).

Άσκηση 11 Δείξτε ότι για τη διάσπαση $A \to 1 + 2$, και για το σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου A, παίρνουμε

$$\Gamma = \frac{p_f}{32\pi^2 m_A^2} \int |\mathcal{M}|^2 \, d\Omega$$

Ο ολικός ρυθμός διάσπασης είναι το άθροισμα των Γ για όλες τις δυνατές διασπάσεις του συγκεκριμένου σωματιδίου. Βέβαια, το Γ

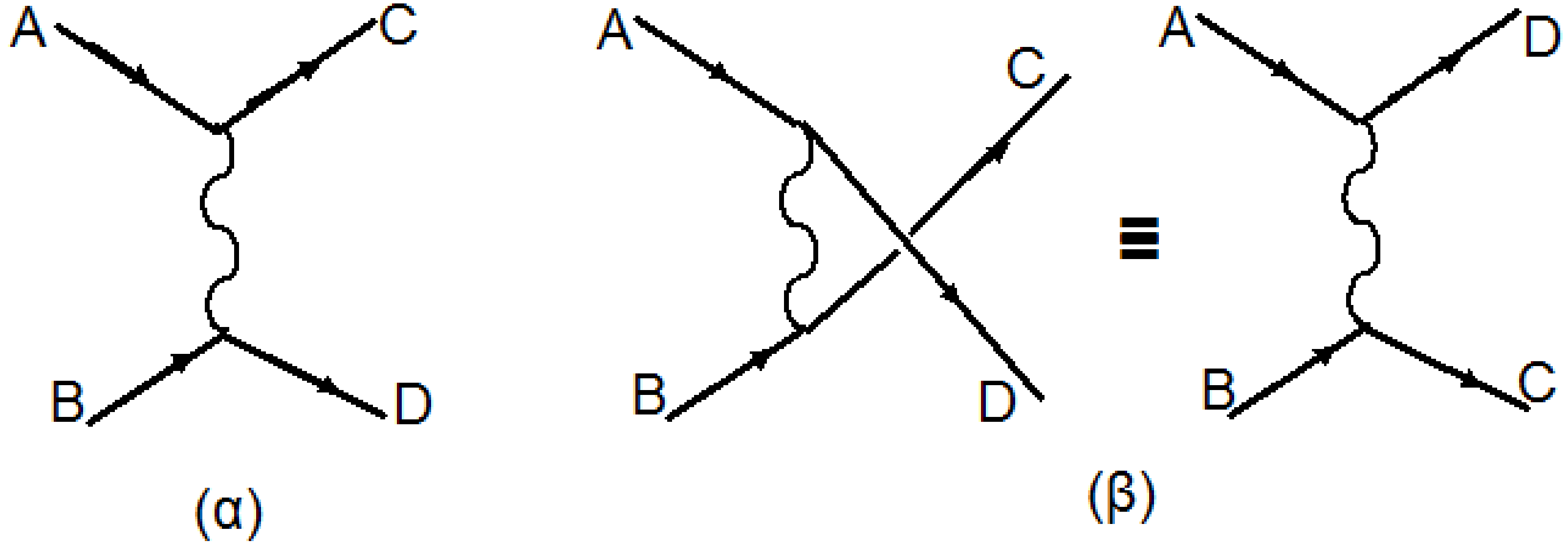
δίνεται από τη σχέση

$$\Gamma = -\frac{dN_A}{dt}\frac{1}{N_A} \rightarrow N_A(t) = N_A e^{-\Gamma t}$$

Χρόνος ζωής ονομάζεται η ποσότητα Γ^{-1}.

Σκέδαση "ηλεκτρονίου"-"ηλεκτρονίου"

Η διαφορά με την αντίστοιχη σκέδαση "ηλεκτρονίου" - "μιονίου" είναι ότι τώρα έχουμε όμοια σωματίδια. Επομένως, θα πρέπει το πλάτος $\mathcal{M}$ για $A + B \to C + D$ να παραμένει αναλλοίωτο στην αλλαγή $A \longleftrightarrow B$ και $C \longleftrightarrow D$. Έτσι, εκτός από το διάγραμμα (α) του Σχ.2, θα πρέπει να πάρουμε υπ΄ όψη μας και το διάγραμμα (β) του ιδίου σχήματος. Ο λόγος είναι ότι έχοντας όμοια σωματίδια, δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε αν το ηλεκτρόνιο C έρχεται από την κορυφή με το ηλεκτρόνιο A ή από την κορυφή με το ηλεκτρόνιο B.



