Η εξίσωση Klein-Gordon

Χρησιμοποιώντας της σχετικιστική εξίσωση $E^2 = p^2 + m^2$ και τις αντικαταστάσεις $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ και $\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$, οδηγούμεθα στην ($\hbar = 1$)

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi = \left((-i\boldsymbol{\nabla})^2 + m^2\right)\phi$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi + \nabla^2\phi = m^2\phi$$

που αποτελεί την εξίσωση Klein-Gordon.

Θέλουμε να γράψουμε την εξίσωση συνέχειας και να αναγνωρίσουμε την πυκνότητα πιθανότητας και την πυκνότητα ρεύματος πιθανότητας. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Klein-Gordon επί $-i\phi^*$ και την συζυγή της επί $i\phi$ και προσθέτουμε

$$-i\phi^*\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi+\nabla^2\phi\right)+i\phi\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^*+\nabla^2\phi^*\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[i\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi-\phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right)\right]+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[-i\left(\phi^*\boldsymbol{\nabla}\phi-\phi\boldsymbol{\nabla}\phi^*\right)\right]=0$$

οπότε αναγνωρίζουμε

$$\rho=i\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi-\phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right) \text{ και } \boldsymbol{j}=-i\left(\phi^*\boldsymbol{\nabla}\phi-\phi\boldsymbol{\nabla}\phi^*\right)$$

Αν πάρουμε για ϕ τη λύση της εξίσωσης Klein-Gordon που αντιστοιχεί σε ελεύθερο σωματίδιο $\phi=Ne^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)}=Ne^{-ix^\mu p_\mu}$, τότε

$$\rho=i(-2iE)|N|^2=2E|N|^2 \text{ και } \boldsymbol{j}=-i(2i\boldsymbol{p})|N|^2=2\boldsymbol{p}|N|^2$$

Η Klein-Gordon μπορεί να γραφεί με τετραδιανύσματα

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - (-i\boldsymbol{\nabla})^2\right]\phi = m^2\phi \rightarrow -\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\right]\phi = m^2\phi$$

$$-\partial^\mu\partial_\mu\phi = m^2\phi \rightarrow \left(\Box^2 + m^2\right)\phi = 0$$

και

$$j^\mu \equiv (\rho, \boldsymbol{j}) = 2(E, \boldsymbol{p})|N|^2 = 2p^\mu|N|^2$$

Προσέξτε ότι η ρ δεν είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Lorentz, αφού είναι ανάλογη με την ενέργεια, αλλά το $\rho\, d^3x$ είναι αναλλοίωτο.

Τις ιδιοτιμές ενέργειας της Klein-Gordon τις παίρνουμε αντικαθιστώντας τη λύση $\phi = Ne^{-ix^\mu p_\mu}$ στην εξίσωση και παίρνουμε

$$E = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$$

Με αρνητικές ενέργειες μπορούμε να έχουμε μεταπτώσεις σε όλο και χαμηλώτερες ενέργειες και επιπλέον η πιθανότητα ρ μπορεί να γίνει αρνητική. Δεν μπορούμε απλά να αγνοήσουμε τις αρνητικές ενέργειες γιατί πρέπει να έχουμε πάντοτε το πλήρες σύνολο των καταστάσεων.

Ιστορική αναδρομή

''Εξήγηση'' του Dirac για τις αρνητικές ενέργειες της εξίσωσής του.

''Εξήγηση'' των Pauli και Weisskopf για τις αρνητικές ενέργειες της Klein-Gordon. Μετέτρεψαν το j^μ σε πυκνότητα ρεύματος ηλεκτρικού φορτίου $j^\mu = -ie\left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right)$.

Η περιγραφή των λύσεων με $E < 0$ από τους Feynman-Stückelberg

Η βασική ιδέα είναι ότι η κατάσταση με ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ περιγράφει σωματίδιο που "διαδίδεται" πίσω στο χρόνο, ή ΑΝΤΙΣΩΜΑΤΙΔΙΟ που διαδίδεται κανονικά με τον χρόνο.
Ας ξεχάσουμε τη "δυσκολία" του σπιν και ας θεωρήσουμε ότι η KG περιγράφει ηλεκτρόνια με φορτίο $-e$. Οπότε, το τετραδυάνυσμα του ηλεκτρομαγνητικού ρεύματος γίνεται

