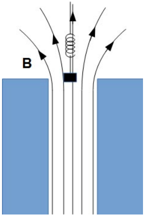
ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ ΣΤΗΝ ΥΛΗ

Συμπεριφορά της ύλης σε μαγνητικό πεδίο

- Πολλές καθαρές ουσίες δέχονται μικρή δύναμη ακόμα και από έντονο μαγνητικό πεδίο.
- Μερικά δείγματα δέχονται δύναμη προς το εσωτερικό του σωληνοειδούς.
- Άλλα δείγματα δέχονται δύναμη προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Η διαφορά αυτή δεν εξαρτάται από την φορά του μαγνητικού πεδίου, αλλά από την αύξηση/μείωση του πεδίου.

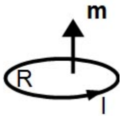
- Δείγματα, όπως το υγρό οξυγόνο, έλκονται προς το εσωτερικό του σωληνοειδούς με δύναμη οκταπλάσια του βάρους τους.
- Δείγματα, όπως ο μεταλλικός σίδηρος, έλκονται με δυνάμεις της τάξης του 4000 N/gr, για $dB/dz = 17\text{T/m}$.



Τα υλικά που απωθούνται προς το εξωτερικό του σωληνοειδούς λέγονται *διαμαγνητικά*.
Τα υλικά που έλονται προς το εσωτερικό του σωληνοειδούς λέγονται *παραμαγνητικά*.
Υλικά όπως ο σίδηρος λέγονται *σιδηρομαγνητικά*.
Μαγνητικό δίπολο. Αν θεωρήσουμε ένα κυκλικό, ακτίνας r, ρεύμα I, ορίζουμε ως *μαγνητική διπολική ροπή* το μέγεθος

$$\mathbf{m} = I\pi R^2 \hat{\mathbf{n}}$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο του κύκλου.

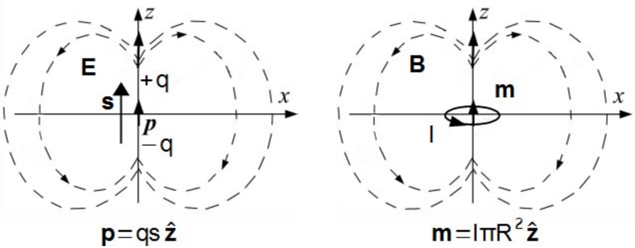


Το μαγνητικό δίπολο δημιουργεί στο χώρο του μαγνητικό πεδίο

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3\left(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}\right)\mathbf{r}}{r^5}\right]$$

που αποτελεί την αντίστοιχη έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί το ηλεκτρικό δίπολο.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5}\right]$$



Ηλεκτρικά ρεύματα στα άτομα. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση που ηλεκτρόνιο περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τον πυρήνα ενός ατόμου. Το ρεύμα που αντιστοιχεί είναι

$$\left[I = \frac{e}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad v = \omega r\right] \Rightarrow I = \frac{ev}{2\pi r}$$

όπου e το φορτίο του ηλεκτρονίου, η περίοδος T, η κυκλική συχνότητα ω και η ταχύτητά του v.

Το μέτρο της μαγνητικής ροπής θα είναι

$$m = I\pi r^2 = \frac{evr}{2}$$

και γράφοντας και τη στροφορμή L, θα έχουμε

$$L = m_e vr \Rightarrow m = \frac{e}{2m_e} L, \quad \text{ή} \quad \mathbf{m} = -\frac{e}{2m_e}\mathbf{L}$$

όπου το αρνητικό πρόσημο μπαίνει θεωρώντας πως το ρεύμα οφείλεται σε θετικά φορτία. Η τελευταία σχέση είναι γενική και ισχύει και για μη κυκλικές τροχιές. Στην τυχαία θέση πολλών ατόμων περιμένουμε η μαγνητικές ροπές των ηλεκτρονίων να αλληλοαναιρούνται.

