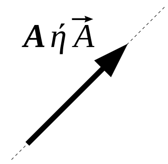
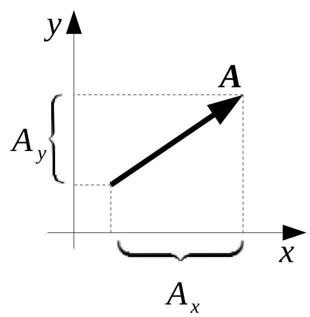
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΟΗΘΗΜΑ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

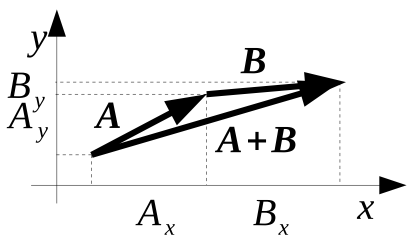
Διάνυσμα: κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά) και μέτρο.
Συμβολισμός: $\mathbf{A}$ ή $\vec{A}$.



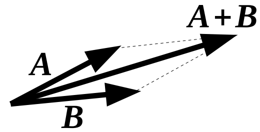
Αναπαράσταση μέσω των συνιστωσών του: $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$ σε 2-διαστάσεις και $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ σε 3-διαστάσεις.



Προσοχή: οι συνιστώσες έχουν πρόσημο που εύκολα γίνεται κατανοητό από την σχέση της φοράς του διανύσματος και της θετικής κατεύθυνσης του αντίστοιχου άξονα.
Αντίθετο διάνυσμα: $-\mathbf{A}$, ή σε συνιστώσες $-\mathbf{A} = (-A_x, -A_y, -A_z)$ αν $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$.
Μέτρο διανύσματος: $|\mathbf{A}|$ ή απλά A, με $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.
Μοναδιαίο διάνυσμα: το διάνυσμα που έχει μέτρο μονάδα. Συμβολίζεται με $\hat{\mathbf{A}}$.
Άθροιση διανυσμάτων: $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ με $\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z) = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$.



Κανόνας παραλληλογράμμου. Από την παραλληλία των πλευρών του παραλληλογράμμου, το άθροισμα δύο διανυσμάτων περιγράφεται επίσης από την διαγώνιο παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα.



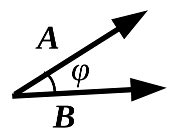
Προσεταιριστική ιδιότητα για την άθροιση διανυσμάτων: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.
Αφαίρεση διανυσμάτων: $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.
Γινόμενο βαθμωτού επί διάνυσμα: $\mathbf{C} = k\mathbf{A}$ με $\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z) = (kA_x, kA_y, kA_z)$.
Μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{A}$:

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{A}\,\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}}{A}$$

και το μέτρο του

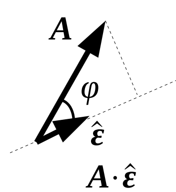
$$\left|\hat{\mathbf{A}}\right| = \left(\frac{A_x}{A}, \frac{A_y}{A}, \frac{A_z}{A}\right) = \sqrt{\frac{A_x^2}{A^2} + \frac{A_y^2}{A^2} + \frac{A_z^2}{A^2}} = 1$$

Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων: είναι βαθμωτό, συμβολίζεται $c = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ όπου $c = AB\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.



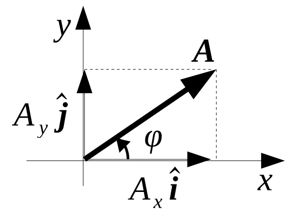
Προβολή του διανύσματος $\mathbf{A}$ στην διεύθυνση που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\epsilon}$:

$$\text{προβολή} = \mathbf{A} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = A\cos(\mathbf{A}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}) = A\cos\phi$$



Αν $\hat{\mathbf{i}}$ και $\hat{\mathbf{j}}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες x, y του επιπέδου, τότε

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y) = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$

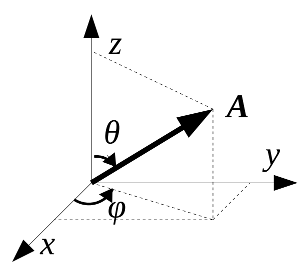


Οι δύο όροι αποτελούν τις συνιστώσες του $\mathbf{A}$ στους 2 άξονες με

$$A_x = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{i}} = A\cos\phi, \qquad A_y = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{j}} = A\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) = A\sin\phi$$

Στις 3-διαστάσεις, προτιμάται να χρησιμοποιούνται οι γωνίες θ και ϕ, αντί των τριων γωνιών που σχηματίζει το διάνυσμα με τους τρεις άξονες:

$$A_z = A\cos\theta, \qquad A_x = A\sin\theta\cos\phi, \qquad A_y = A\sin\theta\sin\phi$$

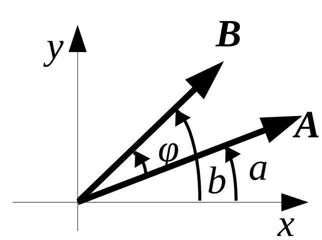


Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να εκφραστεί και μέσω των προβολών των δύο διανυσμάτων.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