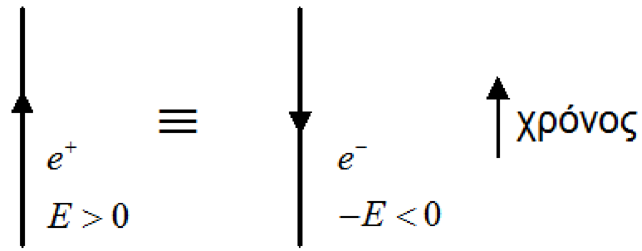
$$j^\mu(e^-) = -2e|N|^2(E, \mathbf{p})$$

Για το αντισωματίδιο, με φορτίο $+e$ θα γράφαμε

$$j^\mu(e^+) = +2e|N|^2(E, \mathbf{p}) = -2e|N|^2(-E, -\mathbf{p})$$

Αυτό περιγράφει σωματίδιο φορτίου $-e$ με ενέργεια $-E$ και ορμή

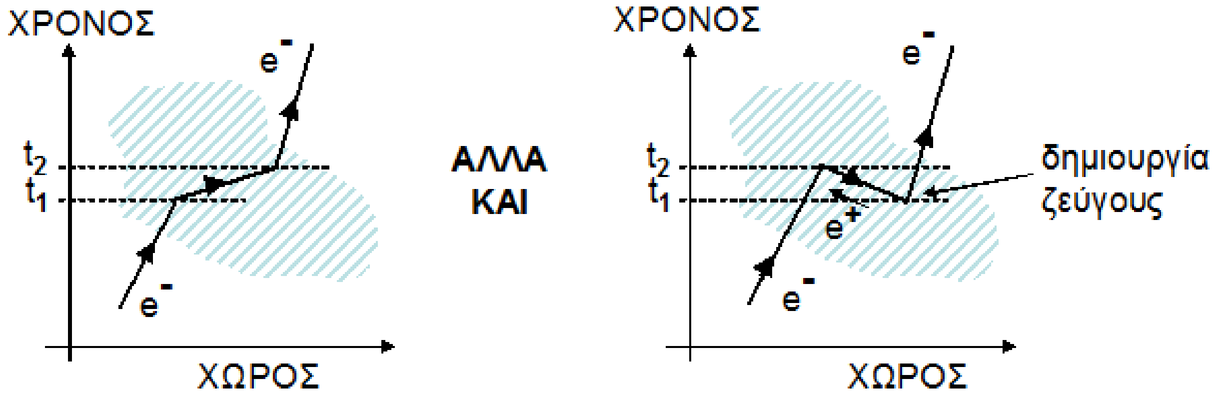
$-\mathbf{p}$. Δηλαδή



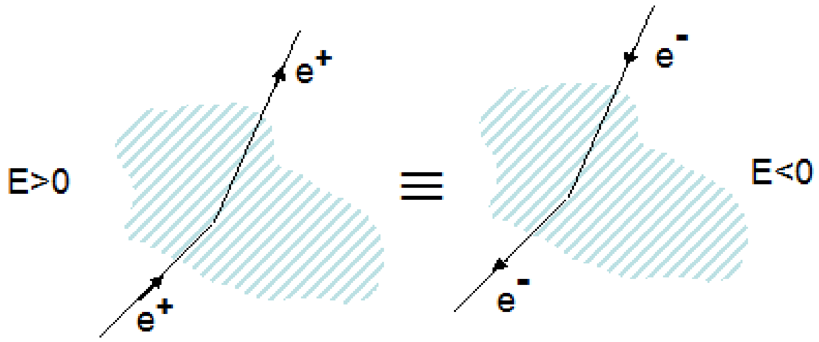
Προσέξτε ότι

$$e^{-iEt} = e^{-i(-E)(-t)}$$

Γι΄ αυτό ακριβώς μπορούμε να περιγράφουμε αρνητικής ενέργειας σωματίδια που πηγαίνουν ‘‘πίσω’’ στο χρόνο ως θετικής ενέργειας αντισωματίδια που πηγαίνουν ‘‘μπροστά’’ στον χρόνο.



Διπλή σκέδαση ηλεκτρονίου από πεδίο. Στο δεύτερο διάγραμμα, μεταξύ των t_1 και t_2, η κατάσταση περιγράφει 3 σωματίδια!! Μπορούμε να περιγράψουμε τα πάντα με την κυματοσυνάρτηση του e^-. Δεν χρειαζόμαστε την κυματοσυνάρτηση του e^+.



