ΑΣΚΗΣΗ 5

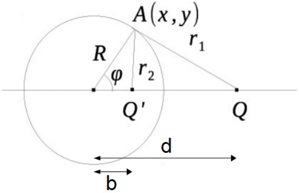
Να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού για το σύστημα αγώγιμης σφαίρας ακτίνας R και στοιχειώδους φορτίου Q που βρίσκεται σε απόσταση d $(> R)$ από το κέντρο της σφαίρας. Θεωρείστε αρχικά ότι η αγώγιμη σφαίρα έχει μηδενικό δυναμικό. Δείξτε ότι το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της αγώγιμης σφαίρας είναι (όπως θα πρέπει) κάθετο στην επιφάνεια. Πώς αλλάζει η συνάρτηση δυναμικού αν η σφαίρα έχει δυναμικό διάφορο του μηδενός.

Η συνάρτηση δυναμικού $V(x, y, z)$ θα πρέπει για όλον τον χώρο, εκτός της σφαίρας και του σημείου που είναι το σημειακό φορτίο, να υπακούει την εξίσωση του Laplace

$$\nabla^2 V(x, y, z) = 0$$

και στα σημεία της επιφάνεια του σφαιρικού αγωγού να έχει την τιμή μηδέν

$$V(\text{σημεία της επιφάνειας του αγωγού}) = 0$$



Το πρόβλημα έχει συμμετρία περιστροφής γύρω από τον άξονα που καθορίζουν το κέντρο της σφαίρας και το σημειακό φορτίο. Λόγω αυτής της συμμετρίας, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα στο επίπεδο, θεωρώντας την σφαίρα ως κύκλο.

Γυρεύουμε να βρούμε αν το πρόβλημά μας μπορεί να αντιστοιχηθεί με ένα σύστημα δύο φορτίων: το σημειακό μας φορτίο Q και άλλο ένα Q', πάνω στον άξονα συμμετρίας, και σε απόσταση b από το κέντρο του κύκλου (σφαίρας). Τότε το δυναμικό στο τυχαίο σημείο $A(x, y)$ θα δίνεται από την

$$V(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q'}{r_2}\right)$$

με r_1 και r_2 η αποστάσεις του σημείου από τα Q και Q'.

Φυσικά, για κάθε σημείο εντός του κύκλου (σφαίρας) το δυναμικό είναι σταθερό μιας και έχουμε αγωγό. Στην περίπτωσή μας το δυναμικό είναι μηδέν. Το ίδιο ισχύει και για την περιφέρεια του κύκλου (επιφάνεια της σφαίρας) που αποτελεί ισοδυναμική γραμμή (επιφάνεια). Επομένως, αν το σημείο μας $A(x, y)$ είναι στην περιφέρεια του κύκλου, θα ισχύει

$$V(x,y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q'}{r_2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{Q}{r_1} = -\frac{Q'}{r_2} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = -\frac{Q}{Q'} \equiv k$$

Για το τυχαίο σημείο A της περιφέρειας που καθορίζεται από την γωνία ϕ, ισχύει

$$r_1^2 = R^2 + d^2 - 2Rd\cos\phi, \quad r_2^2 = R^2 + b^2 - 2Rb\cos\phi$$

και ο μηδενισμός του δυναμικού γράφεται

$$r_1^2 = k^2 r_2^2 \Rightarrow R^2 + d^2 - 2Rd\cos\phi = k^2\left(R^2 + b^2 - 2Rb\cos\phi\right)$$

Αυτή η σχέση θα πρέπει να ισχύει για όλες τις τιμές της γωνίας $(0 \leq \phi < 2\pi)$, δηλαδή για όλη την περιφέρεια του κύκλου (επιφάνεια σφαίρας).

