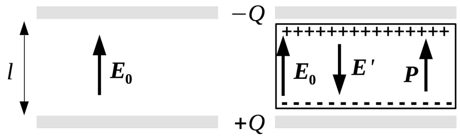
Πυκνωτής με διηλεκτρικό. Πυκνωτής με ορθογώνιους οπλισμούς εμβαδού A και απόσταση μεταξύ των οπλισμών l έχει φορτίο Q. Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σε κάθε οπλισμό θα είνα $\sigma = \pm Q/A$. Το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_0$ και η διαφορά δυναμικού ΔV_0 ανάμεσα από τους οπλισμούς καθώς και η χωρητικότητα C_0 δίνονται από τις σχέσεις

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q/A}{\epsilon_0}, \quad \Delta V = E_0\, l = \frac{Q/A}{\epsilon_0}\, l, \quad C_0 = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 \frac{A}{l}$$



Γεμίζουμε τον χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς με διηλεκτρικό. Τα μόρια του υλικού πολώνονται από το πεδίο του πυκνωτή. Η πόλωση $\mathbf{P}$ θα είναι παράλληλη με το ηλεκτρικό πεδίο. Στις επιφάνειες του διηλεκτρικού θα εμφανιστούν οι επιφανειακές πυκνότητες δέσμιου φορτίο $\sigma_b = \pm P$.

Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε το διηλεκτρικό με τις δυο στρώσεις των δέσμιων φορτίων που δημιουργούν ηλεκτρικό πεδίο με μέτρο $E' = \sigma_b/\epsilon_0 = P/\epsilon_0$ και φορά αντίθετη της $\mathbf{P}$: $\mathbf{E}' = -\mathbf{P}/\epsilon_0$. Επομένως, το συνολικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς θα είναι

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned}
\text{διηλεκτρική επιδεκτικότητα } \chi: &\quad \mathbf{P} = \chi \mathbf{E} \\
\text{σχετική διηλεκτρική επιδεκτικότητα } \chi_r: &\quad \chi_r = \frac{\chi}{\epsilon_0} \\
\text{σχετική διηλεκτρική σταθερά } \epsilon_r: &\quad \epsilon_r = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0} = 1 + \chi_r \\
\text{διηλεκτρική σταθερά } \epsilon: &\quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0
\end{aligned}$$

Οπότε, η σχέση με τα πεδία γράφεται

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\chi \mathbf{E}}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E}\left(1 + \frac{\chi}{\epsilon_0}\right) = \mathbf{E}_0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{E}\epsilon_r = \mathbf{E}_0 \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_r}\mathbf{E}_0$$

Δηλαδή, το πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή με την παρουσία διηλεκτρικού είναι το πεδίο του πυκνωτή χωρίς διηλεκτρικό επί τον παράγοντα $1/\epsilon_r$. Αυτή η σχέση είναι πολύ γενική και ισχύει σε κάθε περίπτωση: αν έχουμε διάφορους αγωγούς στον κενό χώρο και το πεδίο (στον κενό χώρο) είναι $\mathbf{E}_0$, αν γεμίσουμε τον κενό χώρο με διηλεκτρικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ϵ_r, το πεδίο στο διηλεκτρικό είναι $\mathbf{E}_0/\epsilon_r$. Ας δούμε τώρα πώς αλλάζει η χωρητικότητα του πυκνωτή όταν έχει διηλεκτρικό. Η χωρητικότητα του κενού πυκνωτή δίνεται από τη σχέση

$$C_0 = \frac{Q}{\Delta V_0} = \frac{Q}{E_0 l}$$

όπου Q το φορτίο του πυκνωτή και ΔV_0 η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του.

Όταν βάλουμε διηλεκτρικό, έχοντας αποσυνδέσει τον πυκνωτή από την πηγή που τον φόρτισε, το φορτίο Q δεν αλλάζει. Λόγω της αλλαγής όμως του πεδίου (ουσιαστικά μείωση), μεταβάλλεται η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του και επομένως η χωρητικότητά του

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{El} = \epsilon_r \frac{Q}{E_0 l} = \epsilon_r C_0$$

λόγω της σχέσης $E = E_0/\epsilon_r$. Προσέξτε ότι $\epsilon_r > 1$. Οπότε, η χωρητικότητα του πυκνωτή αυξάνει με την εισαγωγή του διηλεκτρικού.