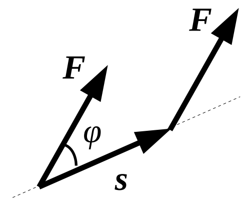
Η απόδειξη για τις 2-διαστάσεις

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= A_xB_x + A_yB_y = A\cos a\, B\cos b + A\sin a\, B\sin b = \\ &= AB\left(\cos a\cos b + \sin a\sin b\right) = AB\cos(b-a) = AB\cos\phi\end{aligned}$$

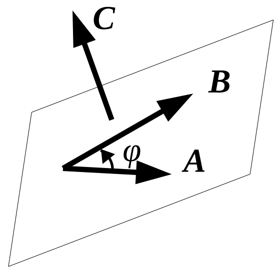


Φυσικό μέγεθος που ορίζεται ως εσωτερικό γινόμενο είναι το έργο W δύναμης $\mathbf{F}$ που μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά το $\mathbf{s}$ (θεωρώντας ότι η δύναμη διατηρεί την κατεύθυνσή της)

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = Fs\cos\phi$$



Εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων: είναι (ελεύθερο) διάνυσμα και συμβολίζεται με $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Το διάνυσμα $\mathbf{C}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τα δύο διανύσματα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ ενώ η φορά του δίνεται από το κανόνα της (δεξιόστροφης) βίδας. Το μέτρο του είναι $C = AB \sin\phi$ όπου η γωνία ϕ είναι προσανατολισμένη και κατευθύνεται από το πρώτο διάνυσμα του εξωτερικού γινομένου προς το δεύτερο.



Οι συνιστώσες του $\mathbf{C}$ (με $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ και $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$) είναι:

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad C_y = -A_x B_z + A_z B_x, \quad C_z = A_x B_y - A_y B_x$$

Εισάγοντας την έννοια της ορίζουσας, μπορούμε να γράψουμε το εξωτερικό γινόμενο με ένα πιο ευκολομνημόνευτο τρόπο. Κατ΄ αρχάς ας ορίσουμε την ορίζουσα 2×2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

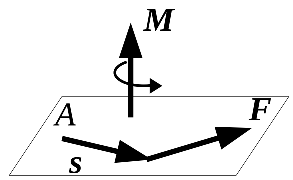
και η ορίζουσα 3×3

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right) \end{aligned}$$

Οπότε, μπορούμε να γράψουμε

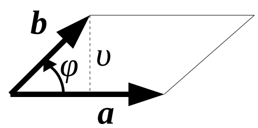
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}}\left(A_y B_z - A_z B_y\right) - \hat{\mathbf{j}}\left(A_x B_z - A_z B_x\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(A_x B_y - A_y B_x\right)$$

Φυσικό μέγεθος που ορίζεται ως εξωτερικό γινόμενο είναι η ροπή $\mathbf{M}$ δύναμης $\mathbf{F}$ ως προς σημείο A: $\mathbf{M} = \mathbf{s} \times \mathbf{F}$ όπου $\mathbf{s}$ είναι το διάνυσμα από το σημείο A έως το σημείο εφαρμογής της δύναμης.



Μια επίπεδη επιφάνεια περιγράφεται από διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια με μέτρο ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας. Το εμβαδόν E ενός παραλληλογράμμου, που καθορίζεται από τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, είναι το μέτρο του $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\sin\phi = a\upsilon$$



Ιδιότητες του εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) = A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} \\
\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \\
\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= 0 \quad \text{αν τα } \mathbf{A} \text{ και } \mathbf{B} \text{ είναι κάθετα} \\
(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 &= A^2 + B^2 + 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \\
\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= 0 \quad \text{αν τα } \mathbf{A} \text{ και } \mathbf{B} \text{ έχουν ίδια διεύθυνση} \\
\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= -\mathbf{B}\times\mathbf{A}
\end{aligned}$$

Τριπλό γινόμενο: είναι βαθμωτό και ορίζεται ως $k = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$. Η παρένθεση δεν είναι αναγκαία μιας και αν γίνει πρώτα το εσωτερικό γινόμενο η επόμενη πράξη δεν έχει νόημα. Το τριπλό γινόμενο γράφεται εύκολα με την χρήση της ορίζουσας

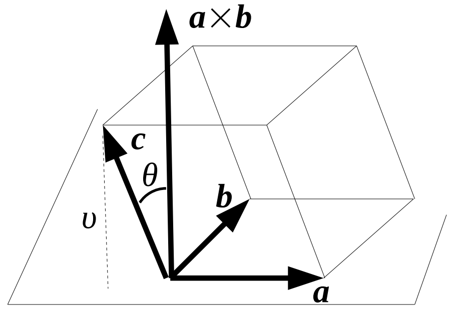
$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = C_x\left(A_yB_z - A_zB_y\right) - C_y\left(A_xB_z - A_zB_x\right) + C_z\left(A_xB_y - A_yB_x\right)$$

Προσέξτε ότι οι τρεις παρενθέσεις αντιστοιχούν στις τρεις συνιστώσες του διανύσματος $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, οπότε στην τελευταία σχέση εφαρμόσαμε τον κανόνα του εσωτερικού γινομένου το διανύσματος $\mathbf{C}$ με το διάνυσμα $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$.