Σχήμα 2:

Επομένως, θα πρέπει να αθροίσουμε τα πλάτη και όχι τις πιθανότητες, μιας και οι δύο περιπτώσεις έχουν τις ίδιες αρχικές και τελικές καταστάσεις. Για το (α) έχουμε ήδη γράψει ότι δίνει πλάτος

$$-i\mathcal{M} = -i(-e^2)\frac{(p_A + p_C)^\mu (p_B + p_D)_\mu}{(p_D - p_B)^2}$$

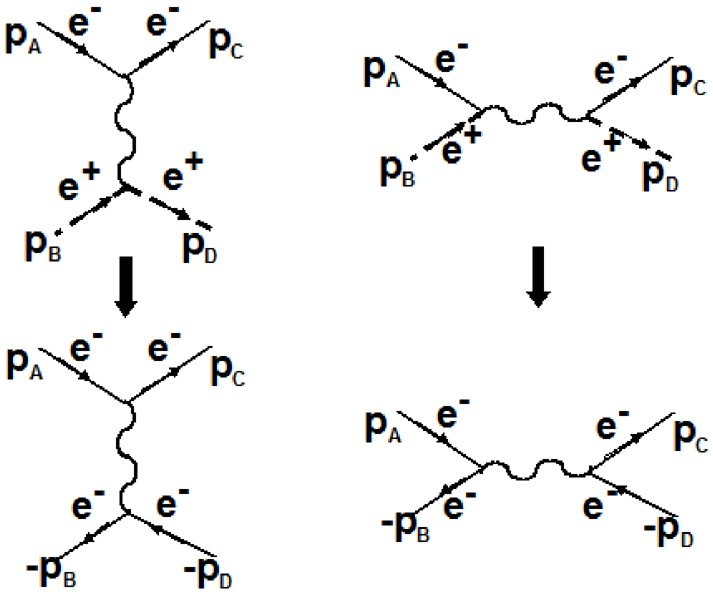
Τώρα λοιπόν το πλάτος $\mathcal{M}$ θα περιέχει και τη συνεισφορά από το διάγραμμα (β)

$$-i\mathcal{M} = -i(-e^2)\left[\frac{(p_A + p_C)^\mu (p_B + p_D)_\mu}{(p_D - p_B)^2} + \frac{(p_A + p_D)^\mu (p_B + p_C)_\mu}{(p_C - p_B)^2}\right]$$

Βλέπουμε ότι η αλλαγή $p_C \longleftrightarrow p_D$ μετατρέπει τον ένα όρο του αθροίσματος στον άλλο. Σημειώστε ότι η αναλλοιώτητα του $\mathcal{M}$ στην αλλαγή $p_c \longleftrightarrow p_D$ είναι αρκετή για την αναλλοιώτητα και ως προς $p_A \longleftrightarrow p_B$

Σκέδαση ‘‘ηλεκτρονίου’’-‘‘ποζιτρονίου’’ (crossing)

Στο Σχ.3 βλέπουμε τα δύο πιθανά διαγράμματα στην σκέδαση “ηλεκτρονίου”-“ποζιτρονίου” καθώς και τα αντίστοιχα όπου τα ποζιτρόνια έχουν αντικατασταθεί από ηλεκτρόνια με αντίθετη ορμή (πηγαίνουν πίσω στο χρόνο και έχουν αρνητική ενέργεια). Το αναλλοίωτο πλάτος θα δίνεται από τη σχέση



Σχήμα 3:

$$\mathcal{M} = (-e^2)\left[\frac{(p_A+p_C)^\mu(-p_B-p_D)_\mu}{(-p_B-(-p_D))^2} + \frac{(p_A-p_B)^\mu(p_C-p_D)_\mu}{(p_C-(-p_D))^2}\right] \tag{11}$$