Ο νόμος του Gauss σε διηλεκτρικό. Σημειακό φορτίο Q μέσα σε διηλεκτρικό δημιουργεί ακτινικό πεδίο που, από ό,τι αναφέρθηκε πιο πάνω, θα έχει τιμή

$$E = \frac{1}{\epsilon_r}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)$$

Επομένως, ακολουθώντας την ίδια τακτική όπως στην περίπτωση φορτίου σε κενό, η ροή από μια κλειστή επιφάνεια S που περιβάλλει το φορτίο θα είναι

$$\Phi_S = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Αυτό ξαναγράφεται ως

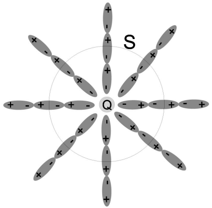
$$\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = Q \Rightarrow \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{da} = Q_{free}$$

όπου ορίσαμε την διηλεκτρική μετατόπιση $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ και γράφουμε Q_{free} για να ξεχωρίσουμε τα ελεύθερα φορτία από τα δέσμια. Η αντίστοιχη διαφορική μορφή του νόμου, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, τώρα γράφεται

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho_{free}$$

Αν εφαρμόσουμε το νόμο του Gauss βλέποντας και τα δέσμια φορτία Q_b ως απλά φορτία, θα γράφαμε

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(Q_{free} + Q_b \right)$$



Χρησιμοποιώντας την σχέση που δίνει τα Q_{free} ξαναγράφουμε

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} + Q_b\right) \Rightarrow \oint_S (\epsilon_0 - \epsilon)\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = Q_b$$

Ο παράγοντας στην παρένθεση γράφεται

$$\epsilon_0 - \epsilon = \epsilon_0 (1 - \epsilon_r) = -\epsilon_0 \chi_r = -\chi$$

μιας και $\epsilon_r = \chi_r + 1$. Επομένως

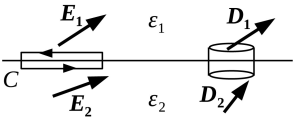
$$\oint_S (\epsilon_0 - \epsilon)\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = Q_b \Rightarrow \oint_S \chi \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = -Q_b \Rightarrow \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{da} = -Q_b$$

με αντίστοιχη διαφορική μορφή

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_b$$

Συνέχειες και ασυνέχειες του πεδίου στην διαχωριστική επιφάνεια διηλεκτρικών. Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε δύο διηλεκτρικά, με $\epsilon_{1,2}$ οι διηλεκτρικές σταθερές τους, που διαχωρίζονται από μια επιφάνεια. Τα αντίστοιχα ηλεκτρικά πεδία και οι διηλεκτρικές μετατοπίσεις είναι $\mathbf{E}_{1,2}$ και $\mathbf{D}_{1,2}$. Ας θεωρήσουμε μια κλειστή καμπύλη C σε μορφή ορθογώνιου με τις μεγάλες πλευρές (μήκους l) παράλληλες με την διαχωριστική επιφάνεια και τις άλλες πολύ μικρές. Μιας και το πεδίο μας είναι διατηρητικό, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην C θα πρέπει να μηδενίζεται

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = 0 \Rightarrow E_{2\|} l - E_{1\|} l = 0 \Rightarrow E_{2\|} = E_{1\|}$$



όπου $E_{1,2\parallel}$ είναι οι συνιστώσες των αντιστοίχων πεδίων που είναι παράλληλες με την διαχωριστική επιφάνεια, άρα παράλληλες και με τις μεγάλες πλευρές του ορθογωνίου. Οι κάθετες πλευρές είναι πολύ μικρές και δεν συνεισφέρουν. Επομένως, κοντά στην διαχωριστική επιφάνεια, η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου η παράλληλη με την διαχωριστική επιφάνεια είναι συνεχής. Παίρνοντας τώρα ένα κύλινδρο με την καθεμιά βάση του (με εμβαδόν A) σε ένα από τα διηλεκτρικά και με πολύ μικρό ύψος, η συνολική ροή της διηλεκτρικής μετατόπισης $\mathbf{D}$ στην επιφάνεια του κυλίνδρου S θα μηδενίζεται μιας και δεν έχουμε καθόλου ελεύθερο φορτίο

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot \mathbf{da} = 0 \Rightarrow D_{1\perp} A - D_{2\perp} A = 0 \Rightarrow D_{1\perp} = D_{2\perp}$$

όπου η παράπλευρη επιφάνεια είναι πολύ μικρή και δεν συνεισφέρει. Βλέπουμε ότι η συνιστώσα της διηλεκτρικής μετατόπισης που είναι κάθετη στην διαχωριστική επιφάνεια είναι συνεχής.