Ο όγκος παραλληλεπιπέδου εκφράζεται με το τριπλό γινόμενο των τριών διανυσμάτων που ορίζουν το παραλληλεπίπεδο $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$. Ο όγκος δίνεται από το γινόμενο του εμβαδού της βάσης επί το ύψος του παραλληλεπιπέδου. Έχουμε ήδη δει ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου-βάσης δίνεται από το μέτρο του εξωτερικού γινομένου $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Οπότε, το εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\,\cos\theta = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\,\upsilon$$

δίνει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου.



ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Η παράγωγος μιας συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 συμβολίζεται με $f'(x)|_{x_0}$ ή $f'(x_0)$, και ορίζεται ως το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Αυστηρά μαθηματικά θα πρέπει το όριο $x \to x_0^+$ και $x \to x_0^-$ να συμπίπτουν.
Ένας άλλος συμβολισμός της παραγώγου, πολύ χρήσιμος στην Φυσική είναι ο ακόλουθος

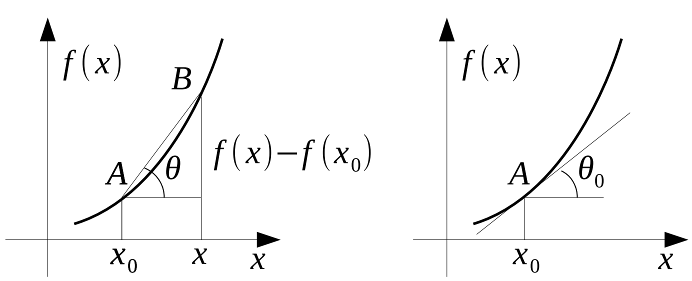
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \equiv \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$$

όπου το Δx είναι στην γειτονιά του x_0.
Η παράγωγος στο σημείο x_0 και η γωνία της εφαπτομένης ευθείας στην καμπύλη της συνάρτησης στο σημείο x_0. Από το σχήμα βλέπουμε ότι

$$\tan\theta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Στο όριο $x \to x_0$, το τμήμα AB γίνεται εφαπτομενικό στην καμπύλη της συνάρτησης στο σημείο x_0. Οπότε, η εφαπτομένη της γωνίας θ, στο όριο αυτό, θα είναι ίση με την παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο αυτό

$$\tan\theta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \tan\theta_0 = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$$



Διαφορικό μιας συνάρτησης. Γράφοντας

$$\Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x}\,\Delta x$$

πηγαίνοντας στο όριο $\Delta x \to 0$, το κλάσμα γίνεται η παράγωγος της συνάρτησης. Το απειροστό πια Δx το συμβολίζουμε με dx και το, επίσης απειροστό, Δf με df, και γράφουμε

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx$$

Τα dx και df είναι το διαφορικό του x και το διαφορικό της συνάρτησης αντίστοιχα.
Κανόνες παραγώγησης:

$$\begin{aligned}
\frac{d(f(x)+g(x))}{dx} &= \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}, \qquad \frac{d(cf(x))}{dx} = c\frac{df(x)}{dx} \\
\frac{d(f(x)g(x))}{dx} &= \frac{df(x)}{dx}\, g(x) + f(x)\, \frac{dg(x)}{dx} \\
\frac{f(x)/g(x)}{dx} &= \frac{1}{g^2(x)} \left(\frac{df(x)}{dx}\, g(x) - f(x)\, \frac{dg(x)}{dx} \right)
\end{aligned}$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης (κανόνας της αλυσίδας)

$$y = f(u), \quad u = g(x), \qquad \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\,\frac{du}{dx}$$

Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

$$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

τότε

$$\frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{\frac{df}{dx}}$$

Εφαρμογή: Αν έχουμε τις συναρτήσεις $x = g(t)$, $y = f(t)$, οπότε μπορούμε να γράψουμε $y = f(t) = f\left(g^{-1}(x)\right)$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dt}\,\frac{dg^{-1}}{dx} = \frac{\frac{df}{dt}}{\frac{dg}{dt}}$$

Βασικές παράγωγοι

$$\begin{array}{rlcrl}
f(x) = & x^a & \qquad\qquad & \frac{df}{dx} = & a x^{a-1} \\
= & \sin x & & = & \cos x \\
= & \cos x & & = & -\sin x \\
= & e^x & & = & e^x \\
= & \ln x & & = & \frac{1}{x}
\end{array}$$

Παράγωγοι ανώτερης τάξης. Η δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι η παράγωγος της (πρώτης) παραγώγου και συμβολίζεται με

$$f''(x) \qquad \text{ή} \qquad \frac{d}{dx}\frac{df(x)}{dx} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