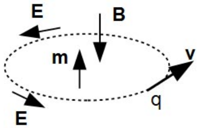
Πώς αντιδρά η ύλη σε μαγνητικό πεδίο. Υποθέτουμε ότι έχουμε φορτίο $q > 0$ μάζας M, που κινείται κυκλικά με σταθερή ταχύτητα v. Η ασκούμενη κεντρομόλος είναι

$$F_k = \frac{Mv^2}{R}$$

Αρχίζει και εμφανίζεται εξωτερικό μαγνητικό πεδίο **B**, κάθετο στην επιφάνεια της κίνησης με θετικό ρυθμό dB/dt. Τότε παράγεται ηλεκτρικό πεδίο E, με δυναμικές γραμμές κύκλους ομόκεντρους της κίνησης του φορτίου, για το οποίο ισχύει

$$\oint E \cdot dl = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \Rightarrow E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

όπου η κλειστή καμπύλη C είναι ο κύκλος της κίνησης του φορτίου.



Το ηλεκτρικό πεδίο επιταχύνει το φορτίο

$$M\frac{dv}{dt} = qE = q\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \Rightarrow dv = \frac{qr}{2M}\,dB$$

και δημιουργεί μια μεταβολή της μαγνητικής ροπής του

$$\Delta m = \frac{qr}{2}\,\Delta v = \frac{q^2 r^2}{4M}\,\Delta B$$

ή διανυσματικά

$$\mathbf{\Delta m} = -\frac{q^2 r^2}{4M}\,\mathbf{\Delta B}$$

Προσέξτε ότι αν η r παραμένει σταθερή, δεν εμφανίζεται ο χρόνος στην παραπάνω σχέση. Προσέξτε ότι αν το φορτίο ήταν αρνητικό, $q < 0$, η μαγνητική ροπή θα είχε αντίθετη διεύθυνση (προς τα κάτω), το αναπτυσσόμενο ηλεκτρικό πεδίο θα *επιβράδυνε* το φορτίο, θα είχαμε μείωση ταχύτητας και μαγνητικής ροπής, επομένως η μεταβολή της μαγνητικής ροπής $\mathbf{\Delta m}$ θα είχε την ίδια διεύθυνση όπως και στην περίπτωση του θετικού φορτίου. Με άλλα λόγια, το $\mathbf{\Delta m}$ είναι πάντα αντίθετο με το $\mathbf{\Delta B}$.

Αλλά αύξηση της ταχύτητας του φορτίου σημαίνει ανάγκη μεγαλύτερης κεντρομόλου, αν θέλουμε να διατηρήσουμε σταθερή της ακτίνα r της τροχιάς.

Ποιός παρέχει την επιπλέον κεντρομόλο;

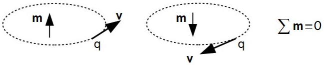
$$F = \frac{M}{r}(v+\Delta v)^2 \simeq \frac{M}{r}v^2 + 2\frac{M}{r}v\Delta v + ...$$

Η εμφάνιση του μαγνητικού πεδίου δημιουργεί μια νέα δύναμη στο κινούμενο φορτίο

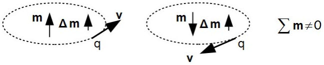
$$q\,(v+\Delta v)\,\Delta B = q\,(v+\Delta v)\;\frac{\Delta v 2M}{qr} \simeq \frac{2Mv\Delta v}{r} + ...$$

και βλέπουμε ότι η ‘‘καινούργια’’ δύναμη είναι ό,τι ακριβώς χρειάζεται για την αύξηση της κεντρομόλου που απαιτεί η αυξημένη ταχύτητα του φορτίου!

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Απουσία μαγνητικού πεδίου



Παρουσία μαγνητικού πεδίου



Αυτός είναι ο *διαμαγνητισμός* που είναι γενικό φαινόμενο οφειλόμενο στην ατομική δομή της ύλης.

Σπιν, ιδιοστροφορμή (spin). Το σπιν είναι ένα καθαρό κβαντικό φαινόμενο. Το φαινόμενο αυτό μας λέει ότι στα ηλεκτρόνια θα πρέπει να προσθέσουμε στην στροφορμή λόγω κίνησης και μια επιπλέον ποσότητα

$$\mathbf{L} \to \mathbf{L} + \mathbf{S}, \quad \text{όπου} \quad |\mathbf{S}| = \frac{\hbar}{2}, \quad \textit{και} \quad \hbar = \text{σταθερά Planck}/2$$

και η μαγνητική ροπή που οφείλεται στο σπιν είναι

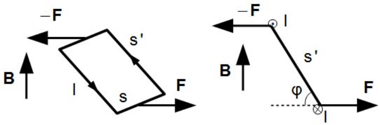
$$\mathbf{m}_S = -\frac{e}{m_e}\,\mathbf{S}$$

Βλέπουμε ότι η τιμή αυτή είναι διπλάσια από την αντίστοιχη για την (κανονική) στροφορμή

$$\mathbf{m} = -\frac{q_e}{2m_q}\,\mathbf{L}$$

Το μέτρο του $\mathbf{m}_S$ *δεν* μεταβάλλεται. Με μαγνητικό πεδίο αλλάζει μόνο η διεύθυνσή του.

