Θεωρήματα ίχνών και πίνακες γ

Η βασική σχέση είναι η $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$. Βασικά θεωρήματα είναι τα ακόλουθα

- $TrI = 4$
- $Tr[\gamma^\mu] = 0$
- $Tr[$περιττός αριθμός πινάκων γ$] = 0$
- $Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$ οπότε $Tr[\not{a}\not{b}] = 4a \cdot b$
- για n άρτιος ακέραιος

$$Tr[\not{a}_1\not{a}_2...\not{a}_n] = (a_1 \cdot a_2)Tr[\not{a}_3...\not{a}_n] - (a_1 \cdot a_3)Tr[\not{a}_2\not{a}_4...\not{a}_n] + ...$$
$$+ (a_1 \cdot a_n)Tr[\not{a}_2\not{a}_3...\not{a}_{n-1}]$$

οπότε

$$Tr[\not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4] = 4[(a_1{\cdot}a_2)(a_3{\cdot}a_4) - (a_1{\cdot}a_3)(a_2{\cdot}a_4) + (a_1{\cdot}a_4)(a_2{\cdot}a_3)]$$

- $Tr[\gamma^5] = 0$
- $Tr[\gamma^5 \not{a}\not{b}] = 0$
- $Tr[\gamma^5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} a_\mu b_\nu c_\rho d_\sigma$

Άσκηση 29 Δείξτε τα παραπάνω θεωρήματα των ιχνών

Σκέδαση $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ **και** $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

Ξαναγυρίζουμε στην σκέδαση $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ Είχαμε φτάσει στο σημείο να γράψουμε το τετράγωνο του αναλλοίωτου πλάτους

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{q^4} L_{(e)}^{\mu\nu} L^{(\mu)}_{\mu\nu}$$

όπου

$$L^{\mu\nu}_{(e)} = \frac{1}{2} Tr\left[(\not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\nu\right]$$

και όμοια και για το

$$L_{(\mu)\mu\nu} = \frac{1}{2} Tr\left[(\not{p}' + m)\gamma_\mu(\not{p} + m)\gamma_\nu\right]$$

Από τις ιδιότητες των ιχνών των πινάκων παίρνουμε

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu}_{(e)} &= \frac{1}{2} Tr\left[(\not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\nu\right] \\ &= \frac{1}{2} Tr\left[\not{k}'\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu + m^2\gamma^\mu\gamma^\nu\right] \\ &= \frac{1}{2} 4\left[k^{\mu\prime}k^\nu + k^{\nu\prime}k^\mu - g^{\mu\nu}(kk' - m^2)\right] \end{aligned}$$

και

$$L_{(\mu)\mu\nu} = 2\left[p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - g_{\mu\nu}(pp' - m^2)\right]$$

Οπότε

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu}_{(e)} L_{(\mu)\mu\nu} =$$

$$= \frac{8e^4}{q^4} \left[(k' \cdot p')(k \cdot p) + (k' \cdot p)(k \cdot p') \right.$$

$$\left. - m^2 p' \cdot p - M^2 k' \cdot k + 2m^2 M^2 \right]$$

Για την περίπτωση που $E >> m, M$ παίρνουμε

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{(k-k')^4} \left[(k' \cdot p')(k \cdot p) + (k' \cdot p)(k \cdot p') \right]$$

Υπενθυμίζοντας ότι

$$s = (k+p)^2 \simeq 2k \cdot p = 2k' \cdot p'$$

$$t = (k-k')^2 \simeq -2k \cdot k' = -2p \cdot p'$$

$$u = (k-p')^2 \simeq -2k \cdot p' = -2k' \cdot p$$

έχουμε τελικά

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \frac{s^2+u^2}{t^2}, \qquad \text{για την} \quad e^-\mu^- \to e^-\mu^-$$

Για το $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$, απλά χρειαζόμαστε την αντικατάσταση $s \leftrightarrow t$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \frac{t^2+u^2}{s^2}, \qquad \text{για την} \quad e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$$

Γνωρίζοντας ότι

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{KM}} = \frac{1}{64\pi^2 s}\,\frac{p_f}{p_i}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}$$

παίρνουμε, για την $e^- e^+ \to \mu^- \mu^+$

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{KM}} = \frac{1}{64\pi^2 s}\,2e^4\,\frac{t^2+u^2}{s^2} = \frac{1}{64\pi^2 s}\,2e^4\,\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) =$$

$$= \frac{\alpha^2}{4s}(1+\cos^2\theta), \quad \text{όπου} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

Για να βρούμε την συνολική ενεργό διατομή θα πρέπει να ολοκληρώσουμε

$$\int d\Omega(1+\cos^2\theta) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta(1+\cos^2\theta)d\theta = 2\pi\,\frac{8}{3} = \frac{16}{3}\pi$$

Οπότε παίρνουμε

$$\sigma(e^- e^+ \to \mu^- \mu^+) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

