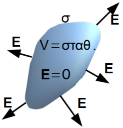
# ΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΙΔΩΛΩΝ

• Διαφορά μεταξύ αγωγών και μονοτών: ευκινησία των φορέων του φορτίου (συνήθως ηλεκτρόνια) **έως και 20 τάξεις μεγέθους**.
• Υλικά με ‘‘ενδιάμεση’’ ευκινησία των φορέων (ημι-αγωγοί).
• Εξετάζουμε στατικές καταστάσεις, δηλαδή αφού έχει γίνει η κατανομή του φορτίου στον αγωγό
• Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι μηδενικό.
• ’ρα το δυναμικό του αγωγού είναι σταθερό ($\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V{=}0$).
• Το **E**, ακριβώς στην εξωτερική πλευρά της επιφάνειάς του, είναι κάθετο στην επιφάνεια, μιας και το πεδίο είναι κάθετο στην τοπική ισοδυναμική επιφάνεια.
• Τα φορτία σ΄ ένα αγωγό βρίσκονται κατανεμημένα στην επιφάνειά του με μια επιφανειακή πυκνότητα $\sigma$. Το συνολικό φορτίο του αγωγού είναι

$$Q = \oint_{S_{\alpha\gamma\omega\gamma o\acute{\upsilon}}} \sigma \, da$$



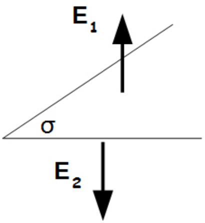
• Γνωρίζουμε ότι αν έχουμε μια επίπεδη, απείρων διαστάσεων, στρώση φορτίου $\sigma$, το ηλεκτρικό πεδίο **E** είναι παντού κάθετο στην επιφάνεια, συμμετρικό στις δύο ημίχωρους που χωρίζει η επιφάνεια και μέτρο ίσο με $E = \sigma/(2\epsilon_0)$. Οπότε, περνόντας από τη μια πλευρά της φορτισμένης επιφάνειας στην άλλη έχουμε μια απότομη αλλαγή του πεδίου **E**

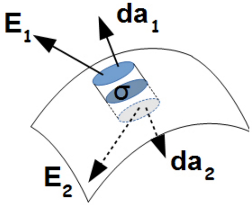
$$|\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Στην περίπτωση που η επιφάνειά μας δεν είναι επίπεδη, πόση είναι αυτή η αλλαγή του ηλεκτρικού πεδίου όταν περνάμε από την μια πλευρά της επιφάνειας στην άλλη; Αν επιλέξουμε για κλειστή επιφάνεια Gauss έναν κύλινδρο με τις δυο βάσεις του στις δύο πλευρές της επιφάνειάς μας, με βάσεις $\mathbf{da_1}$και $\mathbf{da_2}$, και απειροστό ύψος, η ροή από την επιφάνεια αυτού του κυλίνδρου θα είναι μόνο από τις βάσεις

$$d\Phi = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{da_1} + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{da_2} = (E_{1\perp} + E_{2\perp})\, da = |(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)_\perp|\, da$$

όπου $E_{1,2\perp}$ η συνιστώσα του πεδίου που είναι κάθετη στην αντίστοιχη βάση.

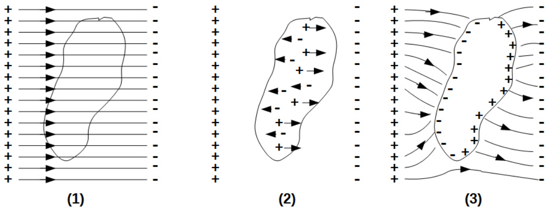



Οπότε

$$d\Phi = \frac{dq}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma da \Rightarrow |(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)_\perp| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Δηλαδή, η συνιστώσα του πεδίου που είναι κάθετη στην επιφάνεια αυτή μεταβάλλεται κατά $\sigma/\epsilon_0$. Στην επιφάνεια του **αγωγού**, το πεδίο στην μια πλευρά της (στο εσωτερικό του αγωγού) είναι μηδενικό. Στην άλλη πλευρά της επιφάνειας (στο εξωτερικό του αγωγού) το πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια. Επομένως, το μέτρο του πεδίου εκτός του αγωγού, πάνω στην επιφάνειά του, είναι ίσο με $E = \sigma/\epsilon_0$.