Επομένως, η παραπάνω ισότητα αποτελεί ισότητα συναρτήσεων (ως προς ϕ ή $\cos\phi$) και θα πρέπει

$$R^2 + d^2 = k^2\left(R^2 + b^2\right), \quad d = k^2 b$$

Αντικαθιστώντας το b από την δεύτερη στην πρώτη, λύνουμε ως προς k

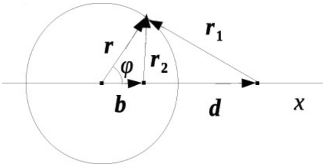
$$R^2 + d^2 = k^2\left(R^2 + \frac{d^2}{k^4}\right) \Rightarrow R^2 + d^2 = k^2 R^2 + \frac{d^2}{k^2} \Rightarrow$$

$$R^2\left(1 - k^2\right) = d^2\left(\frac{1}{k^2} - 1\right) \Rightarrow R^2\left(1 - k^2\right) \Rightarrow k^2 = \frac{d^2}{R^2} \Rightarrow k = \frac{d}{R}$$

και

$$b = \frac{d}{k^2} = \frac{R^2}{d}$$

Επομένως, η αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R, σε δυναμικό μηδέν και το φορτίο Q σε απόσταση d από το κέντρο της σφαίρας, έχουν την ίδια λύση με το φορτίο Q και ένα ''είδωλο'' φορτίο $Q' = -QR/d$ σε απόσταση $b = R^2/d$ από το κέντρο της σφαίρας, φυσικά για τα σημεία εκτός της σφαίρας.



Ας δούμε τώρα το ηλεκτρικό πεδίο. Αυτό δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

Επομένως, θα χρειαστούμε να υπολογίσουμε τις εκφράσεις

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r_1}, \quad \boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r_2}$$

Θεωρώντας ως άξονα των x την ευθεία που ενώνει το κέντρο του κύκλου (σφαίρας) με το φορτίο Q, παρατηρείστε ότι ισχύει ($\mathbf{r} = (x, y)$)

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{d}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{b}, \quad \text{όπου } \mathbf{d} = (d, 0), \quad \mathbf{b} = (b, 0)$$

Ας υπολογίσουμε την πρώτη έκφραση

$$\nabla \frac{1}{r_1} = \nabla \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} =$$
$$= -\left(\frac{x-d}{((x-d)^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{y}{((x-d)^2 + y^2)^{3/2}} \right) = -\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}$$

Όμοια θα πάρουμε

$$\nabla \frac{1}{r_2} = -\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}$$

Οπότε,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(Q\nabla\frac{1}{r_1} + Q'\nabla\frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q\mathbf{r}_1}{r_1^3} + \frac{Q'\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right)$$

Βέβαια, το αποτέλεσμα αυτό το πέρναμε και εφαρμόζοντας το νόμο του Coulomb για τα δύο σημειακά φορτία Q και Q'.

Τώρα χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

$$r_2 = \frac{r_1}{k}, \quad Q' = -\frac{Q}{k}$$

και το ηλεκτρικό πεδίο γράφεται

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{k^2 Q\mathbf{r}_2}{r_1^3}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_1^3}\left(\mathbf{r}_1 - k^2\mathbf{r}_2\right)$$

Αλλά

$$\mathbf{r}_1 - k^2\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{d} - k^2(\mathbf{r} - \mathbf{b}) = \mathbf{r}(1-k^2) - (\mathbf{d} - k^2\mathbf{b}) = \mathbf{r}(1-k^2)$$

μιας και τα διανύσματα **b** και **d** είναι συγγραμικά και ισχύει $d = k^2 b$. Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο είναι συγγραμμικό με το **r**, που όντας ακτινικό, είναι διάνυσμα κάθετο στην περιφέρεια του κύκλου (στην επιφάνεια της σφαίρας).

Στην περίπτωση που η σφαίρα μας έχει δυναμικό διάφορο του μηδενός, έστω V_0, γνωρίζοντας ότι σημειακό φορτίο έχει σφαιρικές ισοδυναμικές επιφάνειες (κύκλοι στο επίπεδο), αν βάλουμε στον κέντρο της σφαίρας φορτίο Q'' κατάλληλο έτσι ώστε

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q''}{R}$$

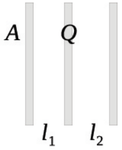
το συνολικό δυναμικό από τα φορτία Q, Q' και Q'', πάνω στον κύκλο (σφαίρα) θα δίνεται

$$V(\text{σημεία του κύκλου (σφαίρας)}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q'}{r_2} + \frac{Q''}{R}\right)$$

