

$k'_\nu T^{\mu\nu} = k_\mu T^{\mu\nu} = 0$ για το άθροισμα των δύο διαγραμμάτων και όχι για το καθένα από αυτά.

Χρησιμοποιώντας ότι $(p + k)^2 = s$ και $(p - k')^2 = u$ και αγνοώντας την μάζα του ηλεκτρονίου, τα δύο πλάτη γίνονται

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{s} \epsilon_\mu \epsilon'_\nu{}^* e^2 \bar{u}^{(s')} (p') \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu u^{(s)} (p)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{1}{u} \epsilon_\mu \epsilon'_\nu{}^* e^2 \bar{u}^{(s')} (p') \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu u^{(s)} (p)$$

θα πρέπει τώρα να υπολογίσουμε το $\overline{|\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2}$. Ας υπολογίσουμε πρώτα το $\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{1}{s^2} e^4 Tr \left[\not{p} \gamma^{\mu'} (\not{p} + \not{k}) \gamma^{\nu'} \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu \right] \epsilon_\mu \epsilon'_\nu{}^* \epsilon_{\mu'}^* \epsilon'_{\nu'}$$

Για τα φωτόνια έχουμε: $\epsilon_\mu \epsilon_{\mu'}^* = -g_{\mu\mu'}$ και $\epsilon'_\nu{}^* \epsilon'_{\nu'} = -g_{\nu\nu'}$ (βλ. το

Παράρτημα) και το $\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$ γίνεται

$$\begin{aligned}
 \overline{|\mathcal{M}_1|^2} &= \frac{1}{4} \frac{1}{s^2} e^4 \text{Tr} [\not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\nu \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu] \\
 &= \frac{1}{4} \frac{1}{s^2} e^4 (-2)(-2) \text{Tr} [\not{p} (\not{p} + \not{k}) \not{p}' (\not{p} + \not{k})] \\
 &= \frac{1}{s^2} e^4 \text{Tr} [\not{p} \not{k} \not{p}' (\not{p} + \not{k})] \\
 &= \frac{1}{s^2} e^4 \text{Tr} [\not{k} \not{p}' \not{k} \not{p}] = \frac{1}{s^2} e^4 4 [(kp') (kp) + (kp) (kp')] = \\
 &= \frac{4e^4}{s^2} 2 \frac{s(-u)}{4} = -2e^4 \frac{u}{s}
 \end{aligned}$$

όπου στην τρίτη και στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι

$p^2 = p^2 = 0$. Όμοια, το άλλο διάγραμμα δίνει

$$\overline{|\mathcal{M}_2|^2} = -2e^4 \frac{s}{u}$$

Άσκηση 40 Δείξτε ότι $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* = 0$

Επομένως,

$$\overline{|\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2} = \overline{|\mathcal{M}_1|^2} + \overline{|\mathcal{M}_2|^2} = 2e^4 \left(-\frac{u}{s} - \frac{s}{u} \right)$$

Άσκηση 41 Αν το φωτόνιο είναι δυνητικό, τότε

$$k^2 = -Q^2 \neq 0, \text{ δείξτε ότι } \overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \left(-\frac{u}{s} - \frac{s}{u} + \frac{2Q^2 t}{su} \right)$$

Η Δομή των Αδρονίων

Η σκέδαση χρησιμοποιείται για την αναγνώριση της δομής του στόχου. Χρησιμοποιώντας την γωνιακή κατανομή του σκεδαζομένου “βλήματος” (π.χ. ηλεκτρονίου), μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για την δομή.

Η γενική ιδέα είναι η εύρεση του παράγοντα μορφής (form factor) $F(q)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{σημειακός στόχος}} |F(q)|^2$$

με q η μεταφερόμενη ορμή μεταξύ του προσπίπτοντος “βλήματος” e και του στόχου: $q = k_i - k_f$. Ξεκινάμε με τη σκέδαση e σε στόχο χωρίς spin, με φορτίο $Ze\rho(\mathbf{x})$ όπου

$$\int \rho(\mathbf{x}) d^3x = 1$$

Για στατικό στόχο έχουμε

$$F(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d^3x$$

ενώ

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{σημειακός στόχος}} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mott}} = \frac{(Z\alpha)^2 E^2}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Ας δούμε πώς φτάνουμε σ' αυτό. Για στατικό φορτίο με τιμή Ze θα έχουμε $A^\mu = (V, 0)$ με

$$\nabla^2 V(x) = -Ze\delta^3(\mathbf{x}) \quad \text{για σημειακό φορτίο}$$

$$\nabla^2 V(x) = -Ze\rho(\mathbf{x}) \quad \text{για φορτίο με πυκνότητα } \rho$$

Οπότε, για το σημεικό φορτίο

$$\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \nabla^2 V(x) d^3x = - \int Ze\delta^3(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d^3x$$

$$(-i\mathbf{q})^2 \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) d^3x = -Ze$$

$$\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) d^3x = \frac{Ze}{\mathbf{q}^2}$$

