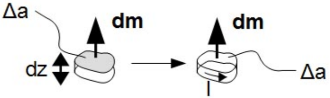
Μαγνήτιση. Το μέγεθος της μαγνήτισης ενός υλικού είναι αντίστοιχο της πόλωσης.

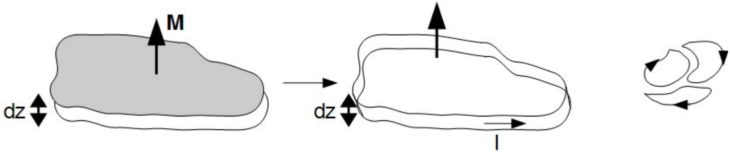
$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{m}_i}{V}$$

όπου $\mathbf{m}_i$ οι μοριακές/ατομικές διπολικές ροπές και V ό όγκος του υλικού. Οι διαστάσεις της μαγνήτισης είναι ρεύμα/μήκος. Όπως και στην πόλωση, μπορούμε να ‘‘αντικαταστήσουμε’’ μια στοιχειώδη μαγνητική ροπή $\mathbf{m}$ με ένα βρόχο που περικλείει επιφάνεια Δa με ρεύμα I που κυκλοφορεί σε μια λουρίδα πάχους dz

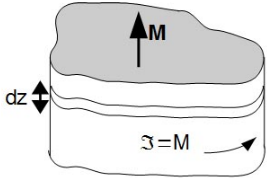
$$\left.\begin{array}{l} dm = I\,\Delta a \\ dm = M\,dv = M\Delta a dz \end{array}\right\} I = M\,dz$$



Μπορούμε να ‘‘μεγαλώσουμε’’ την επιφάνεια Δa



και να ‘‘μεγαλώσουμε’’ το πάχος dz



όπου το $\mathcal{J}$ έχει διαστάσεις ρεύμα/μήκος.
Όλα αυτά είναι βέβαια στην περίπτωση που η μαγνήτιση είναι σταθερή. Αποδεικνύεται ότι στην γενική περίπτωση έχουμε

$$\mathbf{J}_b = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{M}$$

(όπου τώρα το $\mathbf{J}_b$ είναι η πυκνότητα ρεύματος που γνωρίζουμε: ρεύμα/εμβαδόν). Η παραπάνω είναι η αντίστοιχη σχέση για την πόλωση: $-\rho_b = \nabla \cdot \mathbf{P}$. Όπως τα δέσμια φορτία είναι η πηγή της πόλωσης έτσι και τα δέσμια ρεύματα $\mathbf{J}_b$ είναι η πηγή της μαγνήτισης.

Παρουσία μαγνητισμένης ύλης, λοιπόν, ο νόμος του Ampère γίνεται

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}_f + \mu_0 \mathbf{J}_b = \mu_0 \mathbf{J}_f + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M} \Rightarrow \\
\nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) &= \mu_0 \mathbf{J}_f \Rightarrow \\
\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_f
\end{aligned}
$$

όπου ορίσαμε

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M})$$

σε αναλογία με τη σχέση $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$. Η αντίστοιχη ολοκληρωτική σχέση είναι

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{dl} = I_f$$

Μαγνητική επιδεκτικότητα. Υλικό παρουσία μαγνητικού πεδίου αποκτά μαγνήτιση **M**

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

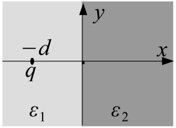
με χ_m ο συντελεστής μαγνητικής επιδεκτικότητας (αντίστοιχη της σχέσης $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$). Από τον ορισμό του **H** θα έχουμε

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 \left(1 + \chi_m\right) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

όπου μ είναι η μαγνητική διαπερατότητα (αντίστοιχη της σχέσης $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$).
Το διάνυσμα **H**, όπως είπαμε, είναι το αντίστοιχο του **D**. Αλλά είναι πιο ‘‘χρήσιμο’’ από το **D** γιατί μετράμε (ελεύθερα) ρεύματα στα πειράματά μας πολύ ευκολότερα από (ελεύθερα) φορτία.

