Άσκηση 11 Δείξτε ότι για τη διάσπαση $A \to 1 + 2$, και για το σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου A, παίρνουμε

$$\Gamma = \frac{p_f}{32\pi^2 m_A^2} \int |\mathcal{M}|^2 \, d\Omega$$

(Π)

Λύση

$$\Gamma = \int \frac{1}{2E_A} |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \, \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_A) =$$

$$= \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 m_A} \frac{1}{E_1 E_2} d^3 p_1 \, d^3 p_2 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_A) =$$

$$= \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 m_A} \frac{1}{E_1 E_2} d^3 p_1 \, \delta(E_1 + E_2 - m_A) =$$

$$= \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 m_A} \frac{d\Omega}{E_1 E_2} p_1^2 dp_1 \delta\left(\sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_2^2} - m_A\right)$$

$$= \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 m_A} \frac{d\Omega}{E_1 E_2} \int p_1^2 dp_1 \delta\left(\sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_1^2} - m_A\right)$$

Αλλά ($m_A = E_1 + E_2$, $p_1 = p_2 = p_f$)

$$\int p_1^2 dp_1 \delta\left(\sqrt{m_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + p_1^2} - m_A\right) = \frac{p_f^2}{p_f \frac{m_A}{E_1 E_2}}$$

Οπότε

$$\Gamma = \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 m_A} \frac{d\Omega}{E_1 E_2} \frac{p_f}{m_A} E_1 E_2 =$$

$$= \frac{p_f}{32\pi^2 m_A^2} \int |\mathcal{M}|^2 d\Omega$$

Άσκηση 14 Δείξτε ότι για την σκέδαση $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$, η φυσική περιοχή των μεταβλητών είναι $t = 0$ και $su = (M^2 - m^2)$ όπου M και m είναι οι μάζες του μιονίου και του ηλεκτρονίου. Σχεδιάστε το διάγραμμα Mandelstam. (Π)

Λύση

Στο Κ.Μ. έχουμε

$$s = (p_A + p_B)^2 = m^2 + M^2 + 2(E_A E_B + p^2) \geq (m + M)^2$$

$$t = (p_A - p_C)^2 = 2m^2 - 2p_C p_A = 2m^2 - 2(E_A^2 - p^2 \cos\theta) =$$

$$= 2p^2(\cos\theta - 1), \quad \text{άρα} \quad -4p^2 \leq t \leq 0$$

Πρέπει να εκφράσουμε το p ως συνάρτηση του s ή/και u για να βρούμε την καμπύλη όπου το t είναι ελάχιστο. Από την έκφραση για το s έχουμε

$$-2E_A E_B = 2p^2 - s + M^2 + m^2$$

$$4(m^2 + p^2)(M^2 + p^2) = (2p^2 - s + M^2 + m^2)^2$$

$$4m^2 M^2 = (M^2 + m^2 - s)^2 - 4p^2 s$$

$$4p^2 = \frac{(M^2 + m^2 - s)^2 - 4m^2 M^2}{s}$$

Επομένως

$$t_{min} = -\frac{1}{s}\left[(M^2 + m^2 - s)^2 - 4m^2 M^2\right]$$

που είναι μια παραβολή. Να βρούμε τις ασύπτωτες ευθείες

$$\text{για} \quad s \to 0^+ \quad \text{τότε} \quad t_{min} \to -\infty$$

Για $s \to \infty$ τότε $t_{min} \to -\infty$ με ασύπτωτη που την βρίσκουμε γράφοντας το t_{min}

$$t_{min} = -\left(\frac{s^2}{s} - \frac{2s(M^2+m^2)}{s} + \frac{1}{s}(\cdots)\right)$$