και όμοια για τις ανώτερες παραγώγους.
Παραδείγματα από την κινηματική:
Γνωρίζουμε ότι το διάστημα s που καλύπτει ένα κινητό σε χρόνο t που κινείται σε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, δίνεται από τη σχέση $s = vt$, όπου v σταθερά. Ορίζοντας την ταχύτητα ως την χρονική παράγωγο του διαστήματος, έπεται άμεσα ότι η v είναι η ταχύτητα του κινητού

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(vt)}{dt} = v$$

Για την ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση η αντίστοιχη σχέση είναι $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ με v_0 και a σταθερές. Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο θα πάρουμε την ταχύτητα του κινητού

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(v_0 t + \frac{1}{2}at^2)}{dt} = v_0 + at$$

που είναι η γνωστή σχέση για την ταχύτητα στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. Η επιτάχυνση ορίζεται ως η χρονική παράγωγος της ταχύτητας. Οπότε

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(v_0 + at)}{dt} = a$$

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ TAYLOR

Αν γνωρίζουμε την τιμή της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 καθώς και τις παραγώγους όλων των τάξεων (δεύτερη παράγωγος, τρίτη παράγωγος, κλπ) στο ίδιο σημείο x_0, τότε η συνάρτηση $f(x)$ δίνεται από τη σχέση

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\frac{df}{dx}\bigg|_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}\bigg|_{x_0}(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}\bigg|_{x_0}(x - x_0)^3 + ...$$

Αυτή συνήθως ονομάζεται ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης. Μπορεί να φαίνεται η παραπάνω σχέση πολύ ''θεωρητική'', μιας και έχει άπειρους όρους, αλλά για την περίπτωση που θέλουμε να περιγράψουμε την συνάρτηση στην γειτονιά του σημείου x_0, δηλαδή όταν το $x - x_0$ είναι μικρό, καταλαβαίνουμε ότι όσο προχωράμε στους όρους του παραπάνω αθροίσματος αυτοί οι όροι γίνονται όλο και ποιο μικροί λόγω της δύναμης που ανεβαίνει στον όρο $(x - x_0)$. Οπότε, μπορούμε να προσεγγίσουμε την συνάρτηση στην περιοχή του σημείου x_0 κρατώντας ορισμένο αριθμό όρων μόνο. Το πόσους όρους κρατάμε εξαρτάται από την ακρίβεια που ζητάμε στην προσέγγισή μας.
Αναπτύξεις γνωστών συναρτήσεων γύρω από το σημείο $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... \\
\ln(1 + x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... \\
(1 + x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + ...
\end{aligned}$$

Από τις αναπτύξεις αυτές καταλαβαίνουμε γιατί για πολύ μικρές γωνίες η συνάρτηση $\sin x$ προσεγγίζεται από το x (προσοχή: το x σε ακτίνια, όχι μοίρες). Επίσης για να βρείτε ένα αρκετά ακριβές αποτέλεσμα του $1,003^3$ δεν χρειάζεται να κάνετε πλήρως την πράξη!! Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση θα έχουμε

$$1,003^3 = (1+0,003)^3 = 1 + 3\,(0,003) + ... = 1,009 + ...$$

όπου τα ... είναι της τάξης του 10^{-5}. Για τον ίδιο λόγο

$$\sqrt{1 \pm x} = (1 \pm x)^{1/2} \sim 1 \pm \frac{1}{2}x, \qquad \frac{1}{1 \pm x} = (1 \pm x)^{-1} \sim 1 \mp x$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμένο ολοκλήρωμα. Συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $a \leq x \leq b$. Ορίζουμε

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x, \quad x_{k+1} = x_k + \Delta x, \quad x_{n-1} = x_{n-2} + \Delta x, \quad b = x_{n-1} + \Delta x$$

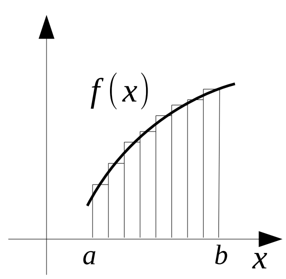
Ορίζουμε επίσης το

$$I_n = \sum_{k+1}^{n} f(\zeta_k) \Delta x, \qquad x_{k-1} < \zeta_k < x_k$$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα της $f(x)$ στο διάστημα $a \leq x \leq b$ ορίζεται ώς το όριο του I_n όταν το n τείνει στο άπειρο

$$I = \lim_{n \to \infty} I_n \equiv \int_a^b f(x) dx$$

Εύκολα φαίνεται ότι το ολοκλήρωμα αυτό περιγράφει το εμβαδόν ανάμεσα στην γραφική παράσταση



της $f(x)$ και του άξονα των x, από το $x = a$ έως το $x = b$.