Αρχικά έχουμε ένα μη αγώγιμο υλικό μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο που παραμένει σταθερό έξω και μέσα στο σώμα. Δεχόμσατε ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε ευκίνητα φορτία στο υλικό (π.χ. με αλλαγή θερμοκρασίας). Τότε τα θετικά και αρνητικά φορτία θα κινηθούν λόγω του εξωτερικού πεδίου και θα ‘‘σταματήσουν’’ στην επιφάνεια του υλικού. Η κατανομή τους πάνω στην επιφάνεια είναι τέτοια ώστε το συνολικό πεδίο (εξωτερικό και αυτό που δημιουργούν οι επιφανειακές στρώσεις) στο εσωτερικό του υλικού να είναι μηδενικό.

**Το γενικό ηλεκτροστατικό πρόβλημα**. Έχοντας ένα σύνολο αγωγών στο χώρο σε αντίστοιχα δυναμικά $V_1, V_2, V_3, \ldots$ ζητάμε να βρούμε το δυναμικό, ως συνάρτηση της θέσης, για τα σημεία του χώρου εκτός των αγωγών. Δηλαδή, θα πρέπει να βρούμε το $V$ για το οποίο ισχύει η διαφορική εξίσωση του Laplace

$$\nabla^2 V(x, y, z) = 0 \qquad \text{για τα σημεία εκτός των αγωγών}$$

και

$$V_{\text{επιφ.αγ.}1} = V_1, \quad V_{\text{επιφ.αγ.}2} = V_2, \quad V_{\text{επιφ.αγ.}3} = V_3, \quad \ldots$$

Το ερώτημα είναι αν υπάρχει λύση σ' αυτό το μαθηματικό πρόβλημα, και αν είναι μοναδική. Εδώ θα αποδείξουμε μόνο το τμήμα που αναφέρει: αν υπάρχει λύση είναι μοναδική, η οποία έχει πολύ χρήσιμες εφαρμογές.

Να θυμηθούμε κατ΄ αρχάς ότι αν οι συναρτήσεις $V, V', V'', ....$ υπακούουν την Laplace, τότε και το άθροισμά τους ή οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός τους, υπακούει και αυτός την ίδια διαφορική εξίσωση. ΄Εστω ότι έχουμε δύο λύσεις $V$ και $V'$ που υπακούουν την Laplace και στην επιφάνεια των αγωγών έχουν την τιμή του δυναμικού του αντίστοιχου αγωγού. Τότε και η συνάρτηση $\Phi = V - V'$ είναι λύση της Laplace και πάνω στους αγωγούς η τιμή της είναι μηδενική $\Phi(\text{πάνω στους αγωγούς}) = 0$. Τότε

$$\int_{\text{όγκος εκτός των αγ.}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\Phi \boldsymbol{\nabla} \Phi)\, dv = \oint_{\text{επιφ. των αγ.}} \Phi \boldsymbol{\nabla} \Phi \mathbf{da} = 0$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα του Gauss, και η επιφάνεια που περικλείει τον χώρο εκτός των αγωγών είναι βέβαια οι επιφάνειες των ίδιων των αγωγών. Και πάνω στις επιφάνειες αυτές το Φ είναι μηδενικό.