Μη σχετικιστική θεωρία διαταραχών

Α θεωρήσουμε ότι γνωρίζουμε τις λύσεις της εξίσωσης Schrödinger για το ελεύθερο σωματίδιο. Η χαμιλτονιανή H_0 είναι ανεξάρτητη από το χρόνο.

$$H_0\phi_n = E_n\phi_n \qquad \text{με} \quad \int_V \phi_m^*\phi_n d^3x = \delta_{mn}$$

(νορμαλισμός=1 σωματίδιο/όγκο, $\rho = |\phi|^2 \rightarrow N = V^{-1/2}$)
Ζητάμε να λύσουμε την

$$\left(H_0 + V(\mathbf{x},t)\right)\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (1)$$

Οι λύσεις ϕ_n αποτελούν πλήρες σύνολο, οπότε μπορούμε να αναλύσουμε την ψ

$$\psi = \sum_n a_n(t)\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_nt}$$

Βάζοντας αυτήν την έκφραση στην εξ.1 παίρνουμε

$$(H_0 + V(\mathbf{x},t))\sum_n a_n(t)\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_nt} = i\frac{\partial}{\partial t}\sum_n a_n(t)\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_nt} \rightarrow$$

$$\sum_n a_n(t)E_n\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_nt} + V(\mathbf{x},t)\sum_n a_n(t)\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_nt} =$$

$$i\sum_n \frac{da_n}{dt}\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_nt} + i\sum_n a_n(t)(-iE_n)\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_nt}$$

Απαλοίφοντας τον πρώτο και τελευταίο όρο στην παραπάνω ισότητα καταλήγουμε στην σχέση

$$V(\mathbf{x},t)\sum_n a_n(t)\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_nt} = i\sum_n \frac{da_n}{dt}\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_nt}$$

Πολλαπλασιάζοντας με ϕ_f^* και ολοκληρώνοντας

$$i\sum_n \frac{da_n}{dt}\int d^3x\,\phi_f^*(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_nt} =$$

$$\sum_n \int d^3x\, V(\mathbf{x},t)a_n(t)\phi_f^*(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{x})e^{-iE_nt} \rightarrow$$

$$\frac{da_f}{dt} = -i\sum_n a_n(t)\int d^3x\,\phi_f^*(\mathbf{x})V(\mathbf{x},t)\phi_n(\mathbf{x})e^{-i(E_n-E_f)t} \qquad (2)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το V δρα σε μια ορισμένη κατάσταση ϕ_i της ελεύθερης χαμιλτονιανής την χρονική στιγμή $t=-T/2$, δηλαδή

$$\text{για} \quad t = -\frac{T}{2}, \qquad \phi_n = \phi_i \rightarrow \begin{array}{ll} a_n = 1, & n = i \\ a_n = 0, & n \neq i \end{array}$$

και τότε

$$\frac{da_f}{dt} = -i \int d^3x \, \phi_f^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}, t) \phi_i(\mathbf{x}) e^{-i(E_i - E_f)t} \qquad (3)$$

Θεωρώντας ότι το V είναι ασθενές και αργά μεταβαλόμενο, η μεταβολή κάθε a_n είναι μικρή και επομένως κάθε a_n με $n \neq i$ θα παραμένει κοντά στο μηδέν. Με αυτό το συλλογισμό η εξ.3 ισχύει για κάθε χρονική στιγμή (και όχι μόνο για $t = -T/2$).

Ολοκληρώνοντας την εξ.3 παίρνουμε

$$a_f = -i \int_{-T/2}^{t} dt' \int d^3x\, \phi_f^* V \phi_i e^{-i(E_i - E_f)t'} \rightarrow \tag{4}$$

$$T_{fi} \equiv a_f(T/2) = -i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d^3x \, \left(\phi_f e^{-iE_f t}\right)^* V \left(\phi_i e^{-iE_i t}\right) \rightarrow$$

$$T_{fi} = -i \int d^4x\, \phi_f^*(\mathbf{x}, t) V(\mathbf{x}, t) \phi_i(\mathbf{x}, t)$$

Για να ισχύει η προσέγγιση θα πρέπει $a_f(t) << 1$. Μπορούμε να αποδόσουμε στο $|T_{fi}|^2$ την έννοια της πιθανότητας ότι το σωματίδιο από την αρχική κατάσταση i πηγαίνει στην τελική f;