Από κατασκευής, οι δύο πρώτοι όροι δίνουν μηδέν, και ο τρίτος όρος θα δίνει το V_0. Επομένως, τα φορτία Q, Q' και Q'' λύνουν το πρόβλημα της αγώγιμης σφαίρας σε δυναμικό $V_0 \neq 0$ και του φορτίου Q.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Τρεις ορθογώνιες λεπτές αγώγιμες πλάκες εμβαδού A, απέχουν μεταξύ τους αποστάσεις l_1 και l_2 (βλ. Σχ.). Η μεσαία πλάκα είναι φορτισμένη με φορτίο Q. Θέλουμε να βρούμε, στηριζόμενοι στην ελαχιστοποίηση της ενέργειας των δύο πυκνωτών που σχηματίζονται, πώς το φορτίο Q θα κατανεμηθεί στις δύο πλευρές της μεσαίας πλάκας.
(Μπορείτε να θεωρήσετε τις ακριανές πλάκες γειωμένες)



Θεωρείστε ότι το φορτίο Q μοιράζεται σε Q_1 και Q_2. Τότε στις εσωτερικές επιφάνειες των ακριανών πλακών θα παρουσιαστούν φορτία $-Q_1$ και $-Q_2$. Οπότε, στα διάκενα θα αναπτυχθεί ηλεκτρικό πεδίο κάθετο στις πλάκες

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{Q_1/A}{\epsilon_0}, \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} = \frac{Q_2/A}{\epsilon_0}$$

Η ενέργεια του επίπεδου πυκνωτή δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(\text{όγκος}) = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(Al)$$

Οπότε, η ενέργεια των δύο πυκνωτών θα είναι

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2(Al_1) + \frac{\epsilon_0}{2} E_2^2(Al_2) = \frac{1}{2\epsilon_0}\left[\left(\frac{Q_1}{A}\right)^2 Al_1 + \left(\frac{Q_2}{A}\right)^2 Al_2\right]$$

$$= \frac{1}{2A\epsilon_0}\left[Q_1^2 l_1 + Q_2^2 l_2\right]$$

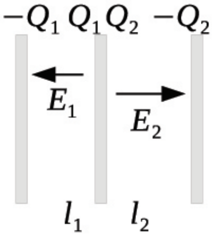
Γράφοντας $Q_2 = Q - Q_1$, ελαχιστοποιούμε την ενέργεια ως προς Q_1

$$\frac{d\mathcal{E}}{dQ_1} = 0 \Rightarrow 2Q_1 l_1 + 2(Q - Q_1)(-1)l_2 = 0 \Rightarrow Q_1 = Q\,\frac{l_2}{l_1 + l_2}$$

και βέβαια

$$Q_2 = Q - Q_1 = Q\,\frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

Όπως θα περιμέναμε, για $l_1 = l_2$ θα έχουμε $Q_1 = Q_2$.



ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο
$\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3) = (2x + yz, 2y + xz, xy)$. Αφού ελέγξετε κατά πόσο το πεδίο είναι ηλεκτροστατικό, βρείτε τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x, y, z)$ με σημείο αναφοράς το σημείο $(1, 1, 1)$. Ελέγξτε αν η συνάρτηση δυναμικού που βρήκατε πράγματι αντιστοιχεί στο αρχικό ηλεκτρικό πεδίο.

Ελέγχουμε αν το πεδίο είναι ηλεκτροστατικό

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2x + yz & 2y + xz & xy \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}}(x - x) - \hat{\mathbf{j}}(y - y) + \hat{\mathbf{k}}(z - z) = 0$$

Οπότε, πράγματι είναι.

Προχωράμε στον υπολογισμό της συνάρτησης δυναμικού.