Κάθε $F(x)$ τέτοια ώστε $F'(x) = f(x)$ λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$

$$\int f(x) = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Εύκολα φαίνεται ότι αν οι $F_1(x)$ και $F_2(x)$ είναι αόριστα ολοκληρώματα της $f(x)$, τότε

$$F_1(x) - F_2(x) = c \quad \text{όπου } c \text{ σταθερά}$$

Μπορούμε να δούμε τώρα ότι

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Εφ΄ όσον η παράγωγος της $F(x)$ είναι η $f(x)$ θα έχουμε

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \Rightarrow dF(x) = \frac{dF(x)}{dx}dx \Rightarrow dF(x) = f(x)dx$$

οπότε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dF(x)$$

Τί σημαίνει αυτό; Αν πάμε στο ορισμό του ολοκληρώματος, το δεξί μέλος της ισότητας είναι το όριο για $n \to \infty$ του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta F(x) = [F(x_1) - F(a)] + F(x_2) - F(x_1)] + ... + [F(b) - F(x_{n-1})] = F(b) - F(a)$$

ανεξάρτητο από το n. Επομένως, πράγματι

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dF(x) = F(b) - F(a)$$

Παραδείγματα από την κινηματική:
Για κίνηση σε μιά διεύθυνση, x, αν $x(t)$ είναι η θέση του κινητού, η (στιγμιαία) ταχύτητα $v(t)$ είναι

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Επομένως, το στοιχειώδες διάστημα dx που κάνει το κινητό στο στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt, είναι

$$dx = \left(\frac{dx(t)}{dt}\right) dt = v(t)dt$$

Αθροίζοντας τα dx από την χρονική στιγμή t_1 όπου η θέση του κινητού είναι x_1 και αντίστοιχα για t_2 η θέση είναι x_2, γράφουμε

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \Rightarrow x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Αν γνωρίζουμε την $v(t)$ μπορούμε να κάνουμε την ολοκλήρωση. Για παράδειγμα, για ομαλή κίνηση, οπότε $v(t) = v_0$ θα έχουμε

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} v_0 dt = v_0 \int_{t_1}^{t_2} dt = v_0(t_2 - t_1)$$
$$x_2 = x_1 + v_0(t_2 - t_1)$$

Στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα v_0 και επιτάχυνση a, η ταχύτητα $v(t)$ δίνεται από την

$$v(t) = v_0 + at$$

και θα έχουμε

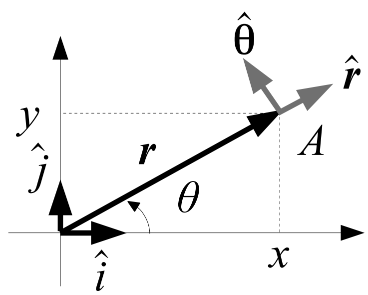
$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} (v_0 + at)dt = \int_{t_1}^{t_2} v_0\, dt + \int_{t_1}^{t_2} at\, dt = v_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2$$

$$x_2 = x_1 + v_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2$$

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Στο επίπεδο, ορίζοντας ένα καρτεσιανό ορθογώνιο σύστημα (x, y). Κάθε σημείο A του επιπέδου ορίζεται μονοσήμαντα από τις συνεταγμένες του $A(x, y)$. Πώς μπορούμε να ορίσουμε τα μοναδιαία διανύσματα που αντιστοιχούν σ′ αυτό το σύστημα συντεταγμένων; Ένας γενικός ορισμός είναι ο ακόλουθος: βρισκόμαστε στο σημείο μας A και κρατώντας το y σταθερό, *αυξάνουμε* στοιχειωδώς το x. Το μοναδιαίο διάνυσμα σ′ αυτήν την κατεύθυνση μας δίνει το $\hat{\mathbf{i}}$. Αντίστοιχα, κρατώντας το x σταθερό, αυξάνουμε στοιχειωδώς το y και το μοναδιαίο διάνυσμα σ′ αυτήν την κατεύθυνση είναι το $\hat{\mathbf{j}}$.

Το σημείο A μπορεί όμως να προσδιορισθεί και από το r (το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{r}$) και την γωνία θ που σχηματίζει το διάνυσμα $\mathbf{r}$ με τον άξονα των x: $A(r, \theta)$. Σ′ αυτό το σύστημα συντεταμένων, ποια είναι τα μοναδιαία διανύσματα; Ακολουθούμε την διαδικασία που αναφέραμε παραπάνω: κρατώντας την θ σταθερή, αυξάνουμε στοιχειωδώς το r. Το μοναδιαίο διάνυσμα σ′ αυτήν την κατεύθυνση είναι το $\hat{\mathbf{r}}$. Στη συνέχεια, κρατώντας το r σταθερό, αυξάνουμε στοιχειωδώς την γωνία θ. Η διεύθυνση αυτή είναι η εφαπτομένη του κύκλου που σχηματίζεται με ακτίνα την σταθερή τιμή r. Επομένως το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ θα είναι κάθετο στην διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{r}$



Στις καρτεσιανές συνεταγμένες γράφουμε

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

Στο νέο σύστημα, τις *πολικές συντεταγμένες*, γράφουμε

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$$

Πράγματι, το διάνυσμα $\mathbf{r}$ δεν έχει συνιστώσα παράλληλη με το $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Για παρακάτω χρήση ας γράψουμε τις συνιστώσες των μοναδιαίων $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ στο καρτεσιανό σύστημα. Το $\hat{\mathbf{r}}$ σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των x. Επομένως