Όπως είχαμε δει ότι σε ηλεκτρικό δίπολο **p** ασκείται από εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο **E** ροπή $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$, ακριβώς αντίστοιχα σε μαγνητική ροπή **m** ασκείται από εξωτερικό μαγνητικό πεδίο **B** ροπή $\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$.



$$F = IBs \Rightarrow N = Fs' \sin\phi = B\left(Iss'\right)\sin\phi = Bm\sin\phi \Rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{m}\times\mathbf{B}$$

Όπως και με την ηλεκτρική ροπή, το μαγνητικό πεδίο τείνει να φέρει την μαγνητική ροπή παράλληλα και ομόροπα με το πεδίο. Οι μαγνητικές ροπές δεν είναι ελεύθερες. Στα πιο πολλά άτομα, τα ηλεκτρόνια φτιάχνουν ζεύγη με αντίθετα σπιν και αντίθετες μαγνητικές ροπές. Σε όσα δεν συμβαίνει αυτό, π.χ. NO ή O_2, παρουσιάζουν *παραμαγνητισμό*.

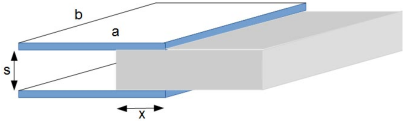
ΑΣΚΗΣΗ 35

Επίπεδος πυκνωτής με ορθογώνιες πλάκες διαστάσεων a και b και διάκενο s, είναι φορτισμένος με φορτίο Q. Εισάγουμε *σταδιακά* στον πυκνωτή, κατά την διεύθυνση της πλευράς μήκους a, διηλεκτρικό (σταθεράς ϵ_r) που καλύπτει όλη την απόσταση ανάμεσα στους οπλισμούς. α) Εκφράστε την χωρητικότητα του πυκνωτή $C(x)$ ως συνάρτηση της απόστασης x που έχει εισχωρήσει το διηλεκτρικό όπως επίσης και την μεταβολή της χωρητικότητας ΔC ως συνάρτηση του Δx.

β) Υπολογίστε την ενέργεια του πυκνωτή $U(x)$ ως της απόστασης x που έχει εισχωρήσει το διηλεκτρικό και δείξτε ότι η ενέργεια μειώνεται με την αύξηση του Δx.

Αν σχεδιάζαμε προσεκτικά τα φορτία, ελεύθερα και δέσμια, θα παρατηρούσαμε ότι το διηλεκτρικό έλκεται προς το εσωτερικό του πυκνωτή. Υπολογίστε την δύναμη που έλκει αν την θεωρήσουμε παράλληλη με την μετατόπιση Δx.

Τώρα θεωρούμε ότι ή όλη παραπάνω διαδικασία γίνεται με τον πυκνωτή συνδεδεμένο με σταθερή ηλεκτρική τάση V_0. Πώς αλλάζει τώρα η ενέργεια του πυκνωτή; Πώς διαμοιράζεται η ενέργεια που παρέχει η τάση;



Το φορτίο Q σε κάθε οπλισμό δεν μεταβάλλεται. Αν το διηλεκτρικό έχει εισέλθει κατά x στον πυκνωτή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε δύο πυκνωτές, συνδεδεμένους παράλληλα: ο ένας έχει οπλισμούς διαστάσεων $(a-x)\times b$ και είναι κενός και ο δεύτερος έχει οπλισμούς διαστάσεων $x \times b$ και περιέχει διηλεκτρικό. Στην παράλληλη σύνδεση η συνολική χωρητικότητα είναι το άθροισμα των επιμέρους χωρητικοτήτων. Επομένως

$$C(x) = \epsilon_0 \frac{(a-x)b}{s} + \epsilon_r \epsilon_0 \frac{xb}{s} = \frac{\epsilon_0 b}{s}(a - x + \epsilon_r x)$$