Υπενθυμίζεται ότι η διατήρηση ενέγειας-ορμής $p_A+p_B=p_C+p_D \rightarrow p_A+(-p_D)=p_C+(-p_B)$. Προσέξτε ότι η κορυφή $+ie(p_B+p_D)$ στην σκέδαση e^-e^- γίνεται $-ie(p_B+p_D)$ για την περίπτωση e^-e^+ (το φορτίο του ποζιτρονίου είναι $+e$). Τέλος, το πλάτος είνα αναλλοίωτο στην αλλαγή $p_C \longleftrightarrow -p_B$ που αντιστοιχεί σε ανταλλαγή δύο εξερχόμενων ηλεκτρονίων. Θα μπορούσαμε να πάρουμε το $\mathcal{M}_{e^-e^+\rightarrow e^-e^+}$ από το $\mathcal{M}_{e^-e^-\rightarrow e^-e^-}$ απλά μέσω της σχέσης

$$\mathcal{M}_{e^-e^+\rightarrow e^-e^+}(p_A,p_B,p_C,p_D) = \mathcal{M}_{e^-e^-\rightarrow e^-e^-}(p_A,-p_D,p_C,-p_B) \tag{12}$$

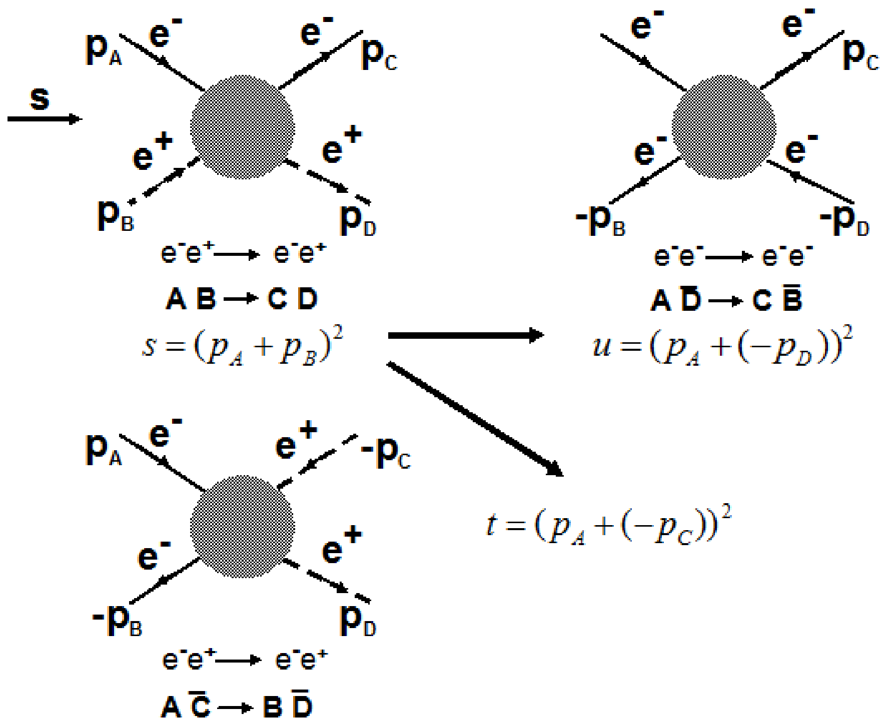
Άσκηση 12 Γράψτε το αναλλοίωτο πλάτος για τις σκεδάσεις $e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$ και $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ και ελέγξτε το crossing με την $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$.

Αναλλοίωτες μεταβλητές

Για την σκέδαση $AB \to CD$ έχουμε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές (π.χ., στο Κ.Μ. έχουμε την ορμή και τη γωνία σκέδασης). Αλλά είναι χρήσιμο να εκφράσουμε το $\mathcal{M}$ ως συνάρτηση ποσοτήτων αναλλοίωτων σε μετασχηματισμούς Lorentz. Από τις τέσσερις ορμές μπορούμε να φτιάξουμε 3 αναλλοίωτες ποσότητες: $p_A p_C$, $p_A p_D$ και $p_D p_B$, από τις οποίες βέβαια μόνο οι δύο είναι ανεξάρτητες. Χρησιμοποιούμε συνήθως τις σταθερές του

Mandelstam

$$s = (p_A + p_B)^2, \qquad t = (p_A - p_C)^2, \qquad u = (p_A - p_D)^2$$



Σχήμα 4:

Άσκηση 13 Δείξτε ότι $s + t + u = \sum m_i^2$

Για να αναπαραστήσουμε τις επιτρεπτές (φυσικές) περιοχές των s, t και u χρησιμοποιούμε ένα διάγραμμα δύο διαστάσεων, Σχ.5. Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει ύψος ισο με $\sum_i m_i^2$. Υπενθυμίζουμε το θεώρημα της γεωμετρίας ότι το άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου στο εσωτερικό ενός ισόπλευρου τριγώνου από τις πλευρές του είναι σταθερό και ίσο με το ύψος του τριγώνου.
Για την σκέδαση $e^+e^- \to e^+e^-$, στο Κ.Μ., έχουμε

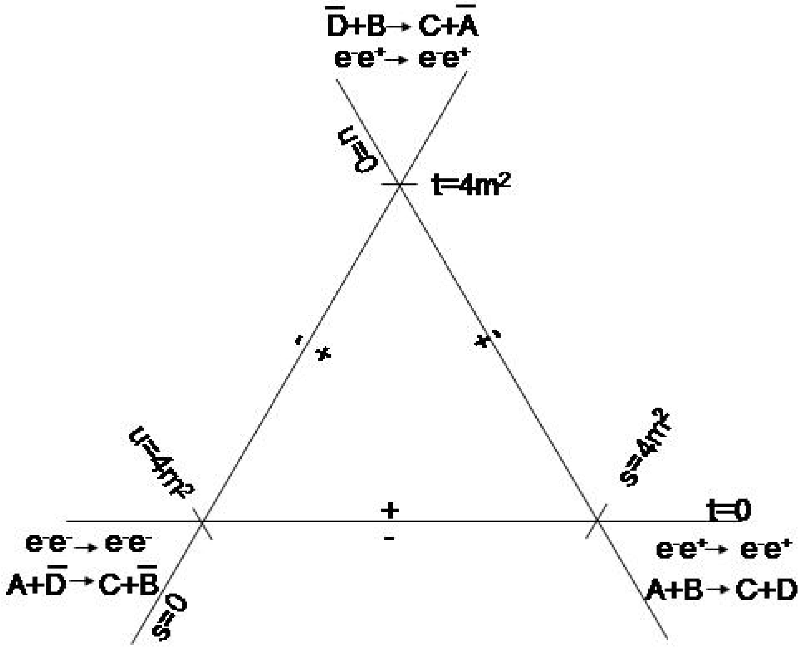
$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E + E, \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i)^2 = 4E^2 = 4(m^2 + k^2)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (E - E, \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f)^2 = -(2k^2 - 2k^2 \cos\theta)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (E - E, \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_f)^2 = -(2k^2 + 2k^2 \cos\theta)$$

Τα σωματίδια έχουν στο Κ.Μ. έχουν ίδιο μέτρο ορμής,

$|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| = k$ και επειδή έχουν ίδια μάζα έχουν και ίδια ενέργεια. Άρα, $s \geq 0$ και $t, u \leq 0$. Αλλά επειδή $s + t + u = 4m^2$ συμπεραίνουμε ότι $s \geq 4m^2$.



Σχήμα 5:

Βλέπουμε από το Σχ.4 ότι για την $e^+e^- \to e^+e^-$, η μεταβλητή $u = (p_A - p_d)^2$ αποτελεί την s μεταβλητή της $e^-e^- \to e^-e^-$

$$s_{e^+e^-\to e^+e^-} = u_{e^-e^-\to e^-e^-}$$

οπότε, για την $e^-e^- \to e^-e^-$, η φυσική περιοχή είναι $t, s \leq 0$ και $u \geq 4m^2$

Άσκηση 14 Δείξτε ότι για την σκέδαση $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$, η φυσική περιοχή των μεταβλητών είναι $t = 0$ και $su = (M^2 - m^2)$ όπου M και m είναι οι μάζες του μιονίου και του ηλεκτρονίου. Σχεδιάστε το διάγραμμα Mandelstam.

Άσκηση 15 Ελέγξτε ότι η Εξ.12 είναι της μορφής

$$\mathcal{M}_{e^-e^+}(s,t,u) = \mathcal{M}_{e^-e^-}(u,t,s)$$