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}}$$

Άμεσα φαίνεται ότι πράγματι το παραπάνω διάνυσμα είναι μοναδιαίο. Το $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ σχηματίζει γωνία $(\pi/2 + \theta)$ από τον θετικό άξονα των x ή $(\pi/2 - \theta)$ με τον αρνητικό άξονα των x. Γράφουμε λοιπόν

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos(\pi/2 + \theta)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\pi/2 + \theta)\hat{\mathbf{j}} = -\cos(\pi/2 - \theta)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\pi/2 - \theta)\hat{\mathbf{j}} = -\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}}$$

Θεωρούμε τώρα ότι $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός κινητού που κινείται στο επίπεδο (xy). Θέλουμε να γράψουμε την ταχύτητα του κινητού σε πολικές συντεταγμένες. Από τον ορισμό της ταχύτητας έχουμε

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{\mathbf{r}})$$

Τώρα, αντίθετα από τα μοναδιαία $\hat{\mathbf{i}}$ και $\hat{\mathbf{j}}$ που δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο, τα $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ακολουθούν το σώμα και μεταβάλλονται με τον χρόνο. Οπότε

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\hat{\mathbf{r}}) = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$$

Για να βρούμε την παράγωγο του μοναδιαίου διανύσματος, πηγαίνουμε στην έκφρασή του με τα μοναδιαία $\hat{\mathbf{i}}$ και $\hat{\mathbf{j}}$ που γράψαμε παραπάνω

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta(t)\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta(t)\hat{\mathbf{j}})$$

Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{i}}$ και $\hat{\mathbf{j}}$ δεν αλλάζουν με τον χρόνο, αλλά θέλει προσοχή η παραγώγιση *ως προς χρόνο* των $\sin\theta(t)$ και $\cos\theta(t)$

$$\frac{d}{dt}\sin\theta(t) = \frac{\sin\theta}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d}{dt}\cos\theta(t) = \frac{\cos\theta}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = -\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

και επομένως

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = -\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{j}} = (-\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}})\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Και η ταχύτητα γράφεται

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}}$$

Εφαρμογή για την κυκλική κίνηση με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R. Σ' αυτήν την περίπτωση $dr/dt = 0$ και καταλήγουμε

$$\mathbf{v} = R\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Δηλαδή η ταχύτητα έχει συνιστώσα μόνο στο $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ που είναι εφαπτόμενο στον κύκλο/τροχιά του κινητού. Αν επιπλέον, η κυκλικλη κίνηση είναι και ομαλή, δηλαδή σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = d\theta/dt$, παίρνουμε την γνωστή σχέση γαι το μέτρο της ταχύτητας

$$v = \omega R$$

Προχωράμε στην επιτάχυνση

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{d^2r}{dt}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt}$$

Χρειαζόμαστε να βρούμε την παράγωγου του $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Από την έκφρασή του ως προς τα $\hat{\mathbf{i}}$ και $\hat{\mathbf{j}}$ παίρνουμε

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = \frac{d}{dt}(-\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}}) = -\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{i}} - \sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{j}} = -(\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}})\frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{r}}$$

Αντικαθιστούμε και την παράγωγο $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ που βρήκαμε προτύτερα, και η επιτάχυνση γράφεται

$$\boxed{\mathbf{a} = \left(\frac{d^2r}{dt} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(2\frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}}$$

Εφαρμογή για την κυκλική κίνηση με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R. Μηδενίζοντας πάλι την παράγωγο του r και βάζοντας $r = R$, θα πάρουμε

$$\mathbf{a} = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{\mathbf{r}} + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Αν έχομε και ομαλή κυκλική κίνηση με σταθερή $d\theta/dt = \omega$ και $d\omega/dt = d^2\theta/dt^2 = 0$, θα πάρουμε

$$\mathbf{a} = -R\omega^2\hat{\mathbf{r}}$$

που είναι η γνωστή σχέση της κεντρομόλου επιτάχυνσης με διεύθυνση αντίθετη αυτής του $\hat{\mathbf{r}}$, δηλαδή προς το κέντρο του κύκλου.

ΒΑΘΜΙΔΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Αν $f(x)$ είναι μια συνάρτηση (μιας μεταβλητής), γνωρίζουμε ότι το διαφορικό της είναι

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx$$

όπου στην παρένθεση είναι η παράγωγος της συνάρτησης. Πώς θα γράψουμε το διαφορικό μιας συνάρτησης $f(x, y)$ δύο μεταβλητών; Αν σκεφτούμε πώς φτάσαμε στο διαφορικό (δες παραπάνω στο κεφάλαιο ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ), θα γράφαμε

$$\Delta f = \left.\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|_{y=\text{σταθερό}} \Delta x + \left.\frac{\Delta f}{\Delta y}\right|_{x=\text{σταθερό}} \Delta y$$