Αλλά η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση γίνεται

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\Phi \boldsymbol{\nabla} \Phi) = \Phi \nabla^2 \Phi + (\boldsymbol{\nabla} \Phi)^2 = (\boldsymbol{\nabla} \Phi)^2$$

μιας και $\nabla^2 \Phi = 0$. Επομένως

$$\int_{\text{όγκος εκτός των αγ.}} (\boldsymbol{\nabla} \Phi)^2 \, dv = 0$$

Δηλαδή, το ολολήρωμα μιας *θετικής* συνάρτησης ($(\boldsymbol{\nabla} \Phi)^2$) είναι μηδενικό. Επομένως, θα πρέπει η συνάρτηση να είναι μηδέν

$$\boldsymbol{\nabla} \Phi = 0$$

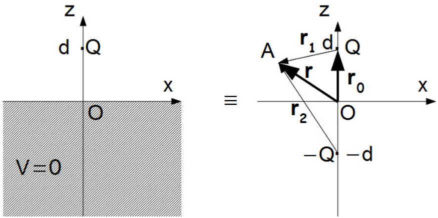
Δηλαδή, η $\Phi$ δεν μεταβάλλεται, έχει σταθερή τιμή παντού. Αλλά πάνω στην επιφάνεια των αγωγών έχει μηδενική τιμή, επομένως η *συνάρτηση* $\Phi$ είναι μηδενική, και οι δύο λύσεις $V$ και $V'$ που ξεκινήσαμε είναι ταυτόσημες συναρτήσεις.

Με αυτό το θεώρημα, μπορούμε να δείξουμε πολύ γρήγορα ότι στο εσωτερικό κοίλων αγωγών που δεν περιέχουν φορτία στο κοίλο κενό τους χώρο, το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό. Μιας και δεν υπάρχουν φορτία στο εσωτερικό κενό, στον χώρο αυτό θα ισχύει $\nabla^2 V = 0$, και η τιμή του $V$ στην (εσωτερική) επιφάνεια του αγωγού θα πρέπει να έχει τιμή ίση με το δυναμικό του αγωγού

$$\nabla^2 V = 0, \qquad V_{(\text{εσωτερική})\ \text{επιφάνεια του αγ.}} = V_0$$

Μια λύση είναι η σταθερή συνάρτηση $V = V_0$ η οποία βέβαια πληροί και τις δύο παραπάνω προϋποθέσεις. Και λόγω της μοναδικότητας της λύσης, λοιπόν, σε όλο τον κοίλο κενό χώρο μέσα στον αγωγό το δυναμικό είναι σταθερό και ίσο με το δυναμικό του αγωγού. Και επομένως, το πεδίο είναι μηδενικό μιας και $E = -\boldsymbol{\nabla} V$.

**Μέθοδος των ειδώλων**. Ο ημίχωρος $z < 0$ είναι ένας (πολύ μεγάλος) αγωγός, και στην θέση $(0, 0, d)$, με $d > 0$, υπάρχει σημειακό φορτίο $Q$. Ζητάμε να βρούμε το δυναμικό $V(x, y, z)$ για $z > 0$. Στο χώρο αυτό, αν εξαιρέσουμε το σημείο που είναι το φορτίο μας, ισχύει $\nabla^2 V = 0$ και θα πρέπει $V(\text{σημεία με } z = 0) = 0$, το δυναμικό δηλαδή του αγωγού που λόγω του άπειρου μεγέθους του δεν μπορεί να είναι παρά μηδενικό.
Ας σκεφτούμε ένα άλλο πρόβλημα. Σημειακό φορτίο $Q$ στην θέση $(0, 0, d)$ και φορτίο $-Q$ στο $(0, 0, -d)$. Στο πρόβλημα αυτό, στο χώρο εκτός των δύο σημείων που είναι τα δύο σημειακά φορτία, θα πρέπει $\nabla^2 V = 0$. Επίσης, λόγω συμμετρίας, στο μεσοκάθετο επίπεδο ανάμεσα στα φορτία (δηλαδή για $z = 0$), το δυναμικό είναι μηδενικό (ίσες αποστάσεις από τα δύο ετερώνυμα φορτία με ίδια απόλυτη τιμή).
Επομένως, στον ημίχωρο $z > 0$, τα δύο προβλήματα είναι τα ίδια. Και η λύση, ως μοναδική, θα είναι ίδια.