Διατήρηση της ελικότητας σε μεγάλες ενέργειες

Έχουμε ήδη δει ότι για $E >> m$ ισχύει

$$P_L u = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)u \equiv u_L \quad \text{με αρνητική ελικότητα } \lambda = -1/2$$

$$P_R u = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)u \equiv u_R \quad \text{με θετική ελικότητα } \lambda = +1/2$$

Ας το δούμε αυτό καλύτερα πηγαίνοντας στην γνωστή μορφή των λύσεων του Dirac για θετικές ενέργειες

$$u^{(1,2)} = \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} \qquad \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι αυτή η επιλογή του $\chi^{(s)}$ αντιστοιχεί στην ορμή $(0, 0, p)$ και ότι το $u^{(1)}$ έχει θετική ελικότητα $(\lambda = +1/2)$, ενώ το $u^{(2)}$ έχει αρνητική ελικότητα $(\lambda = -1/2)$.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3\chi^{(s)} \\ \frac{p}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\sigma_3 p}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

μιας και $\sigma_3\chi^{(1)} = \chi^{(1)}$ και $\sigma_3\chi^{(2)} = -\chi^{(2)}$ Όμοια, το $u^{(3)}(-\mathbf{p}) = v^{(2)}(\mathbf{p})$ έχει θετική ελικότητα $(\lambda = +1/2)$, ενώ το $u^{(4)}(-\mathbf{p}) = v^{(1)}(\mathbf{p})$ έχει αρνητική ελικότητα $(\lambda = -1/2)$.

Για υψηλές ενέργειες, $E + m \sim E$ και $\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \sim \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E} = \frac{\sigma_3 p}{E} = \sigma_3$. Και τα $u^{(1,2)}$ γίνονται

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Ομοια, οι αρνητικής ενέργειας λύσεις

$$u^{(3,4)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad u^{(3,4)}(-\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

γράφονται

$$u^{(3)}(-\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad u^{(4)}(-\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sigma_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Είχαμε, επίσης, δει ότι για υψηλές ενέργειες ο τελεστής της ελικότητας $\mathbf{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ και ο τελεστής της χειραλικότητας γ^5 έχουν την ίδια δράση: $\gamma^5 \sim \mathbf{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$, δηλαδή $\gamma^5 = \mathrm{diag}(\sigma_3, \sigma_3)$. Οπότε

$$P_L = \frac{1}{2}(1+\gamma^5) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sigma_3 & 0 \\ 0 & 1+\sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$P_R = \frac{1}{2}(1-\gamma^5) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\sigma_3 & 0 \\ 0 & 1-\sigma_3 \end{pmatrix}$$

Η δράση του $\frac{1}{2}(1 \pm \sigma_3)$ στα $\chi^{(s)}$ είναι

$$\frac{1}{2}(1+\sigma_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}(1-\sigma_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{2}(1+\sigma_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \frac{1}{2}(1-\sigma_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Οπότε

$$P_R u^{(1)} = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)u^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sigma_3 & 0 \\ 0 & 1+\sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = u^{(1)}$$

ενώ $P_R u^{(2)} = 0$. Άρα, το P_R προβάλλει το $u^{(1)}$, πού έχει θετική ελικότητα ($\lambda = +1/2$). Όμοια, ο P_L προβάλλει το $u^{(2)}$ πού έχει αρνητική ελικότητα ($\lambda = -1/2$). Αν εφαρμόσουμε τους P_{LR} στους $u^{(3,4)}(-\mathbf{p})$, θα δούμε ότι $P_R u^{(3)}(-\mathbf{p}) = u^{(3)}(-\mathbf{p})$, $P_L u^{(3)}(-\mathbf{p}) = 0$, $P_L u^{(4)}(-\mathbf{p}) = u^{(4)}(-\mathbf{p})$ και $P_R u^{(4)}(-\mathbf{p}) = 0$. Επομένως, το $u^{(3)}(-\mathbf{p})$ είναι R και το $u^{(4)}(-\mathbf{p})$ είναι L. Αλλά, αυτά αντιστοιχούν σε ''έλλειψη'' ηλεκτρονίου με $-\mathbf{p}$, άρα το αντίστοιχο ποζιτρόνιο έχει αντίθετη χειραλικότητα: το

$v^{(2)}(\mathbf{p}) = u^{(3)}(-\mathbf{p})$ είναι L και το $v^{(1)}(\mathbf{p}) = u^{(4)}(-\mathbf{p})$ είναι R.
Συνοψίζουμε:

Σε μεγάλες ενέργειες
το $u^{(1)}(\mathbf{p})$ έχει $\lambda = +1/2$ και είναι R,
το $u^{(2)}(\mathbf{p})$ έχει $\lambda = -1/2$ και είναι L,
το $v^{(2)}(\mathbf{p})$, έχει $\lambda = +1/2$ και είναι L,
το $v^{(1)}(\mathbf{p})$, έχει $\lambda = -1/2$ και είναι R,