Επιλέγω διαδρομή $(1, 1, 1) \to (x, 1, 1) \to (x, y, 1) \to (x, y, z)$

$$
\begin{aligned}
V(x,y,z) &= -\int_{(1,1,1)}^{(x,1,1)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} - \int_{(x,1,1)}^{(x,y,1)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} - \int_{(x,y,1)}^{(x,y,z)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \\
&= -\int_{(1,1,1)}^{(x,1,1)} E_1\,dx - \int_{(x,1,1)}^{(x,y,1)} E_2\,dy - \int_{(x,y,1)}^{(x,y,z)} E_3\,dz = \\
&= -\int_{(1,1,1)}^{(x,1,1)} (2x+yz)\,dx - \int_{(x,1,1)}^{(x,y,1)} (2y+xz)\,dy - \int_{(x,y,1)}^{(x,y,z)} xy\,dz = \\
&= -\left[(x^2-1)+(x-1)\right] - \left[(y^2-1)+x(y-1)\right] - xy(z-1) = \\
&= -x^2 - y^2 - xyz + 3
\end{aligned}
$$

Έλεγχος κατά πόσο η συνάρτηση δυναμικού που βρήκαμε ξαναδίνει το πεδίο. Θα πρέπει
$-\nabla V(x,y) = \mathbf{E}$

$$
-\frac{\partial V}{\partial x} = 2x+yz = E_1\checkmark, \quad -\frac{\partial V}{\partial y} = 2y+xz = E_2\checkmark, \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = xy = E_3\checkmark
$$

Άλλος τρόπος υπολογισμού του δυναμικού.
Από τη σχέση $\partial V(x,y,z)/\partial x = -E_1$ παίρνουμε

$$V(x,y,z) = -\int E_1 dx + C_1(y,z) = -\int (2x+yz)dx + C_1(y,z) =$$
$$= -x^2 - xyz + C_1(y,z)$$

Τώρα θα πρέπει $\partial V(x,y,z)/\partial y = -E_2$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = xz - \frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = E_2$$

Δηλαδή

$$xz - \frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = 2y + xz \Rightarrow C_1(y,z) = -\int 2y\,dy + C_2(z) = -y^2 + C_2(z)$$

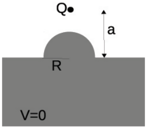
Επομένως, έως τώρα έχουμε $V = -x^2 - xyz - y^2 + C_2(z)$.
Θα πρέπει τώρα $-\partial V/\partial z = xy - \partial C_2(z)/\partial z = E_3$

$$xy - \frac{\partial C_2(z)}{\partial z} = xy \Rightarrow C_2(z) = C_0 \text{ σταθερά}$$

Επομένως έχουμε $V(x,y,z) = -x^2 - y^2 - xyz + C_0$. Από τον μηδενισμό $V(1,1,1) = 0$ συμπεραίνουμε ότι $C_0 = 3$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Αγώγιμη επίπεδη πλάκα άπειρων διαστάσεων έχει ημισφαιρικό εξόγκωμα ακτίνας R και βρίσκεται σε δυναμικό μηδέν (βλ. σχ.). Σημειακό φορτίο Q βρίσκεται σε απόσταση a από την πλάκα πάνω ακριβώς από το ημισφαιρικό εξόγκωμα. Βρείτε τη συνάρτηση δυναμικού για τα σημεία εκτός της αγώγιμης πλάκας -ημισφαιρίου (Υπόδειξη: εφαρμόστε επαλληλία γνωστών προβλημάτων με χρήση ειδώλων-φορτίων).

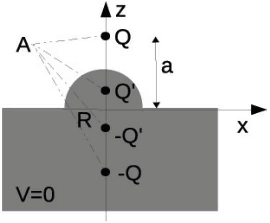


Το πρόβλημα είναι επαλληλία του α) φορτίο Q πάνω από άπειρη επίπεδη πλάκα και του β) φορτίο Q και αγώγιμη σφαίρα. Για το πρώτο γνωρίζουμε ότι το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με δύο φορτία Q και $-Q$ συμμετρικά τοποθετημένα ως προς την πλάκα, ενώ το δεύτερο είναι ισοδύναμο με δύο φορτία Q και Q', όπου $Q' = -QR/a$ σε απόσταση $b = R^2/a$ από το κέντρο της σφαίρας.

Επομένως, το σύστημά μας είναι ισοδύναμο με 4 φορτία

$$Q, \qquad -Q, \qquad Q' = -Q\frac{R}{a}, \qquad -Q' = Q\frac{R}{a}$$

με τα Q και $-Q$ συμμετρικά ως προς την πλάκα σε απόσταση a και τα Q' και $-Q'$ συμμετρικά ως προς την πλάκα σε απόσταση R^2/a. Λόγω της πλήρους συμμετρίας των 4 φορτίων το επίπεδο που αντιστοιχεί στην επιφάνεια της πλάκας έχει δυναμικό μηδέν.