Με την σχέση που συνδέει ηλεκτρικό πεδίο και διηλεκτρική μετατόπιση, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\epsilon_1 E_{1\perp} = \epsilon_2 E_{2\perp}$$

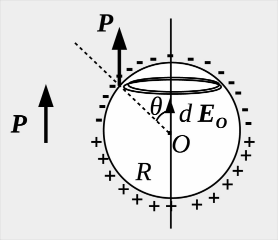
δηλαδή η κάθετη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίο δεν είναι συνεχής.
Στην περίπτωση που ένα από τα διηλεκτρικά είναι το κενό, τότε το αντίστοιχο ϵ γίνετα ϵ_0 ($\epsilon_r = 1$).
Συσχέτιση μικροσκοπικών και μακροσκοπικών μεγεθών.
Σχέση Clausius-Mossoti. Η ατομική/μοριακή πολωσιμότητα α ορίζεται ως

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{eff}$$

όπου $\mathbf{p}$ η (μοριακή) διπολική ροπή και $\mathbf{E}_{eff}$ το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλεί την πόλωση. Θέλουμε να συσχετίσουμε το α, που είναι σαφώς ένα μικροσκοπικό μέγεθος, με μακροσκοπικά μεγέθη όπως ϵ ή χ.

Ας θεωρήσουμε έναν πυκνωτή με διηλεκτρικό. Γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ ανάμεσα στις πλάκες θα οφείλεται τόσο στην επιφανειακή πυκνότητα των ελεύθερων φορτίων που είναι στις πλάκες του πυκνωτή όσο και στην επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων στις επιφάνειες του διηλεκτρικού. Εμείς θέλουμε να συγκεντρωθούμε σε ένα μόριο του διηλεκτρικού, να βρούμε το πεδίο που πολώνει το μόριο και να εφαρμόσουμε την σχέση $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{eff}$. Αλλά θα πρέπει να εξαιρέσουμε το συγκεκριμένο μόριο που ουσιαστικά συμμετέχει και το ίδιο στον σχηματισμό του συνολικού πεδίου.

Ας λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα που θα βοηθήσει στον υπολογισμό του πεδίου στο σημείο που είναι το συγκεκριμένο μόριο. Υποθέστε ότι όλος ο χώρος είναι γεμάτος με διηλεκτρικό που παρουσιάζει πόλωση $\mathbf{P}$, εκτός από μια κενή σφαιρική κοιλότητα. Θέλουμε να βρούμε το πεδίο που δημιουργείται στο κέντρο O της σφαιρικής κοιλότητας.



Αυτό οφείλεται στη επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων που εμφανίζονται στην σφαιρική επιφάνεια και είναι ίση με

$$\sigma_b = \pm P_\perp = \pm P\cos\theta$$

Οπότε, στο επάνω ημισφαίριο θα εμφανίζεται η $\sigma_b = -P_\perp$ και στο κάτω ημισφαίριο η $\sigma_b = +P_\perp$. Ας βρούμε το πεδίο που δημιουργεί στο O το πάνω ημισφαίριο. Διαλέγοντας ως στοιχειώδη επιφάνεια την λουρίδα ανάμεσα στους ‘‘παράλληλους’’ με γωνία θ και γωνία $\theta + d\theta$, αυτή έχει εμβαδόν $da = (2\pi R\sin\theta)(Rd\theta)$. Και το στοιχειώδες φορτίο θα είναι

$$dq = \sigma_b da = -P\cos\theta\,(2\pi R\sin\theta)(Rd\theta) = -2\pi PR^2\cos\theta\sin\theta d\theta$$

Αυτό το στοιχειώδες φορτίο δημιουργεί στο O πεδίο

$$dE_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi P R^2 \cos\theta \sin\theta d\theta}{R^2} \cos\theta$$

όπου το τελευταίο $\cos\theta$ προβάλει το πεδίο στον άξονα που ορίζεται από το διάνυσμα της πόλωσης. Αυτό γιατί τα φορτία που είναι στην στοιχειώδη λουρίδα δημιουργούν πεδίο με διαφορετική διεύθυνση και μόνο η προβολή στον άξονα που αναφέραμε παραμένει. Η κάθετη σ' αυτόν συνιστώσα αναιρείται. Το συνολικό πεδίο θα είναι

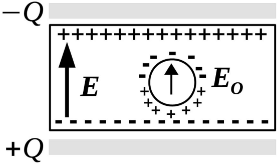
$$E_O = \int dE = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi P R^2 \cos^2\theta \sin\theta}{R^2} =$$
$$= \frac{P}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{P}{2\epsilon_0} \frac{1}{3}$$

Το πεδίο αυτό έχει ίδια φορά με την πόλωση P (το σ_b του πάνω ημισφαιρίου είναι αρνητικό). Το κάτω ημισφαίριο συνεισφέρει το ίδιο πεδίο με την ίδια φορά.