και επομένως

$$\Delta C = \frac{\epsilon_0 b}{s}(\epsilon_r - 1)\,\Delta x$$

Η ενέργεια του πυκνωτή γράφεται $U = (1/2)Q^2/C$ και μας δίνει

$$\Delta U = \frac{1}{2}Q^2\left(-\frac{1}{C^2}\right)\Delta C = -\frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C^2(x)}\,\frac{\epsilon_0 b}{s}\,(\epsilon_r - 1)\,\Delta x$$

Δηλαδή, η ενέργεια μειώνεται, $\Delta U < 0$ όσο το x αυξάνεται ($\Delta x > 0$). Αυτή η μείωση της ενέργειας είναι ίση με το έργο που παρήγαγε η δύναμη που τραβά το διηλεκτρικό στο εσωτερικό του πυκνωτή

$$F\Delta x = |\Delta U| = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C^2(x)}\,\frac{\epsilon_0 b}{s}\,(\epsilon_r - 1)\,\Delta x \Rightarrow F = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C^2(x)}\,\frac{\epsilon_0 b}{s}\,(\epsilon_r - 1)$$

Στην δεύτερη περίπτωση που έχουμε την ηλεκτρική τάση V_0 συνδεδεμένη με τους οπλισμούς του πυκνωτή, επειδή η χωρητικότητα αυξάνει, ο πυκνωτής αυξάνει το φορτίο στους οπλισμούς του. Εδώ χρησιμοποιούμε την ενέργεια του πυκνωτή από τη σχέση $U = (1/2)CV^2$, οπότε

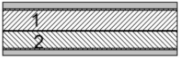
$$\Delta U = \frac{1}{2}\,V_0^2\Delta C = \frac{1}{2}\,V_0^2\frac{\epsilon_0 b}{s}\,(\epsilon_r - 1)\,\Delta x$$

Αν ο πυκνωτής αύξησε το φορτίο του κατά ΔQ, η παρεχόμενη τάση V_0 έδωσε ενέργεια $\Delta U = \Delta Q\, V_0 = (V_0 \Delta C)\, V_0 = V_0^2 \Delta C$ που είναι διπλάσια από την αύξηση της ενέργειας του πυκνωτή. Ακριβώς, το υπόλοιπο μισό είναι το έργο που κατανάλωσε η δύναμη που τραβά το διηλεκτρικό μέσα στον πυκνωτή

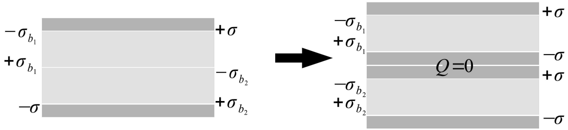
$$F \Delta x = \frac{1}{2} V_0^2 \Delta C = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{\epsilon_0 b}{s} (\epsilon_r - 1)\, \Delta x \Rightarrow F = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{\epsilon_0 b}{s} (\epsilon_r - 1)$$

ΑΣΚΗΣΗ 36

Επίπεδος πυκνωτής περιέχει δύο διηλεκτρικά με σταθερές ϵ_{r1} και ϵ_{r2}. Το καθένα καταλαμβάνει το μισό χώρο ανάμεσα στις πλάκες του πυκνωτή (βλ. σχήμα). Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του πυκνωτή αν η αντίστοιχη του πυκνωτή χωρίς διηλεκτρικό είναι C_0.



Όπως γνωρίζουμε, στην περίπτωση που ο χώρος μας αρχικά είναι κενός και επικρατεί πεδίο **E** και τον γεμίσουμε διηλεκτρικό, το πεδίο πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα $1/\epsilon_r$. Επομένως, στην περίπτωσή μας, στο πάνω μισό είναι ίσο με E/ϵ_{r1} και στο κάτω μισό E/ϵ_{r2}. Και φυσικά, λόγω συμμετρίας (πυκνωτής με μεγάλες πλάκες και μικρό διάκενο) η διεύθυνση του πεδίο παντού είναι κάθετη στις πλάκες.
Προσέξτε ότι επιβεβαιώνεται η συνέχεια του $D_\perp$ στην διαχωριστική επιφάνεια των δύο διηλεκτρικών.