Ας υποθέσουμε ότι $V(\mathbf{x},t) = V(\mathbf{x})$. Τότε

$$
\begin{aligned}
T_{fi} = &- i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d^3x \, \phi_f^* e^{iE_f t} V(\mathbf{x}) \phi_i e^{-iE_i t} = \\
= &- i \left[\int d^3x \, \phi_f^* V \phi_i \right] \int_{-T/2}^{T/2} dt \, e^{-i(E_i - E_f)t} = \\
= &- i V_{fi} \, 2\pi \, \delta(E_f - E_i)
\end{aligned}
$$

όπου ορίσαμε V_{fi} το ολοκλήρωμα μέσα στην αγκύλη της δεύτερης σειράς ενώ η συνάρτηση δ δείχνει την διατήρηση της ενέργειας. Αλλά για $E_f = E_i$, η αρχή της αβεβαιότητας μας λέει ότι χρειαζόμαστε άπειρο χρόνο για να μεταβούμε από τη μια κατάσταση στην άλλη. Γι' αυτό καλύτερα ορίζουμε την ποσότητα

$$
W = \lim_{T\to\infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |V_{fi}|^2 \, 4\pi^2 \, \left[\delta(E_f - E_i)\right]^2
$$

που αποτελεί την πιθανότητα μετάπτωσης ανά μονάδου χρόνου (transition probability per unit time). Ο τετραγωνισμός της συνάρτησης δ δίνει

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^2 \left[\delta(E_f - E_i)\right]^2 &= \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E_f - E_i)t} \delta(E_f - E_i) 2\pi \\
&= T\, 2\pi\, \delta(E_f - E_i)
\end{aligned}
$$

οπότε παίρνουμε

$$
W = |V_{fi}|^2\, 2\pi\, \delta(E_f - E_i)
$$

Αυτή η τελευταία εξίσωση έχει έννοια αν ολοκληρωθεί σε ένα σύνολο τελικών καταστάσεων. Συνήθως ξεκινάμε από μια καθορισμένη κατάσταση και καταλήγουμε σε ένα σύνολο τελικών καταστάσεων με πυκνότητα $\rho(E_f)$ (δηλαδή $\rho(E_f)dE_f$ είναι ο

αριθμός καταστάσεων με ενέργεια μεταξύ των E_f και $E_f + dE_f$).
Οπότε ορίζουμε ως ρυθμό μετάπτωσης (transition rate)

$$W_{fi} = \int dE_f \, \rho(E_f) W = 2\pi \int dE_f \, \rho(E_f) |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) = $$
$$= 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_i)$$

Μπορούμε να πάμε μία τάξη προσέγγισης παρακάτω βάζοντας την λύση για το a_f, εξ.4, στην διαφορική εξίσωση του a_f, εξ.2

$$\frac{da_f}{dt} = ... + (-i) \sum_{n \neq i} \left[(-i) \int_{-T/2}^{t} dt' \, V_{ni} e^{-i(E_i - E_n)t'} \right] V_{fn} e^{-i(E_n - E_f)t}$$

όπου ... είναι ο όρος πρώτης τάξης και η έκφραση μέσα στις αγκύλες είναι ο συντελεστής a_n. Οπότε, έχουμε

$$T_{fi} = ...+(-i)^2 \sum_{n\neq i} V_{fn}V_{ni} \int_{-T/2}^{T/2} dt\, e^{-i(E_n-E_f)t} \int_{-T/2}^{t} dt'\, e^{-i(E_i-E_n)t'}$$

Για να έχει νόημα η δεύτερη ολοκλήρωση εισάγουμε μια απειροστή ποσότητα $\epsilon > 0$ και στο τέλος βέβαια $\epsilon \to 0$

$$\int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{-i(E_i-E_n+i\epsilon)t'} = i\frac{e^{-i(E_i-E_n+i\epsilon)t}}{(E_i - E_n + i\epsilon)}$$

και το T_{fi} γράφεται

$$T_{fi} = ... + (-2\pi i)\sum_{n\neq i} \frac{V_{fn}V_{ni}}{E_i - E_n + i\epsilon}\delta(E_f - E_i)$$

Άσκηση 4 Δείξτε ότι ο ρυθμός μετάβασης i→f για την προσέγγιση 2ης τάξης δίνεται από τη σχέση $W_{fi} = 2\pi \left|V_{fi}\right|^2 \rho(E_i)$, όπου το V_{fi} αντικαθίσταται από τη σχέση

$$V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n - i\epsilon} V_{ni} + \ldots$$

Ποιά είναι η σχέση για την επόμενη διόρθωση (3ης τάξης σε V).