Οπότε, το συνολικό πεδίο στο Ο από το σ_b στην συνολική επιφάνεια της σφαίρας θα είναι

$$\mathbf{E}_O = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Ένα σημαντικό στοιχείο αυτού του αποτελέσματος είναι ότι δεν εξαρτάται από την ακτίνα R της σφαιρικής κοιλότητας.
Γυρίζουμε στο υπολογισμό του πεδίου που δέχεται το απομονωμένο συγκεκριμένο μόριο που επιλέξαμε. Μπορούμε να ''δημιουργήσουμε'' μια μικρή σφαιρική κοιλότητα γύρω από το μόριο. Οπότε, το μόριο δέχεται το πεδίο από την επιφανειακή πυκνότητα των ελεύθερων φορτίων που είναι στις πλάκες του πυκνωτή και την επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων στις επιφάνειες του διηλεκτρικού που είναι απέναντι στις πλάκες του πυκνωτή (που δημιουργούν το συνολικό πεδίο $\mathbf{E}$ ανάμεσα στις πλάκες του πυκνωτή) με επιπλέον τώρα και την επιφανειακή πυκνότητα στην επιφάνεια της σφαιρικής κοιλότητας γύρω από το συγκεκριμένο μόριο.



Άρα το συνολικό πεδίο στο μόριο θα είναι

$$\mathbf{E}_{eff} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα ότι

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}, \quad \mathbf{P} = N_V \mathbf{p}, \quad \chi = \epsilon_0 \chi_r = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)$$

όπου N_V αριθμός μορίων ανά μονάδα όγκου (θυμηθείτε ότι $\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}/V$), η σχέση $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{eff}$ γίνεται

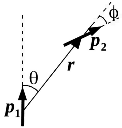
$$\frac{\mathbf{P}}{N_V} = \alpha \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \right) \Rightarrow \frac{\chi \mathbf{E}}{N_V} = \alpha \left(\mathbf{E} + \frac{\chi \mathbf{E}}{3\epsilon_0} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\chi}{3\epsilon_0 + \chi} = \frac{N_V \alpha}{3\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N_V \alpha}{3\epsilon_0}$$

Αυτή είναι η σχέση Clausius-Mossoti που συνδέει το μικροσκοπικό μέγεθος της ατομικής/μοριακής πολωσιμότητας α με το μακροσκοπικό μέγεθος της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ϵ_r.

ΑΣΚΗΣΗ 30

Δύο δίπολα $\mathbf{p}_1$ και $\mathbf{p}_2$ απέχουν σταθερή απόσταση r. Το $\mathbf{p}_1$ είναι σταθερό και σχηματίζει γωνία θ με το r, ενώ το $\mathbf{p}_2$ μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από το σημείο που βρίσκεται. Βρείτε την γωνία ϕ του διπόλου $\mathbf{p}_2$ με το r στη θέση ισορροπίας.



Το πεδίο που δημιουργεί το $\mathbf{p}_1$ στη θέση που είναι το $\mathbf{p}_2$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}_1}{r^3}\right)$$

ενώ η ενέργεια του διπόλου $\mathbf{p}_2$ μέσα στο πεδίο του $\mathbf{p}_1$ είναι

$$U_2 = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1}{r^3}\right)$$

Από το σχήμα βλέπουμε

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r} = p_1 r \cos\theta, \quad \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r} = p_2 r \cos\phi, \quad \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_1 p_2 \cos(\phi + \theta)$$

και η ενέργεια γίνεται

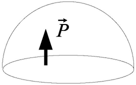
$$U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-3p_1 p_2 \cos\theta\cos\phi + p_1 p_2 \cos(\phi+\theta)}{r^3}\right)$$

Βρίσκουμε τώρα την γωνία ϕ που κάνει την ενέργεια ελάχιστη

$$\begin{aligned}
\frac{dU_2}{d\phi} &= 0 \Rightarrow \\
3\cos\theta\sin\phi - \sin(\phi+\theta) &= 0 \Rightarrow \\
3\cos\theta\sin\phi - \sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta &= 0 \Rightarrow \\
2\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\phi &= 0 \Rightarrow \\
\tan\phi &= \frac{1}{2}\tan\theta
\end{aligned}$$