Επομένως, για το τυχαίο σημείο $A(x, y, z)$, με $z > 0$, θα έχουμε

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2}\right)$$

Το φορτίο $-Q$ ονομάζεται "είδωλο φορτίο".
Ας βρούμε το πεδίο **E** πάνω στο επίπεδο του αγωγού, δηλαδή για $z = 0$. Αν ονομάσουμε $\mathbf{r}_0 = (0, 0, d)$, τότε $r_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ και $r_2 = |\mathbf{r} - (-\mathbf{r}_0)|$, όπου $\mathbf{r} = (x, y, z)$ το σημείο $A$. Χρειάζεται τώρα να υπολογίσουμε το $\nabla V$. Χρειαζόμαστε

$$\nabla \frac{1}{r_1} = \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \nabla \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{3/2}}\,(2x, 2y, 2(z-d))$$

$$= -\frac{(x, y, z-d)}{r_1^3} = -\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}$$

και όμοια

$$\nabla \frac{1}{r_2} = -\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}$$

Για $z = 0$, έχουμε $r_1 = r_2$ και

$$\nabla \frac{1}{r_1} - \nabla \frac{1}{r_2} = -\frac{1}{r_1^3}\,(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\frac{1}{r_1^3}\,(2\mathbf{r}_0)$$

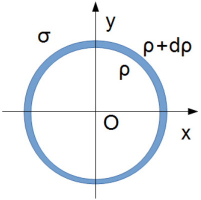
και επομένως

$$\mathbf{E}(z=0) = -\nabla V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\nabla \frac{1}{r_1} - \nabla \frac{1}{r_2}\right] = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_1^3}\,(2\mathbf{r}_0)$$

Δηλαδή, το **E** είναι παράλληλο με το $-\mathbf{r}_0$, δηλαδή κάθετο στο επίπεδο $z = 0$ και με διεύθυνση προς τον αρνητικό ημιάξονα $z$.
Μπορούμε να βρούμε και την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma$, μιας και $E = \sigma/\epsilon_0$

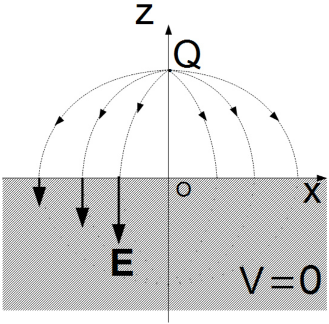
$$\sigma(x, y) = -\epsilon_0 E = -\epsilon_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} = -\frac{Q}{2\pi} \frac{d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}$$

Ποιο είναι το συνολικό φορτίο που ‘‘επάγεται’’ στην επιφάνεια του αγωγού; Θα πρέπει να ολοκληρώσουμε σ′ όλη την επιφάνεια.

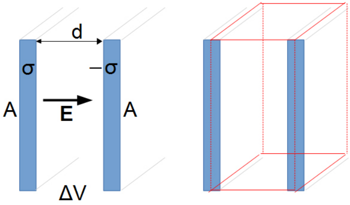


Λόγω συμμετρίας περιμένουμε η πυκνότητα να εξαρτάται μόνο από την απόσταση $\rho$ από το σημείο $O$ που φαίνεται και από την τελευταία σχέση, $\rho^2 = x^2 + y^2$. 'ρα

$$Q_{\text{ολικό}} = -\frac{Qd}{2\pi}\int_0^\infty \frac{2\pi\rho\, d\rho}{(\rho^2+d^2)^{3/2}} = -\frac{Qd}{2}\int_0^\infty \frac{d\rho^2}{(\rho^2+d^2)^{3/2}} = -Q$$



**Επίπεδος πυκνωτής**. Γενικά ένα σύστημα δύα αγωγών σε σχετικά μικρή απόσταση μεταξύ τους σε διαφορετικά δυναμικά αποτελεί ένα πυκνωτή. Η απλούστερη μορφή του είναι ο επίπεδος πυκνωτής: Παράλληλες,φορτισμένες, αγώγιμες πλάκες (οπλισμοί) σε απόσταση $d$ πολύ μικρότερη από τις διαστάσεις των πλακών. Στο εσωτερικό, ανάμεσα στις πλάκες, περιμένουμε το πεδίο να είναι κάθετο στις πλάκες και ομογενές ενώ στην εσωτερική επιφάνεια των δύο πλακών υπάρχει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma$ και $\sigma'$.