Δηλαδή για κάθε σημείο αλληλεπίδρασης έχουμε έναν παράγοντα V_{ij} και για κάθε ενδιάμεση διάδοση έχουμε ένα διαδότη $\sim 1/(E_i - E_j)$. Αυτή η ενδιάμεση κατάσταση είναι ‘‘εικονική’’ (virtual) με την έννοια ότι $E_i \neq E_j$ (δεν διατηρείται η ενέργεια) αλλά βέβαια $E_f = E_i$ που φαίνεται από την παρουσία της $\delta(E_f - E_i)$. Όλα τα παραπάνω πρέπει να γενικευτούν για σχετικιστικά σωματίδια και αντισωματίδια.

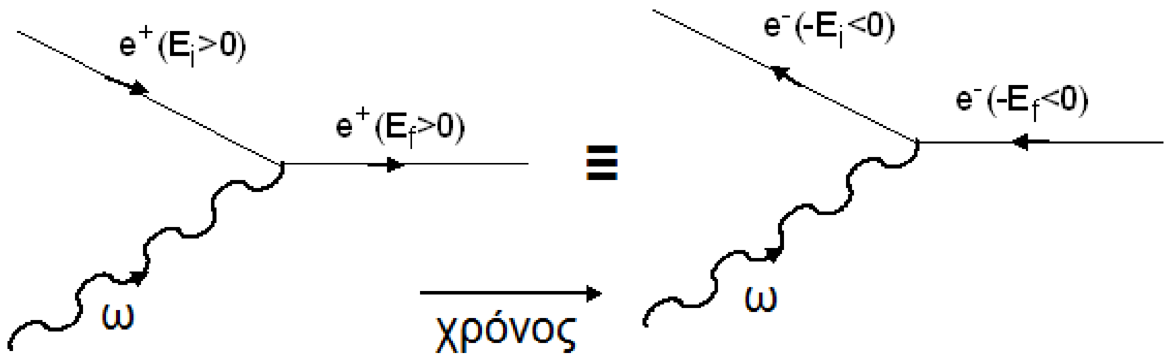
Κανόνες για πλάτης σκέδαση στην εικόνα Feynman-Stückelberg

Πρέπει λοιπόν να εισάγουμε αντισωματίδια που πηγαίνουν πίσω στο χρόνο. Βέβαια έως τώρα δεν έχουμε δουλέψει σε ‘‘συναλλοίωτο περιβάλλον’’ (το δυναμικό $V(\mathbf{x})$ ήταν στατικό).
Πώς θα περιγράψουμε κρούσεις σωματιδίων;
Ας κάνουμε μερικά προθύστερα σχήματα. Ας εισάγουμε το φωτόνιο ως το σωμάτιο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και ας δούμε την επίδραση του δυναμικού ως σκέδαση του σωματιδίου με το φωτόνιο. Τότε χρειαζόμαστε μια χρονική εξάρτηση για το φωτόνιο: $e^{-i\omega t}$. Το χρονικό ολοκλήρωμα στο T_{fi} γίνεται

$$\frac{1}{2\pi}\int dt\ \left(e^{-iE_f t}\right)^*\ e^{-i\omega t}\, e^{-iE_i t} = \delta(E_f - \omega - E_i)$$

απ′ όπου φαίνεται ότι $E_f = E_i + \omega$. Για αντισωματίδιο θα έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int dt\, \left(e^{-i(-E_i)t}\right)^* e^{-i\omega t}\, e^{-i(-E_f)t} = \delta(E_f - \omega - E_i)$$



οπότε και πάλι έχουμε $E_f = E_i + \omega$. Δηλαδή ο κανόνας είναι

$$\int d^4x\, \phi^*_{\text{εκτός}}\, V\, \phi_{\text{εντός}}$$

όπου ϕ είναι για σωματίδια και όχι για αντισωματίδια.

Άσκηση 5 Δείξτε ότι ο κανόνας $\int \phi^*_{\text{outgoing}} V \phi_{\text{ingoing}}\, d^4x$ πληροί τη διατήρηση ενέργειας στην περίπτωση της δημιουργίας ζεύγους e^+e^- ή στην αντίστοιχη εξαΰλωση. Να γίνει το ίδιο και για την διατήρηση της ορμής. Ο όρος του φωτονίου είναι $e^{-i(\omega t - \mathbf{px})}$.