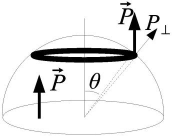
ΑΣΚΗΣΗ 31

Διηλεκτρικό σε σχήμα ημισφαιρίου ακτίνας R είναι πολωμένο με σταθερή πόλωση $\vec{P}$ κάθετη στην επίπεδη επιφάνειά του. Βρείτε την επιφανειακή πυκνότητα του δέσμιου φορτίου στην ημισφαιρική και στην επίπεδη επιφάνεια, καθώς και το αντίστοιχο συνολικό φορτίο σε κάθε επιφάνεια.



Στην ημισφαιρική επιφάνεια

$$\sigma_1 = P_\perp = P\cos\theta$$



ενώ στην επίπεδη

$$\sigma_2 = -P_\perp = -P$$

Τα φορτία. Στην ημισφαιρική επιφάνεια, η στοιχειώδης επιφάνεια είναι $da = 2\pi(R\sin\theta)(Rd\theta)$ και το στοιχειώδες φορτίο σ′ αυτήν $dq = \sigma_1 da = P\cos\theta 2\pi(R\sin\theta)(Rd\theta)$. Το συνολικό φορτίο

$$q = \int_0^{\pi/2} P2\pi R^2 \cos\theta \sin\theta \, d\theta = P2\pi R^2 \left. \frac{\sin^2\theta}{2} \right| 0^{\pi/2} = P\pi R^2$$

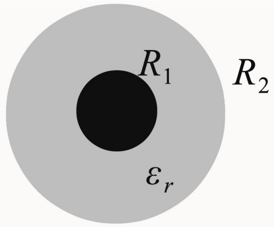
Στην επίπεδη επιφάνεια

$$q' = \sigma_2 \, \pi R^2 = -P\pi R^2$$

Όπως αναμένεται, θα πρέπει $q + q' = 0$, μιας και το διηλεκτρικό είναι αφόρτιστο.

ΑΣΚΗΣΗ 32

Αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R_1 φέρει φορτίο Q. Ο χώρος έξω από τη σφαίρα και έως μια ομόκεντρη σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R_2 είναι γεμάτος διηλεκτρικό σχετικής σταθεράς ϵ_r. Βρείτε το δυναμικό της σφαίρας ως προς το άπειρο. Βρείτε την πόλωση του διηλεκτρικού, τις επιφανειακές πυκνότητες των δέσμιων φορτίων, την χωρική πυκνότητα δέσμιων φορτίων στο διηλεκτρικό και δείξτε ότι το διηλεκτρικό είναι αφόρτιστο.



Λόγω σφαιρικής συμμετρίας το πεδίο θα είναι παντού ακτινικό και θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο.

Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss για σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $r > R_2$, θα πάρουμε

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \qquad r > R_2$$

Για $R_1 < r < R_2$, μπορούμε να ‘‘ξεχάσουμε’’ το διηλεκτρικό αλλά το πεδίο είναι μειωμένο κατά τον παράγοντα $1/\epsilon_r$. Οπότε, στο χώρο αυτό το πεδίο είναι

$$E_2 = \frac{1}{\epsilon_r}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \qquad R_2 > r > R_1$$

Το δυναμικό της σφαίρας θα είναι

$$V(R_1) = -\int_{\infty}^{R_1} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = -\int_{\infty}^{R_2} \mathbf{E}_2\cdot\mathbf{dl} - \int_{R_2}^{R_1} \mathbf{E}_1\cdot\mathbf{dl} =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_{\infty}^{R_2}\frac{dr}{r^2} + \frac{1}{\epsilon_r}\int_{R_2}^{R_1}\frac{dr}{r^2}\right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\epsilon_r}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right]$$

Η πόλωση, για $R_1 < r < R_2$, δίνεται

$$\mathbf{P} = \chi\mathbf{E_2} = \chi\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Οι επιφανειακές πυκνότητες δίνονται

$$\sigma_b(r=R_1) = -P_\perp(r=R_1) = -\chi\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{Q}{R_1^2},$$
$$\sigma_b(r=R_2) = P_\perp(r=R_2) = \chi\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{Q}{R_2^2}$$