Τα φορτία Q και Q' δίνουν δυναμικό μηδέν πάνω στην επιφάνεια της πλήρους σφαίρας και λόγω συμμετρίας το ίδιο επιτυγχάνεται με τα φορτία $-Q$ και $-Q'$. Άρα, το σύνολο των 4 φορτίων δίνει δυναμικό μηδέν πάνω στην επιφάνεια της πλάκας και στην επιφάνεια της σφαίρας.

Δηλαδή, το αρχικό πρόβλημά μας έχει τις ίδιες (μαθηματικές) απαιτήσεις με το σύστημα των 4 φορτίων και η λύση της εξίσωσης του Laplace $\nabla^2 V = 0$, έχει μοναδική λύση. Το δυναμικό στο τυχαίο σημείο Α θα δίνεται από τη σχέση

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{r_Q} - \frac{Q}{r_{-Q}} + \frac{Q'}{r_{Q'}} - \frac{Q'}{r_{-Q'}}\right]$$

με $r_Q, r_{-Q}, r_{Q'}, r_{-Q'}$ οι αποστάσεις από τα αντίστοιχα φορτία.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Δύο αγώγιμες σφαίρες με ακτίνες a και b έχουν φορτίο q η κάθε μία και απέχουν απόσταση d πολύ μεγαλύτερη από τις ακτίνες τους. Αν οι δύο σφαίρες συνδεθούν αγώγιμα με ένα λεπτό σύρμα (μηδενικής χωρητικότητας) ποιο είναι το φορτίο που θα έχει κάθε σφαίρα και ποιο το κοινό δυναμικό τους;

Το δυναμικό κάθε σφαίρας θα αποτελείται από ένα όρο που σχετίζεται με το φορτίο που έχει η ίδια η σφαίρα

$$V_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a}$$

και ένα όρο που σχετίζεται με το φορτίο της άλλης σφαίρας που φαίνεται ως σημειακό ($d >> b$)

$$V_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{d}$$

Οπότε

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{a} + \frac{q}{d}\right)$$

Για τους ίδιους λόγους το δυναμικό της δεύτερης σφαίρας θα είναι

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{b} + \frac{q}{d}\right)$$

Μόλις ενώσουμε αγώγιμα τις σφαίρες έχουμε πια έναν ενιαίο αγωγό: οι δύο σφαίρες και το σύρμα. Βρίσκονται, λοιπόν, σε κοινό δυναμικό V και αν q_1 και q_2 είναι τα νέα φορτία, φυσικά ισχύει $q_1 + q_2 = 2q$.
Με τις ίδιες σκέψεις, η ισότητα των δυναμικών μας οδηγεί στην σχέση

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{d}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_2}{b} + \frac{q_1}{d}\right)$$

και παίρνουμε

$$q_1\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right) = q_2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{d}} \Rightarrow \frac{q_1}{q_1 + q_2} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{2}{d}} \Rightarrow q_1 = 2q\,\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{2}{d}}$$

Όμοια

$$q_2 = 2q \, \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{2}{d}}$$

και το κοινό δυναμικό

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{d}\right) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \, \frac{\frac{1}{ab} - \frac{1}{d^2}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{2}{d}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Φορτίο Q είναι μοιρασμένο ομοιόμορφα σε σφαιρικό όγκο ακτίνας R. Ο όγκος αυτός περιβάλλεται από ομόκεντρο συμπαγές αγώγιμο κέλυφος με εσωτερική ακτίνα $2R$ και εξωτερική ακτίνα $3R$, του οποίου το συνολικό φορτίο είναι μηδενικό.

(α) Υπολογίστε τις εντάσεις του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}_I$ $(0 < r < R)$, $\mathbf{E}_{II}$ $(R < r < 2R)$, $\mathbf{E}_{III}$ $(20 < r < 3R)$, $\mathbf{E}_{VI}$ $(3R < r < \infty)$, και τη συνολική ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος.