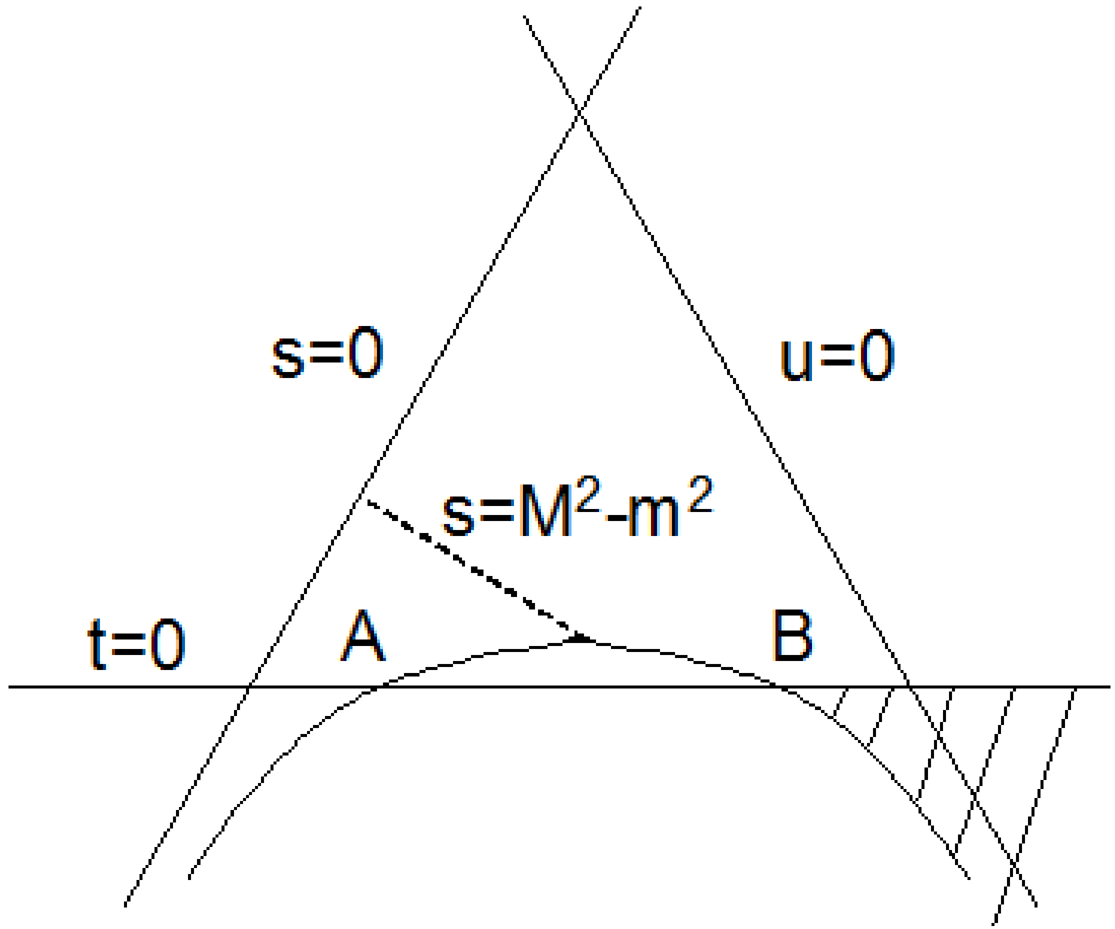
οπότε η ασύμπτωτη είναι η $t = -s + 2(M^2+m^2)$ ή άλλως $0 = -t - s + 2(M^2+m^2)$ ή $u = 0$. Τα σημεία Α και Β αντιστοιχούν στον μηδενισμό της t_{min}

$$(M^2+m^2-s)^2 = 4m^2M^2$$

$$s^2 + (M^2+m^2)^2 - 2s(M^2+m^2) = 4M^2m^2$$

$$\left[s-(M+m)^2\right]\left[s-(M-m)^2\right] = 0$$

Επίσης μπορούμε να βρούμε το μέγιστο της καμπύλης t_{min}. Μηδενίζοντας την παράγωγο ως προς s βρίσκουμε ότι το μέγιστο αντιστοιχεί στην τιμή $s = (M^2 - m^2)$ που δεν ανήκει στην φυσική περιοχή του s (στην αρχή της άσκησης είχαμε βρει $s \geq (m+M)^2$). Γι' αυτήν την τελευταία τιμή του s, το $t = 0$. Είναι το σημείο Β.



Από την εξίσωση του t_{min}, εύκολα παίρνουμε ότι

$$st = 4M^2m^2 - (M^2 + m^2 - s)^2 \rightarrow$$

$$s(2M^2 + 2m^2 - s - u) = 4M^2m^2 - M^4 - m^4 - s^2$$

$$- 2M^2m^2 + 2M^2s + 2m^2s \rightarrow$$

$$- su = 2M^2m^2 - M^4 - m^4 = -(M^2 - m^2)^2$$