ΑΣΚΗΣΗ 37

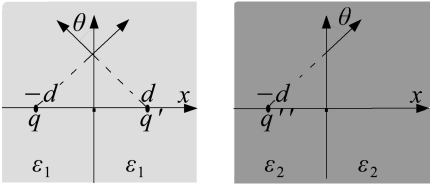
Ο 3-διάστατος χώρος χωρίζεται σε δύο ημίχωρους όπου ο ένας $(x < 0)$ είναι πλήρης από διηλεκτρικό σταθεράς ϵ_1 και ο άλλος $(x > 0)$ από διηλεκτρικό σταθεράς ϵ_2. Επιπλέον έχουμε ένα σημειακό φορτίο q στη θέση $x = -d$. Θεωρείστε γνωστό ότι: α) το ηλεκτρικό πεδίο E_1 στον αριστερό ημίχωρο (βλ. σχήμα) είναι ίσο με αυτό που δημιουργείται από το φορτίο q και ένα είδωλο φορτίο q' στη θέση $x = d$ και το διηλεκτρικό ϵ_1 να καταλαμβάνει **όλο** το χώρο. β) το ηλεκτρικό πεδίο E_2 στον δεξί ημίχωρο είναι ίσο με αυτό που δημιουργείται από ένα είδωλο φορτίο q'' στη θέση $x = -d$ και το διηλεκτρικό ϵ_2 να καταλαμβάνει **όλο** το χώρο. Βρείτε τα φορτία είδωλα q' και q''.



Θα βρούμε τα ηλεκτρικά πεδία E_1 και E_2 στην διαχωριστική επιφάνεια και θα εφαρμόσουμε τις σχέσεις συνέχειας.

Στο χώρο 1 ($x < 0$)

$$E_{1_y} = \frac{1}{\epsilon_1}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r^2}+\frac{q'}{r^2}\right)\cos\theta, \qquad E_{1_x} = \frac{1}{\epsilon_1}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r^2}-\frac{q'}{r^2}\right)\sin\theta$$



Στο χώρο 2 ($x > 0$)

$$E_{2_y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q''}{r^2}\cos\theta\,\frac{1}{\epsilon_2}, \qquad E_{2_x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q''}{r^2}\sin\theta\,\frac{1}{\epsilon_2}$$

Οπότε, γνωρίζοντας ότι $E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$ και $\epsilon_1 E_{1\perp} = \epsilon_2 E_{2\perp}$,

$$E_{1_y} = E_{2_y} \rightarrow \frac{q+q'}{\epsilon_1} = \frac{q''}{\epsilon_2} \quad \text{και} \quad \epsilon_1 E_{1_x} = E_{2_x}\epsilon_2 \rightarrow q - q' = q''$$

Επομένως, λύνουμε το σύστημα και υπολογίζουμε τα φορτία

$$\frac{q+q'}{\epsilon_1} = \frac{q-q'}{\epsilon_2} \to q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}\, q$$

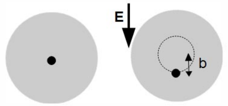
και

$$q'' = q - q' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}\, q$$

ΑΣΚΗΣΗ 38

Για να βρούμε, με κάποια προσέγγιση, την ατομική πολωσιμότητα του ατόμου του υδρογόνου θεωρούμε ότι το φορτίου του ηλεκτρονίου είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε μια σφαίρα ακτίνας R με κέντρο το πρωτόνιο του πυρήνα.
Ατομική πολωσιμότητα ορίζουμε την παράμετρο α που μας λέει πόσο το άτομο ''επιδέχεται να πολωθεί'' από εξωτερικό πεδίο $\mathbf{E}$: $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}$. Με την εφαρμογή του εξωτερικού πεδίου το ηλεκτρονικό νέφος και ο πυρήνας δέχονται δυνάμεις και μετατοπίζονται. Ας θεωρήσουμε ότι το ηλεκτρονικό νέφος παραμένει σφαιρικό και απλά μετατοπίζει το κέντρο του. Η δύναμη στο πρωτόνιο του πυρήνα από το εξωτερικό πεδίο $\mathbf{E}$, θα πρέπει να εξισορροπείται από την δύναμη που του ασκεί το ηλεκτρονικό νέφος. Θα πρέπει λοιπόν να βρούμε το πεδίο E_c που δημιουργεί το ηλεκτρονικό νέφος στο πρωτόνιο. Με το νόμο του Gauss θα έχουμε

$$E_c 4\pi b^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi b^3 \Rightarrow E_c = \frac{1}{3\epsilon_0}\rho b$$