Γνωρίζουμε ότι $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. Μιας και στην περίπτωσή μας το $\mathbf{E}$ (άρα και το $\mathbf{D}$) είναι κάθετα στην διαχωριστική επιφάνεια, παρατηρούμε ότι πράγματι

$$D_1 = D_2 \Rightarrow \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2 \Rightarrow \epsilon_1 \frac{E}{\epsilon_{r1}} = \epsilon_2 \frac{E}{\epsilon_{r2}}$$

που είναι αληθές μιας και $\epsilon_1/\epsilon_{r1} = \epsilon_2/\epsilon_{r2} = \epsilon_0$.
Αν το κάθε διηλεκτρικό έχει πάχος $d/2$, η διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών του πυκνωτή θα είναι

$$\Delta V = \frac{E}{\epsilon_{r1}} \frac{d}{2} + \frac{E}{\epsilon_{r2}} \frac{d}{2}$$

Το πεδίο E του άδειου πυκνωτή είναι ίσο με

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q/A}{\epsilon_0}$$

όπου Q το φορτίο του πυκνωτή και A το εμβαδόν της πλάκας.

Αντικαθιστώντας το E στον τύπο για τη διαφορά δυναμικού

$$\Delta V = \frac{Q/A}{\epsilon_0}\frac{d}{2}\left[\frac{1}{\epsilon_{r1}} + \frac{1}{\epsilon_{r2}}\right]$$

Οπότε,

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 A \frac{1}{\left(\frac{1}{\epsilon_{r1}} + \frac{1}{\epsilon_{r2}}\right)\frac{d}{2}}$$

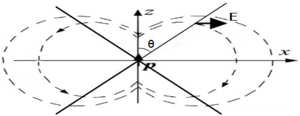
Αυτό ξαναγράφεται

$$C = \frac{1}{\left(\frac{1}{\epsilon_0\epsilon_{r1}}\frac{d/2}{A} + \frac{1}{\epsilon_0\epsilon_{r2}}\frac{d/2}{A}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$

με $C_{1,2} = \epsilon_0\epsilon_{r(1,2)} A/(d/2)$. Δηλαδή, το σύστημά μας αντιστοιχεί με δύο πυκνωτές σε σύνδεση σε σειρά, με μισό διάκενο από ό,τι ο αρχικός και ο καθένας με το δικό του διηλεκτρικό. Αυτό φαίνεται και στο σχήμα. Η ενδιάμεση μεταλλική πλάκα είναι αφόρτιστη και δεν δημιουργεί καμιά αλλαγή στη διαφορά δυναμικού μεταξύ των αρχικών οπλισμών του πυκνωτή μιας και το πεδίο μέσα της είναι μηδέν.

ΑΣΚΗΣΗ 41

Να βρεθούν τα σημεία του χώρου όπου το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα ηλεκτρικό δίπολο είναι κάθετο στη διεύθυνση του διπόλου.



Γνωρίζουμε οτι δίπολο p δημιουργεί στο χώρο ηλεκτρικό πεδίο

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right)\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right]$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το δίπολο είναι στον άξονα των z, $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{z}}$. Λόγω συμμετρίας μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα στο επίπεδο xz και έπειτα περιστρέφοντας γύρω από τον άξονα z να πάρουμε την εικόνα στο χώρο. Οπότε, ζητάμε για ποια $\mathbf{r}$ ισχύει η σχέση $\mathbf{E}\cdot\mathbf{p} = 0$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right)^2}{r^5} - \frac{p^2}{r^3}\right] = 0$$

Αλλά, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = pz$ και $r^2 = x^2 + z^2$. Επομένως θα πρέπει

$$\frac{3\left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right)^2}{r^5} = \frac{p^2}{r^3} \Rightarrow 3p^2z^2 = r^2p^2 \Rightarrow 3z^2 = z^2 + x^2 \Rightarrow z = \pm\frac{x}{\sqrt{2}}$$

Δηλαδή ο λόγος x/z είναι σταθερός. Τα σημεία αυτά είναι σε δύο ευθείες που περνάνε από την αρχή των αξόνων και σχηματίζουν γωνία θ με τον άξονα των z με $\tan\theta = \pm\sqrt{2}$. Αν περιστρέψουμε γύρω από τον άξονα των z, τα σημεία του χώρου όπου το πεδίο είναι κάθετο με τη διεύθυνση του διπόλου είναι επιφάνεια κώνου.