Η χωρική πυκνότητα

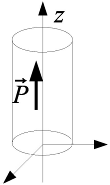
$$\rho_b = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\chi\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\right) = 0$$

(το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται πολύ εύκολα αν χρησιμοποιηθεί η μορφή της απόκλισης σε σφαιρικές συντεταγμένες).
Και το ολικό φορτίο είναι

$$-\chi\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{Q}{R_1^2}\left(4\pi R_1^2\right) + \chi\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{Q}{R_2^2}\left(4\pi R_2^2\right) = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 33

Κύλινδρος, ύψους L και βάσης με εμβαδόν A, από πολωμένο υλικό παρουσιάζει πόλωση $\mathbf{P} = (az^2 + b)\hat{\mathbf{z}}$, όπου z είναι ο άξονας του κυλίνδρου. Να βρεθούν η επιφανειακή πυκνότητα δέσμιων φορτίων στις δύο βάσεις του κυλίνδρου καθώς και η χωρική πυκνότητα των δέσμιων φορτίων. Δείξτε ότι συνολικά ο κύλινδρος είναι αφόρτιστος (θεωρούμε ότι η μία βάση του κυλίνδρου είναι στο $z = 0$ και η άλλη στο $z = L$).



Η επιφανειακή πυκνότητα από δέσμια φορτία δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_b = \pm P_\perp$$

και η χωρική πυκνότητα

$$\rho_b = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \text{για } z = 0 \qquad & \sigma_b = -P_\perp(z=0) = -b \\ \text{για } z = L \qquad & \sigma_b = +P_\perp(z=L) = aL^2 + b \\ \text{και} \qquad & \rho_b = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P} = -2az \end{aligned}$$

Το συνολικό φορτίο στις δύο βάσεις του κυλίνδρου είναι

$$\begin{aligned} Q_b(z=0) &= \sigma_b(z=0)A = -bA, \\ Q_b(z=L) &= \sigma_b(z=L)A = (aL^2 + b)A \end{aligned}$$

Για να βρούμε το φορτίο από τη χωρική πυκνότητα θα πρέπει να ολοκληρώσουμε

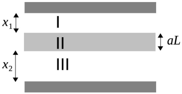
$$Q_{b(V)} = \int_0^L \rho_b A \, dz = \int_0^L (-2az) A \, dz = -2a \, \frac{L^2}{A} = -aL^2 A$$

όπου ο στοιχειώδης όγκος Adz είναι στοιχειώδης κύλινδρος με ύψος dz. Οπότε, αθροίζοντας τα φορτία

$$Q_b(z=0) + Q_b(z=L) + Q_{b(V)} = (-b + aL^2 + b - aL^2)A = 0$$

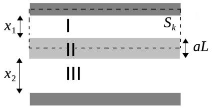
ΑΣΚΗΣΗ 34

Επίπεδος πυκνωτής αποτελείται από δύο παράλληλους οπλισμούς, σχήματος δίσκου με ακτίνα R, που απέχουν απόσταση $L << R$ (ώστε να θεωρούμε αμελητέα τα φαινόμενα των άκρων). Μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή παρεμβάλλεται διηλεκτρικό υλικό με σχετική διηλεκτρική σταθερά ϵ_r. Το υλικό έχει το γεωμετρικό σχήμα των οπλισμών, έχει σταθερό πάχος $d = aL, (0 < a < 1)$, και είναι τοποθετημένο παράλληλα με τους οπλισμούς, (έτσι ώστε οπλισμοί και διηλεκτρικό να είναι ομοαξονικοί).



(α) Αν η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι ΔV, να υπολογιστεί η τιμή της ηλεκτρικής μετατόπισης (D), του ηλεκτρικού πεδίου (E) και της πόλωσης (P) στην περιοχή μεταξύ των οπλισμών (εντός και εκτός διηλεκτρικού). (β) Στην ίδια περίπτωση, να υπολογιστούν τα ελεύθερα φορτία στους οπλισμούς, καθώς και η επιφανειακή και η χωρική πυκνότητα δέσμιων φορτίων στο διηλεκτρικό. (γ) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του συστήματος, (εξαρτάται το αποτέλεσμα από την σχετική θέση του διηλεκτρικού ως προς τους οπλισμούς;).