όπου b η απόσταση του κέντρου του νέφους από το πρωτόνιο και ρ η πυκνότητα του νέφους

$$\rho = \frac{q_e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

με q_e το συνολικό φορτίο του νέφους που ισούται με το φορτίο του ηλεκτρονίου. Εξισώνοντας με την δύναμη του εξωτερικού πεδίου **E** στο πρωτόνιο θα έχουμε ($q_e = q_p$)

$$q_e E = q_e \frac{1}{3\epsilon_0} \rho b \Rightarrow b = \frac{4\pi\epsilon_0}{q_e} R^3 E$$

Η διπολική ροπή **p** του συστήματος είναι

$$p = q_e b = 4\pi\epsilon_0 R^3 E \Rightarrow \alpha = 4\pi\epsilon_0 R^3$$

ΑΣΚΗΣΗ 40

Ηλεκτρικό δίπολο $\mathbf{p}$ βρίσκεται σε απόσταση d από σημειακό φορτίο Q και προσανατολισμένο σε ακτινική διεύθυνση. Βρείτε τη δύναμη που ασκεί το δίπολο στο φορτίο. Βρείτε επίσης τη δύναμη που ασκεί το φορτίο στο δίπολο και ελέγξτε ότι πράγματι οι δυο δυνάμεις έχουν το ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά. Το πεδίο του ηλεκτρικού διπόλου δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right)\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right]$$

Στην περίπτωσή μας $\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = -pd$, $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}d$ και $\mathbf{p} = -p\hat{\mathbf{r}}$. Άρα έχουμε

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-3\left(pd\right)\hat{\mathbf{r}}d}{r^5} + \frac{p\hat{\mathbf{r}}}{r^3}\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{2p}{d^3}\hat{\mathbf{r}}\right]$$

και η δύναμη στο φορτίο Q

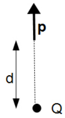
$$F_Q = QE = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{-2p}{d^3}\hat{\mathbf{r}}$$

Δύναμη που ασκεί το Q στο δίπολο. Γνωρίζουμε ότι $F_i = \mathbf{p} \cdot \nabla E_i$ είναι η δύναμη που δέχεται δίπολο $\mathbf{p}$ από εξωτερικό πεδίο $\mathbf{E}$. Το πεδίο του σημειακού φορτίου είναι

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r^3}(x, y, z)$$

Προσέξτε ότι το $\hat{\mathbf{r}}$ τώρα είναι αντίθετο από αυτό που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω. Αν θεωρήσουμε το δίπολο στον άξονα των z, θα έχουμε για τη δύναμη

$$F_i = (0, 0, p) \cdot \nabla E_i = p\,\frac{\partial E_i}{\partial z}, \qquad i = x, y, z$$



Για τις παραγώγους των συνιστωσών του πεδίου έχω $(r^2 = (x^2 + y^2 + z^2))$

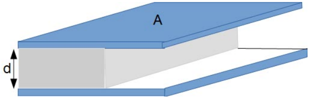
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-3xz}{r^5}$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-3yz}{r^5}$$
$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)$$

Για το σημείο που είναι το δίπολο $(0, 0, d)$, μόνο η τελευταία παράγωγος είναι διάφορη του μηδενός. Επομένως, έχουμε μόνο z συνιστώσα $(z = r = d)$ και η δύναμη

$$\mathbf{F} = p \left.\frac{\partial E_z}{\partial z}\right|_{z=r=d} = p \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d^3} - \frac{3d^2}{d^5}\right) = F\hat{\mathbf{z}} = -\frac{2pQ}{4\pi\epsilon_0 d^3}\hat{\mathbf{z}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 42

Επίπεδος πυκνωτής εμβαδού οπλισμού A και απόστασης μεταξύ των οπλισμών d, περιέχει διηλεκτρικό σταθεράς ϵ_r στον μισό χώρο του. Βρείτε την χωρητικότητά του.



Υπενθυμίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε κενό πυκνωτή είναι

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

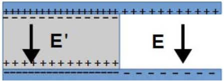
όπου σ η επιφανειακή πυκνότητα των φορτίων στον οπλισμό. Στην περίπτωση που ο πυκνωτής είναι γεμάτος με διηλεκτρικό, τότε από τον νόμου του Gauss σε διηλεκτρικό, έχουμε

$$D = \sigma_f$$

όπου σ_f τα ελεύθερα φορτία που είναι στον οπλισμό του πυκνωτή. Η σχέση που συνδέει την διηλεκτρική μετατόπιση D με το E είναι $D = \epsilon_r \epsilon_0 E$.