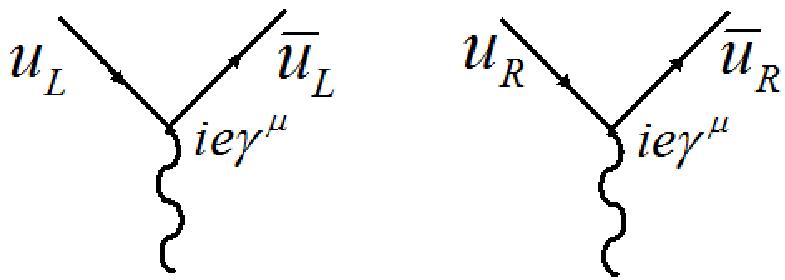
Το ρεύμα $\bar{u}\gamma^\mu u$ γράφεται

$$\bar{u}\gamma^\mu u = \bar{u}(P_L + P_R)\gamma^\mu(P_L + P_R)u = \bar{u}P_R\gamma^\mu P_L u + \bar{u}P_L\gamma^\mu P_R u =$$

$$= u^\dagger\gamma^0 P_L\gamma^\mu u_R + u^\dagger\gamma^0 P_R\gamma^\mu u_L = u^\dagger P_R\gamma^0\gamma^\mu u_R + u^\dagger P_L\gamma^0\gamma^\mu u_L =$$

$$= (P_R u)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu u_R + (P_L u)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu u_L = \overline{u_R} \gamma^\mu u_R + \overline{u_L} \gamma^\mu u_L$$

διότι $P_L P_R = P_R P_L = 0$, $\gamma^{5^2} = 1$, $\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$. Επομένως, παρατηρούμε ότι η ηλεκτροδυναμική, για μεγάλες ενέργειες, $E >> m$, διατηρεί την ελικότητα. Το ίδιο ισχύει και για την περίπτωση που έχουμε ψευδοδιάνυσμα ($\gamma^\mu \gamma^5$) αντί διάνυσμα (γ^μ) στην αλληλεπίδραση.



Στην εξαΰλωση και την δίδυμη γένεση, το ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο έχουν αντίθετη χειραλικότητα (και επομένως, σε μεγάλες ενέργειες αντίθετη ελικότητα).

$$\overline{u^{(3,4)}(-\mathbf{p})} P_R \gamma^\mu P_L u^{(1,2)} =$$

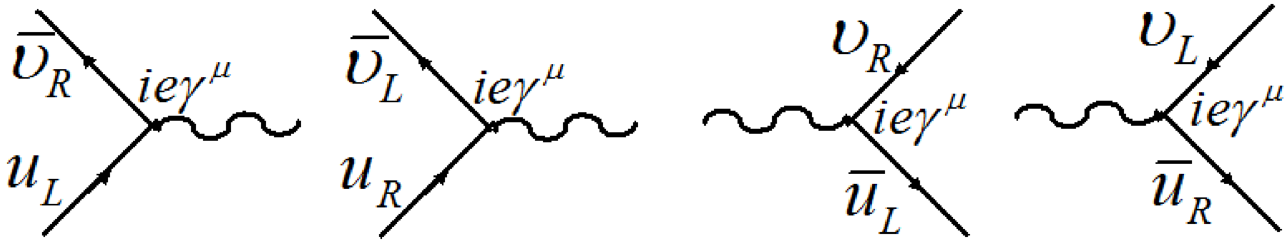
$$u^{(3,4)}(-\mathbf{p})^\dagger \gamma^0 P_R \gamma^\mu u_L^{(2)} = \left(P_L u^{(3,4)}(-\mathbf{p})\right)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu u_L^{(2)} =$$

$$\left(u_L^{(4)}(-\mathbf{p})\right)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu u_L^{(2)} = \left(v_R^{(1)}(\mathbf{p})\right)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu u_L^{(2)} = \overline{v_R^{(1)}(\mathbf{p})} \gamma^\mu u_L^{(2)}$$

και όμοια

$$\overline{u^{(3,4)}(-\mathbf{p})} P_L \gamma^\mu P_R u^{(1,2)} = \overline{v_L^{(2)}(\mathbf{p})} \gamma^\mu u_R^{(1)}$$

Αντίστοιχα ισχύει και για την δίδυμη γένεση.



Άσκηση 30 Δείξτε ότι στην διάσπαση $\mu^- \to e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$ το e είναι L. Στην $\mu^+ \to e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e$, ποια είναι η χειραλικότητα του e;

Μπορούμε μόνο με την διατήρηση της στροφορμής να υπολογίσουμε το αναλλοίωτο πλάτος για την $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. Όπως είδαμε, το ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο (στην αρχική κατάσταση) όπως και το μιόνιο και το αντιμιόνιο (στη τελική κατάσταση) θα πρέπει να έχουν αντίθετη ελικότητα. Επομένως, στο Κέντρο Μάζας, θά εχουμε τις τέσσερεις παρακάτω περιπτώσεις, όπου με παχιά βέλη δείχνουμε το spin και σημειώνεται και η αντίστοιχη ελικότητα.