(β) Με δυναμικό αναφοράς $V_{/\infty} = 0$, υπολογίστε τις συναρτήσεις δυναμικού V_{VI} $(3R < r < \infty)$, V_{III} $(20 < r < 3R)$, V_{II} $(R < r < 2R)$, V_I $(0 < r < R)$.

(γ) Υπολογίστε τα μεγέθη $\mathbf{E}'_{VI}$ $(3R < r < \infty)$, V'_{VI} $(3R < r < \infty)$, και τη συνολική ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος, όταν η εξωτερική επιφάνεια του αγώγιμου κελύφους συνδεθεί ηλεκτρικά με τη Γη $(V_{\Gamma\mathrm{H}} = 0)$.

Ηλεκτρικό πεδίο. Χρησιμοποιούμε τον νόμο του Gauss και την σφαιρική συμμετρία του προβλήματος

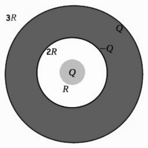
$\mathbf{0 < r < R}$ φορτίο ανάλογο του όγκου

$$E_I 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q \frac{4\pi r^3/3}{4\pi R^3/3} \Rightarrow E_I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3} r$$

$\mathbf{R < r < 2R}$, $\quad E_{II} 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q \Rightarrow E_{II} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$

$\mathbf{2R < r < 3R}$ αγωγός, $\quad E_{III} = 0$

$\mathbf{3R < r < \infty}$, $\quad E_{IV} 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q \Rightarrow E_{IV} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$



Στην εσωτερική επιφάνεια του αγωγού ($2R$) έχουμε φορτίο $-Q$ και στην εξωτερική επιφάνεια ($3R$) φορίο Q μιας και ο αγωγός είναι αφόρτιστος.
Δυναμικό

$$\mathbf{3R} < \mathbf{r} < \infty, \qquad V_{IV} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

$$\mathbf{2R} < \mathbf{r} < \mathbf{3R} \qquad V_{III} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{3R}$$

$$\mathbf{R} < \mathbf{r} < \mathbf{2R}, \qquad V_{II} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{3R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R}\right)$$

$$\mathbf{0} < \mathbf{r} < \mathbf{R}, \qquad V_I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{3R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right)$$

Ενέργεια

$$\mathbf{0 < r < R}$$

$$\mathcal{E}_I = \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^R E^2 dv = \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^R E^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\epsilon_0}{2}\int_0^R E^2 r^2 dr =$$

$$= \frac{4\pi\epsilon_0}{2}\int_0^R \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r\right)^2 r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R^6}\frac{R^5}{5} = \frac{Q^2}{40\pi\epsilon_0 R}$$

$$\mathbf{R < r < 2R}$$

$$\mathcal{E}_{II} = \frac{4\pi\epsilon_0}{2}\int_R^{2R} E^2 r^2 dr = \frac{4\pi\epsilon_0}{2}\int_R^{2R} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)^2 r^2 dr =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right)$$

$$\mathbf{2R < r < 3R}, \qquad \mathcal{E}_{III} = 0$$

$$\mathbf{3R < r < \infty}$$

$$\mathcal{E}_{IV} = \frac{4\pi\epsilon_0}{2}\int_{3R}^{\infty} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)^2 r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{3R}$$

Όταν συνδέσουμε τον εξωτερικό φλοιό με τη Γη, θα έχει πια δυναμικό μηδέν και η συνάρτηση δυναμικού για τον χώρο $r > R_3$ είναι μηδενική. Ο λόγος είναι ότι γι' αυτήν την συνάρτηση δυναμικού ισχύει βέβαια η εξίσωση του Laplace, ($\nabla^2 V = 0$) και θα πρέπει στο άπειρο και στην επιφάνεια της σφαίρας R_3 να είναι επίσης μηδέν. Μια λύση, άρα και η μοναδική είναι η $V = 0$. Επομένως και το πεδίο στο χώρο αυτό, $r > R_3$, είναι μηδέν. Στις άλλες περιοχές δεν έχουμε μεταβολές. Οπότε η ηλεκτροστατική ενέργεια είναι το άθροισμα των αντίστοιχων ενεργειών που βρήκαμε παραπάνω.