όπου στην δεύτερη ισότητα οδηγηθήκαμε με διπλή ολοκλήρωση κατά μέρη (και μηδενισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος που προκύπτει κάθε φορά). Για το φορτίο με πυκνότητα ρ έχουμε

αντίστοιχα

$$\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \nabla^2 V(\mathbf{x}) d^3x = - \int Ze\rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d^3x$$

$$(-i\mathbf{q})^2 \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) d^3x = -ZeF(\mathbf{q})$$

$$\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) d^3x = \frac{Ze}{\mathbf{q}^2} F(\mathbf{q})$$

Τώρα γνωρίζουμε ότι

$$T_{fi} = -ie \int d^4x \bar{\Psi}_f \gamma^\mu \Psi_i A_\mu = -ie \int d^4x \bar{u}(k_f) \gamma^\mu u(k_i) e^{-i(k_i - k_f)x} A_\mu$$

Για $A_\mu = (V(\mathbf{x}), 0)$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -ie (\bar{u}_f \gamma^0 u_i) 2\pi \delta(E_i - E_f) \int d^3x e^{-i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) \cdot \mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \\ &= -ie (\bar{u}_f \gamma^0 u_i) 2\pi \delta(E_i - E_f) \frac{Ze}{\mathbf{q}^2} F(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ και $F(\mathbf{q}) = 1$ για σημειακό φορτίο. Για να πάμε στην διαφορική ενεργό διατομής, παίρνουμε

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{|T_{fi}|^2}{T} \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2E_f} \frac{1}{2E_i} \frac{1}{v} = \\ &= (e^4 Z^2) \left[\frac{1}{2} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 \right] \left(\frac{F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2} \right)^2 2\pi \delta(E_i - E_f) \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2E_f} \frac{1}{2E_i} \frac{1}{v} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $(2\pi\delta)^2 = T2\pi\delta$ και η αγκύλη υπονοεί άθροισμα στα spin.

Για στατικό πεδίο, η ενέργεια του ηλεκτρονίου δεν αλλάζει ($\delta(E_i - E_f)$), οπότε και $|\mathbf{k}_f| = |\mathbf{k}_i|$ και $E^2 = k^2 + m^2 \rightarrow EdE = kdk$. Έτσι, $d^3k_f = k_f^2 dk_f d\Omega = k_f E_f dE_f d\Omega$. Το $d\sigma$ γράφεται

$$\begin{aligned} d\sigma &= Z^2 e^4 \left(\frac{F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2} \right)^2 2\pi \delta(E_i - E_f) \frac{k_f E_f dE_f d\Omega}{(2\pi)^3 2E_f} \frac{1}{2E_i} \frac{1}{v} \left[\frac{1}{2} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 \right] \\ &= \frac{Z^2 \alpha^2}{4(\mathbf{q}^2)^2} \left[\frac{1}{2} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 \right] [F(\mathbf{q}^2)]^2 d\Omega \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $k_f/E_f = v$. Ας υπολογίσουμε τώρα την αγκύλη ($E_i = E_f = E$ και $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| = k$)

$$\frac{1}{2} \sum_{s_f, s_i} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 = \frac{1}{2} \text{Tr} [(k_i + m)\gamma_0(k_f + m)\gamma_0]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [\text{Tr} [\not{k}_i \gamma_0 \not{k}_f \gamma_0] + m^2 \text{Tr} [\gamma_0^2]] \\
&= 2 (2E_i E_f - k_i k_f + m^2) \\
&= 2 (2E^2 - (E^2 - k^2 \cos \theta) + m^2) \\
&= 2 (2E^2 - (E^2 - k^2 \cos \theta) + E^2 - k^2) \\
&= 4E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)
\end{aligned}$$

με $v = k/E$ η ταχύτητα του ηλεκτρονίου. Οπότε,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) [F(\mathbf{q})]^2 \quad (23)$$

με $\mathbf{q}^2 = (\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i)^2 = 2k^2(1 - \cos \theta) = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$. Για σημειακό

στόχο, όπως είπαμε, $F(\mathbf{q}) = 1$. Όπότε, πράγματι,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{σημειακός στόχος}} [F(\mathbf{q})]^2$$

Άσκηση 42 Αν το ηλεκτρόνιο είχε spin 0, δείξτε ότι η έκφραση

$$4E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

αντικαθίσταται από το $4E^2$ και η Εξ.23 γίνεται

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} E^2 [F(\mathbf{q})]^2$$

Όπότε, μπαίνει η ερώτηση: γιατί το μη σχετικιστικό ηλεκτρόνιο, δηλαδή για $v \rightarrow 0$, με spin=1/2 δεν διαφέρει από το “ηλεκτρόνιο” με spin=0;