Άρα, για την περίπτωση του διηλεκτρικού θα έχουμε

$$\epsilon_r \epsilon_0 E = \sigma_f$$



Τώρα θυμόμαστε ότι στην διαχωριστική επιφάνεια διηλεκτρικών (ή διηλεκτρικού και κενού) η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου η παράλληλη στην επιφάνεια είναι συνεχής. Άρα, αν με τονούμενα σημειώνουμε τα μεγέθη στο χώρο που έχει διηλεκτρικό

$$E = E' \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \epsilon_0 E \\ \sigma'_f = \epsilon_r \epsilon_0 E' = \epsilon_r \epsilon_0 E \end{cases}$$

Φυσικά το σ αναφέρεται και αυτό σε ελεύθερα φορτία μιας και στην περιοχή που δεν έχουμε διηλεκτρικό μόνο ελεύθερα φορτία έχουμε στους οπλισμούς. Το συνολικό φορτίο στον οπλισμό θα είναι

$$\sigma \frac{A}{2} + \sigma'_f \frac{A}{2} = \frac{A}{2} E \epsilon_0 \left(1 + \epsilon_r\right)$$

Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς είναι $V = Ed$. Άρα η χωρητικότητα

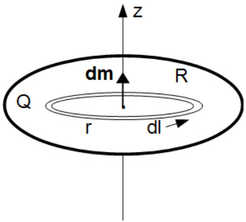
$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{A/2}{d}\ (1 + \epsilon_r)$$

Προσέξτε ότι το αποτέλεσμα δείχνει δύο πυκνωτές συνδεδεμένους σε σειρά, ο καθένας με εμβαδόν οπλισμού $A/2$ και απόσταση οπλισμών d, ο ένας κενός και ο άλλος με διηλεκτρικό ϵ_r

$$C = \epsilon_0 \frac{A/2}{d} + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A/2}{d}$$

ΑΣΚΗΣΗ 43

Ένας πλαστικός δίσκος με ακτίνα R φέρει στην επιφάνειά του ισοκατανεμημένο συνολικό φορτίο $+Q$ και περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Θεωρώντας ότι το σύστημα είναι επαλληλία ομόκεντρων διαφορικών κυκλικών δακτυλίων ρεύματος, υπολογίστε: α) Την ένταση $dI(r)$ του στοιχειώδους κυκλικού ρεύματος σε απόσταση r από το κέντρο του δίσκου O. β) Τη μαγνητική ροπή του περιστρεφόμενου φορτισμένου δίσκου. γ) Το μαγνητικό πεδίο στο σημείο A του άξονα Oy στο επίπεδο του δίσκου xy και σε απόσταση $d >> R$ από το O.



Το στοιχειώδες εμβαδόν ανάμεσα σε κύκλους ακτίνας r και $r+dr$ είναι $2\pi r dr$, το στοιχειώδες φορτίο σ' αυτήν την επιφάνεια $\sigma 2\pi r dr = \frac{Q}{\pi r^2} 2\pi r dr$. Και το στοιχειώδες ρεύμα

$$dI = \frac{dq}{dt} = \frac{\frac{Q}{\pi r^2} 2\pi r dr}{T} = \frac{Q\omega}{\pi R^2} r dr$$

όπου T η περίοδος περιστροφής και βέβαια $T = 2\pi/\omega$.
Η στοιχειώδης μαγνητική ροπή θα έχει μέτρο

$$dm = dI\, \pi r^2 = \frac{Q\omega}{R^2} r^3 dr$$

με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του κύκλου και φορά που δίνεται από τον κανόνα της δεξιόστροφης βίδας. Η συνολική μαγνητική ροπή θα έχει μέτρο

$$m = \int_0^R \frac{Q\omega}{R^2} r^3 dr = \frac{Q\omega R^4}{4}$$

και φυσικά $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}$

Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το μαγνητικό δίπολο $\mathbf{m}$ σε σημείο που ορίζεται από το διάνυσμα $\mathbf{r}$, για $r >> R$, είναι

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3\left(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}\right)\mathbf{r}}{r^5}\right]$$

Εμείς έχουμε $\mathbf{m} = (0, 0, m)$ και $\mathbf{r} = (0, d, 0)$. Οπότε

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{d^3}\,\hat{\mathbf{z}}$$