Πηγαίνοντας στο όριο για απειροστά Δx, Δy, θα πάρουμε το διαφορικό της f

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy$$

όπου οι δύο παρενθέσεις είναι οι *μερικές παράγωγοι* της f ως προς x και y αντίστοιχα. Η μερική παράγωγος της f ως προς x είναι η παράγωγος της f θεωρώντας το y σταθερό και αντίστοιχα για την μερική παράγωγο της f ως προς y. Παράδειγμα:

$$f = 3x^2y^5 + xe^{2y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^5 + e^{2y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 15x^2y^4 + 2xe^{2y}$$

Η γενίκευση σε 3-διαστάσεις είναι προφανής (η συνάρτησή μας τώρα είναι $f(x, y, z)$)

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz$$

Τα dx, dy και dz αποτελούν τις συνιστώσες του διανύσματος $\boldsymbol{dl} = (dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}})$. Οπότε, η τελευταία σχέση μπορεί να γραφτεί ως εσωτερικό γινόμενο

$$df = (\boldsymbol{\nabla} f) \cdot \boldsymbol{dl}$$

όπου ορίζουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{\nabla} f$ ως

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

Αυτή είναι η *βαθμίδα* της συνάρτησης $f(x, y, z)$. Ας δούμε τώρα την χρήση της στη Φυσική.

Έστω ότι για κάθε σημείο του χώρου (x, y, z) μπορούμε να ορίσουμε το διάνυσμα μιας δύναμης $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F} = F_1(x, y, z)\hat{\mathbf{i}} + F_2(x, y, z)\hat{\mathbf{j}} + F_3(x, y, z)\hat{\mathbf{k}}$$

Τότε το έργο $W_{A->B}$ αυτής της δύναμης από το σημείο $A(x_A, y_A, z_A)$ στο σημείο $B(x_B, y_B, z_B)$, με διαδρομή που καθορίζεται από την καμπύλη C (που βέβαια περνάει από τα σημεία A και B), ορίζεται ως

$$W_{A->B} = \int_{A(C)}^{B} \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{dl}$$

όπου

$$\boldsymbol{F} \cdot \mathbf{dl} = F_1(x,y,z)\,dx + F_2(x,y,z)\,dy + F_3(x,y,z)\,dz$$

Η καμπύλη C μπορεί να περιγραφεί από τις τρεις συναρτήσεις

$$x(t), \quad y(t), \quad z(t)$$

όπου t είναι μια παράμετρος και για t_A και t_B έχουμε

$$x_A = x(t_A), \quad y_a = y(t_A), \quad z_A = z(t_A), \quad x_B = x(t_B), \quad y_B = y(t_B), \quad z_B = z(t_B)$$

δηλαδή η καμπύλη περνά από τα σημεία A και B. Τα διαφορικά dx, dy και dz θα είναι

$$dx = \frac{dx}{dt}\,dt, \quad dy = \frac{dy}{dt}\,dt, \quad dz = \frac{dz}{dt}\,dt$$

και τότε, εφ΄ όσον η διαδρομή μας είναι πάνω στην καμπύλη C,

$$\boldsymbol{F} \cdot \mathbf{dl} = \left(F_1(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt} + F_2(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt} + F_3(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt} \right) dt$$

και το ολοκλήρωμα, ως προς t πλέον, είναι από t_A έως t_B.

Η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας ως προς σημείο O, $U_{/O}(x,y,z)$, ορίζεται ως

$$U_{/O}(x,y,z) = -\int_{O}^{(x,y,z)} \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{dl}$$

Το ολοκλήρωμα, στην γενική περίπτωση εξαρτάται από την διαδρομή/καμπύλη που μας πηγαίνει από το αρχικό σημείο O στο τελικό, τυχαίο, σημείο (x,y,z). Αλλά τότε, η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας θα έχανε την σημασία της. Οπότε, την ορίζουμε αν το ολοκλήρωμά μας εξαρτάται μόνο από το σημείο (x,y,z) (και το αρχικό σημείο O βέβαια) και όχι από την διαδρομή. Θα επανέλθουμε σε αυτό το θέμα σε λίγο.

Από τον παραπάνω ορισμό της $U(x,y,z)$ συμπαιρένουμε ότι

$$dU(x,y,z) = -\boldsymbol{F} \cdot \mathbf{dl}$$

Αλλά, είδαμε ότι για οποιαδήποτε συνάρτηση, άρα και για την $U(x,y,z)$, ισχύει

$$dU(x,y,z) = \boldsymbol{\nabla} U(x,y,z) \cdot \mathbf{dl}$$

Επομένως συμπεραίνουμε ότι η δύναμη είναι η βαθμίδα της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας επί (-1)

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = -\boldsymbol{\nabla} U(x,y,z)$$

Δηλαδή, αν η δύναμη είναι $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, τότε

$$F_1(x,y,z) = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_2(x,y,z) = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_3(x,y,z) = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Επανερχόμαστε στο θέμα της ανεξαρτησίας του ολοκληρώματος που ορίζει την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας από την διαδρομή. Σ' αυτήν την περίπτωση μιλάμε για *διατηρητική* δύναμη. Γενικά είναι δύσκολο να δείξουμε αν το έργο μιας δύναμης $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ είναι ανεξάρτητο από την διαδρομή για κάθε τυχαίο σημείο (x,y,z). Ευτυχώς (!), υπάρχει ένας πολύ ευκολότερος έλεγχος. Αποδεικνύεται ότι αν ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις, η δύναμη είναι διατηρητική