Αλλά από τον νόμο του Gauss περιμένουμε ότι $\sigma' = -\sigma$.

Πράγματι, αν πάρουμε για κλειστή επιφάνεια αυτή ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με δύο έδρες *μέσα* στις πλάκες, από αυτές η ροή είναι μηδενική μιας και το πεδίο μέσα στον αγωγό είναι μηδενικό. Από τις άλλες 4 έδρες και πάλι η ροή μηδενίζεται διότι το πεδίο είναι παράλληλο με τις επιφάνειες αυτές. Μηδενική ροή από κλειστή επιφάνεια σημαίνει ότι το φορτίο μέσα στην επιφάνεια αυτή είναι μηδενικό. Επομένως, οι δύο εσωτερικές επιφάνειες των πλακών φέρουν αντίθετο φορτίο. Γνωρίζουμε ότι το πεδίο ακριβώς στην εξωτερική επιφάνεια ενός αγωγού έχει μέτρο $E = \sigma/\epsilon_0$ και είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού. Επομένως, και στον επίπεδο πυκνωτή θα ισχύει

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Η διαφορά δυναμικού (απόλυτη τιμή) ανάμεσα στις δύο πλάκες θα είναι

$$|\Delta V| = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = E\, d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

Η ενέργεια του φορτισμένου πυκνωτή μπορεί να βρεθεί εύκολα από το πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς του.

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V E^2 dv = \frac{\epsilon_0}{2}E^2\left(Ad\right) = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2}Ad = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 Ad}{\epsilon_0}$$

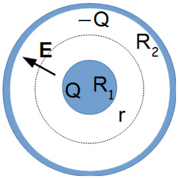
όπου $A$ το εμβαδόν του κάθε οπλισμού.
Αν ορίσουμε ως χωρητικότητα $C$ του πυκνωτή τον λόγο φορτίο πυκνωτή δια διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του, μπορούμε να γράψουμε για τον πυκνωτή μας

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{Ed} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\epsilon_0}d} = \epsilon_0\frac{A}{d}$$

Βλέπουμε ότι η χωρητικότητα εξαρτάται από κατασκευαστικά/γεωμετρικά στοιχεία του συγκεκριμένου πυκνωτή.

**Σφαιρικός πυκνωτής**. Αποτελείται από κεντρικό σφαρικό αγωγό ακτίνας $R_1$ φορτισμένο με φορτίο $Q$, και σφαιρικό φλοιό, εσωτερικής ακτίνας $R_2$. Περιμένουμε σφαιρική συμμετρία. Το $Q$ κατανέμεται ομογενώς στην εσωτερική σφαίρα. Το πεδίο ανάμεσα στο χώρο περιμένω να είναι ακτινικό και να εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο του συστήματος. Με το νόμο του Gauss, αν πάρω μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $r$ ($R_1 < r < R_2$), θα έχω

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$



Το φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια του φλοιού θα πρέπει να είναι ίσο με $-Q$, διότι αν η σφαιρική επιφάνεια Gauss την πάρουμε μέσα στον αγώγιμο φλοιό, όπου το πεδίο μηδενίζεται, η ροή θα είναι μηδενική. Και το φορτίο που περιέχει αυτή η σφαιρική επιφάνεια είναι αυτό των επιφανειών με ακτίνες $R_1$ και $R_2$. Επομένως, οι αντίστοιχες επιφανειακές πυκνότητες θα είναι

$$\sigma_1 = \frac{Q}{4\pi R_1^2}, \qquad \sigma_2 = -\frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στις σφαιρικές επιφάνειες $R_1$ και $R_2$ είναι

$$|\Delta V| = \left| - \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \right| = \left| \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \right| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

και η χωρητικότητα

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = 4\pi\epsilon_0 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$