(α) Έστω ότι το διηλεκτρικό απέχει απόσταση x_1 από τον πάνω οπλισμό και x_2 από τον κάτω οπλισμό του πυκνωτή. Για να υπολογίσουμε τα μεγέθη D, E και P, θα ξεκινήσουμε από το D που σχετίζεται με τα ελεύθερα φορτία. Θεωρούμε μία κλειστή επιφάνεια S_k, που οι βάσεις της έχουν το σχήμα των οπλισμών, και η παράπλευρη επιφάνειά της είναι ένας κύλινδρος ομοαξονικός με τους οπλισμούς. Ροή του D από αυτή την επιφάνεια, έχουμε μόνο από την κάτω βάση της S_k



$$\oint_{S_k} \mathbf{D} \cdot da = Q_f \rightarrow D = \frac{Q_f}{S}$$

ανεξάρτητα από τη θέση της κάτω βάσης (στους υπόχωρους I, II, III) αφού τα ελεύθερα φορτία Q_f βρίσκονται μόνο στην περιοχή των οπλισμών (και θα πρέπει να προσδιοριστούν). Άρα

$$D_I = D_{II} = D_{III} = D = \frac{Q_f}{S} \tag{2}$$

που επιβεβαιώνει την συνέχεια της κάθετης, στην διαχωριστική επιφάνεια, συνιστώσας του $\mathbf{D}$. Επίσης ισχύει

$$\begin{aligned} D &= \epsilon_I E_I = \epsilon_{II} E_{II} = \epsilon_{III} E_{III} \\ &= \epsilon_0 E_I = \epsilon_r \epsilon_0 E_{II} = \epsilon_0 E_{III} \end{aligned} \tag{3}$$

Από τις τελευταίες σχέσεις υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο κάθε περιοχής, προκειμένου να το συσχετίσουμε, μέσω ολοκλήρωσης με την δοσμένη διαφορά δυναμικού ΔV:

$$E_I = \frac{D}{\epsilon_0}, \quad E_{II} = \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0}, \quad E_{III} = \frac{D}{\epsilon_0}$$

Ολοκληρώνοντας το πεδίο E, συσχετίζουμε με την διαφορά δυναμικού

$$|\Delta V| = \int_0^L E\, dx = E_I x_1 + E_{II} aL + E_{III} x_2 = \frac{D}{\epsilon_0} x_1 + \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} aL + \frac{D}{\epsilon_0} x_2 \Rightarrow$$

$$\Delta V = \frac{x_1 + x_1}{\epsilon_0} D + \frac{aL}{\epsilon_r \epsilon_0} D = \left[\frac{L(1-a)}{\epsilon_0} + \frac{aL}{\epsilon_r \epsilon_0} \right] D =$$

$$\frac{\epsilon_r (1-a) + a}{\epsilon_r \epsilon_0} LD \Rightarrow \tag{4}$$

$$D = \frac{\Delta V}{L} \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\epsilon_r (1-a) + a} = D_I = D_{II} = D_{III} \tag{5}$$

(βλ. Εξ.(2)).
Με βάση τις σχέσεις Εξ.(3), υπολογίζουμε τα ηλεκτρικά πεδία

$$E_I = E_{III} = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{\Delta V}{L} \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r (1-a) + a}, \quad E_{II} = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\Delta V}{L} \frac{1}{\epsilon_r (1-a) + a}$$

Οι πολώσεις υπολογίζονται από τη σχέση $P_{I,II,III} = \left(\epsilon_{r_{I,II,III}} - 1 \right) \epsilon_0 E$, οπότε η πόλωση έχει μη-μηδενική τιμή μόνο για την περιοχή του διηλεκτρικού (όπου $\epsilon_{r_{II}} \neq 1$), οπότε

$$P_{II} = (\epsilon_r - 1)\,\epsilon_0 E \Rightarrow P_{II} = \frac{\Delta V}{L}\,\frac{(\epsilon_r - 1)\epsilon_0}{\epsilon_r(1-a)+a} \tag{6}$$

(β) Τα ελεύθερα φορτία στους οπλισμούς υπολογίζονται από τον συνδυασμό των σχέσεων Εξ.(2,5), οπότε ($S = \pi R^2$)

$$D = \frac{Q_f}{S} \Rightarrow \frac{\Delta V}{L}\,\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\epsilon_r(1-a)+a} = \frac{Q_f}{S} \Rightarrow Q_f = \frac{\Delta V}{L}\,\frac{\epsilon_r \epsilon_0 \pi R^2}{\epsilon_r(1-a)+a} \tag{7}$$

Για τη χωρική πυκνότητα δέσμιων φορτίων ισχύει η σχέση $\rho_b = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P} = 0$, δεδομένου ότι $\mathbf{P}$ =σταθ. σύμφωνα με την Εξ.(6).