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Ας δούμε τώρα πώς αντιμετωπίζουμε το γενικό πρόβλημα: Δίνεται η δύναμη $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ και ζητείτε η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x,y,z)$ ως προς το σημείο O.
(1) Ελέγχουμε αν η δύναμη μας είναι διατηρητική, μέσω των τελευταίων σχέσεων. Αν οι σχέσεις δεν πληρούνται δεν έχει έννοια να ορίσουμε συνάρτηση δυναμικής ενέργειας. Αν είναι διατητρητική συνεχίζουμε.
(2) Θα πρέπει τώρα να βρούμε το έργο της δύναμης από το αρχικό σημείο $O(x_0, y_0, z_0)$ στο τυχαίο (x,y,z)

$$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \left(F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz\right)$$

Μπορούμε να επιλέξουμε όποια διαδρομή επιθυμούμε μιας και η δύναμη είναι διατηρητική. Επιλέγουμε την διαδρομή

$$(x_0,y_0,z_0) \to (x,y_0,z_0) \to (x,y,z_0) \to (x,y,z)$$

Στην πρώτη κίνηση ($(x_0,y_0,z_0) \to (x,y_0,z_0)$) το x μεταβάλλεται από x_0 έως x, ενώ τα y και z παραμένουν σταθερά και ίσα με y_0 και z_0 αντίστοιχα. Επομένως, $dy = dz = 0$.
Αντίστοιχα, στην δεύτερη διαδρομή ($(x,y_0,z_0) \to (x,y,z_0)$), το y μεταβάλλεται από y_0 έως y, ενώ τα x και z παραμένουν σταθερά και ίσα με x και z_0 αντίστοιχα. Επομένως, $dx = dz = 0$.
Τέλος, στην τρίτη διαδρομή ($(x,y,z_0) \to (x,y,z)$), το z μεταβάλλεται από z_0 έως z, ενώ τα x και y παραμένουν σταθερά και ίσα με x και y αντίστοιχα. Επομένως, $dx = dy = 0$.
Επομένως, το ολοκλήρωμα του έργου σπάει σε τρία ολοκληρώματα, αλλά σε καθένα από αυτά μόνο ένα διαφορικό από τα dx, dy και dz είναι διάφορο του μηδενός. Επομένως

$$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \left(F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz\right) =$$
$$\int_{x_0}^{x} F_1(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} F_2(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} F_3(x,y,z)dz$$

Προσέξτε ότι στο δεύτερο ολοκλήρωμα το x είναι σταθερό και ίσο με το αντίστοιχο x του τελικού μας σημείου. Το ίδιο και στο τρίτο ολοκλήρωμα για το x και το y. Υπολογίζοντας λοιπόν τα παραπάνω ολοκληρώματα βρίσκουμε την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας

$$U_{/O} = -\left[\int_{x_0}^{x} F_1(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} F_2(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} F_3(x,y,z)dz\right]$$

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα. Δίνεται η δύναμη

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$$

Να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας ως προς το σημείο $(1,1,1)$.
Ελέγχουμε πρώτα κατά πόσο η δύναμή μας είναι διατηρητική

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= 2xz, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2xz \qquad \checkmark \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= 2xy, \qquad \frac{\partial F_3}{\partial x} = 2xy \qquad \checkmark \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= x^2, \qquad \frac{\partial F_3}{\partial y} = x^2 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Οπότε, η δύναμη είναι δατηρητική και συνεχίζουμε. Επιλέγουμε την διαδρομή

$$(1,1,1) \to (x,1,1) \to (x,y,1) \to (x,y,z)$$

Με βάση αυτά που είπαμε παραπάνω θα έχουμε

$$\begin{aligned} U_{/(1,1,1)}(x,y,z) &= -\int_{(1,1,1)}^{(x,y,z)} \boldsymbol{F}\cdot \mathbf{dl} = \\ &= -\int_1^x F_1(x,1,1)dx - \int_1^y F_2(x,y,1)dy - \int_1^z F_3(x,y,z)dz = \\ &= -\int_1^x 2x\,dx - \int_1^y x^2\,dy - \int_1^z x^2y\,dz = \\ &= -(x^2-1) - x^2(y-1) - x^2y(z-1) = 1 - x^2yz \end{aligned}$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα το x είναι σταθερό, και στο τρίτο ολοκλήρωμα το x και το y είναι σταθερά. Έλεγχος: Πράγματι

$$U(1,1,1) = 0$$

όπως θα πρέπει εφ΄ όσον το αρχικό σημείο ορίζεται να έχει μηδενική δυναμική ενέργεια. Και

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = 2xyz, \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = x^2z, \quad -\frac{\partial U}{\partial z} = x^2y$$

που ακριβώς είναι οι τρεις συνιστώσες της δύναμης.