Για την επιφανειακή πυκνότητα δέσμιων φορτίων:

$$\sigma_b = \mathbf{P}_{II}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \pm\frac{\Delta V}{L}\,\frac{(\epsilon_r - 1)\epsilon_0}{\epsilon_r(1-a)+a}$$

το διαφορετικό πρόσημο αντιστοιχεί στις δύο επιφάνειες του διηλεκτρικού.

(γ) Η χωρητικότητα του συστήματος υπολογίζεται από την Εξ.(7) και από τη σχέση ορισμού της

$$C = \frac{|Q_f|}{|\Delta V|} \Rightarrow C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\pi R^2}{L} \frac{1}{\epsilon_r(1-a)+a} \tag{8}$$

Η τελευταία σχέση θα μπορούσε να προκύψει θεωρώντας τα τμήματα x_1, aL, x_2, ως τρεις πυκνωτές (με τα κατάλληλα χαρακτηριστικά) συνδεδεμένους εν σειρά. Πράγματι αν

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{\pi R^2}{x_1}, \quad C_2 = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\pi R^2}{aL}, \quad C_3 = \epsilon_0 \frac{\pi R^2}{x_2},$$

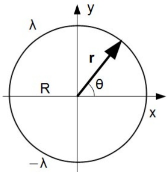
και με τον συνδυασμό ''εν σειρά'' πυκνωτών

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

θα πάρουμε την ίδια τιμή για την συνολική χωρητικότητα C. Επίσης από την Εξ.(8) προκύπτουν οι σωστές οριακές τιμές για $a = 1$ και $a = 0$. Επιπλέον, φαίνεται ότι **η χωρητικότητα του συστήματος ΔΕΝ εξαρτάται από την σχετική θέση του διηλεκτρικού, αφού δεν εμφανίζονται με διακριτό ρόλο, στο τελικό αποτέλεσμα, οι αποστάσεις** x_1, x_2.

ΑΣΚΗΣΗ 39

Να υπολογιστεί η διπολική της γραμμικής κυκλικής (ακτίνας R) κατανομής όπου ο μισός κύκλος έχει πυκνότητα λ και ο άλλος μισός $-\lambda$



Η διπολική ροπή μια κατανομής φορτίου ορίζεται ώς

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} dq$$

Επειδή το συνολικό φορτίο είναι μηδενικό, η διπολική ροπή δεν εξαρτάται από τη θέση της αρχής των συντεταγμένων, οπότε επιλέγουμε το κέντρο του κύκλου.

Στην περίπτωσή μας $dq = \lambda dl = \lambda R d\phi$. Οπότε θα έχουμε

$$\mathbf{p} = \int_0^{\pi} \mathbf{r}\lambda R d\phi - \int_{\pi}^{2\pi} \mathbf{r}\lambda R d\phi$$

Αναλύοντας το $\mathbf{r} = R\cos\phi\hat{\mathbf{x}} + R\sin\phi\hat{\mathbf{y}}$, Θα πάρουμε

$$p_x = \int_0^{\pi} R\cos\phi\lambda R d\phi - \int_{\pi}^{2\pi} R\cos\phi\lambda R d\phi =$$

$$= \lambda R^2 \left(\sin\phi|_0^{\pi} - \sin\phi|_{\pi}^{2\pi} \right) = 0$$

$$p_y = \int_0^{\pi} R\sin\phi\lambda R d\phi - \int_{\pi}^{2\pi} R\sin\phi\lambda R d\phi =$$

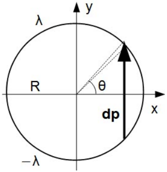
$$= \lambda R^2 \left(-\cos\phi|_0^{\pi} + \cos\phi|_{\pi}^{2\pi} \right) = 4\lambda R^2$$

Οπότε

$$\mathbf{p} = 4\lambda R^2\hat{\mathbf{y}}$$

Άλλος τρόπος. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε στοιχειώδη δίπολα

$$\mathbf{dp} = dq\mathbf{s} = \lambda dl\,\mathbf{s} = \lambda R d\phi\, 2R\sin\phi\hat{\mathbf{y}} = 2\lambda r^2 \sin\phi d\phi\,\hat{\mathbf{y}}$$



και

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{y}} \int_0^{\pi} 2\lambda R^2 \sin\phi d\phi = 2\lambda R^2 \left(-\cos\phi|_0^{\pi} \right) = 4\lambda R^2\, \hat{\mathbf{y}}$$