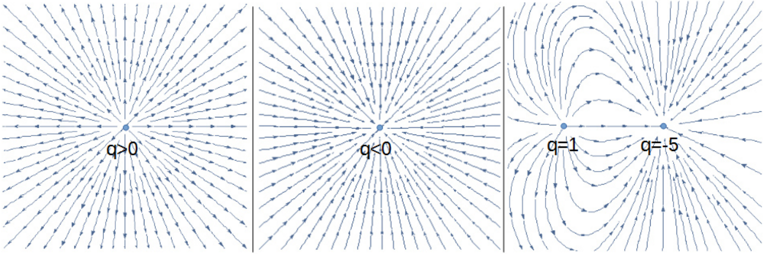


Κατανομές φορτίου.

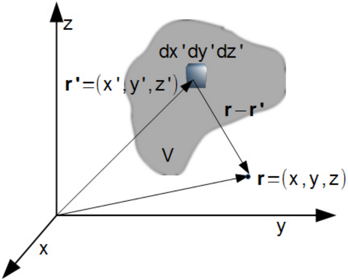
Όπως από τις σημειακές μάζες περνάμε στις συνεχείς κατανομές μάζας (στα σώματα) με πυκνότητα (μάζας) dm/dv, έτσι και από τα σημειακά φορτία περνάμε στις συνεχείς κατανομές φορτίου με πυκνότητα φορτίου $\rho = dq/dv$. Έχοντας λοιπόν μια τέτοια κατανομή $\rho(x, y, z)$, το στοιχειώδες φορτίο dq που περιέχεται στον στοιχειώδη όγκο dv θα είναι

$$dq = \rho(x, y, z)\, dv = \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Ας δούμε τώρα πώς θα δίνεται το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(x, y, z)$ που οφείλεται σε μια κατανομή φορτίου $\rho(x, y, z)$ που εκτείνεται μέσα σε κάποιο όγκο V. Σ′ ένα στοιχειώδη όγκο $dv' = dx'dy'dz'$ που βρίσκεται στο σημείο $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, το στοιχειώδες φορτίο είναι $dq = \rho(x', y', z')\, dx'dy'dz'$. Το στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί στο σημείο $\mathbf{r} = (x, y, z)$ θα είναι

$$\mathbf{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}\,\widehat{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(x', y', z')dx'dy'dz'}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}\,\widehat{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$$

όπου $\widehat{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση του $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$



Και τώρα πρέπει να αθροίσουμε όλες τις συνεισφορές από τους στοιχειώδους όγκους για να καλύψουμε τον χώρο V που είναι η κατανομή του φορτίου

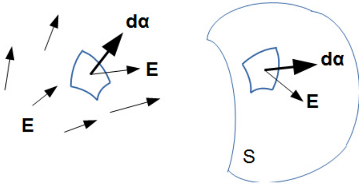
$$\mathbf{E}(x, y, z) = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \widehat{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}$$

Το σημείο $\mathbf{r} = (x, y, z)$ μπορεί να βρίσκεται και μέσα στην κατανομή. Θυμηθείτε ότι ο νόμος της παγκόσμιας έλξης του Newton δίνει άπειρο πεδίο πάνω σε σημειακή μάζα. Αλλά μπορούμε να βρούμε το πεδίο βαρύτητας στο εσωτερικό συνεχούς κατανομής μάζας (για παράδειγμα στο εσωτερικό της Γης).

Ροή.

Ένα πολύ χρήσιμο μέγεθος είναι η ροή του ηλεκτρικού πεδίου Φ. Ας την ορίσουμε. Θεωρούμε χώρο όπου υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο **E**, και μια απειροστή (επομένως επίπεδη) επιφάνεια **da**, με το διάνυσμα **da** να είναι κάθετο στην επιφάνεια. Η στοιχειώδης ροή του ηλεκτρικού πεδίου από την στοιχειώδη επιφάνεια είναι

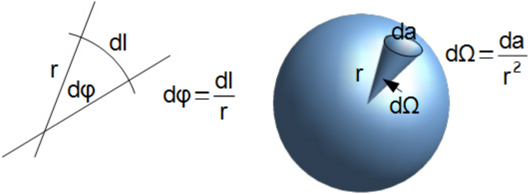
$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{da}$$



Αν η επιφάνεια S δεν είναι απειροστή, την χωρίζουμε σε απειροστές **da**, βρίσκουμε την στοιχειώδη ροή και ολοκληρώνουμε στην συνολική επιφάνεια S

$$\Phi_S = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{da}$$

Γωνία και στερεά γωνία.



Ανάλογα με τον ορισμό της γωνίας

$$d\varphi = \frac{dl}{r}$$

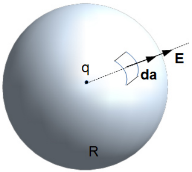
ορίζουμε τη στερεά γωνία

$$d\Omega = \frac{da}{r^2}$$

Οπότε, η πλήρης στερεά γωνία γύρω από ένα σημείο θα είναι

$$\Omega = \int \frac{da}{r^2} = \frac{1}{r^2}\int da = \frac{1}{r^2}4\pi r^2 = 4\pi$$

Ο νόμος του Gauss.



Ας βρούμε την ροή του πεδίου που δημιουργεί ένα σημειακό φορτίο q από μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R με κέντρο το φορτίο. Παίρνοντας μια στοιχειώδη επιφάνεια της σφαίρας, το διάνυσμα **da** είναι ακτινικό (κάθετο στην στοιχειώδη επιφάνεια). Αλλά, γνωρίζουμε επίσης ότι το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί το q είναι κι αυτό ακτινικό. Επομένως

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}\, \hat{\mathbf{r}} \cdot da\, \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}\, da$$

και η συνολική ροή από την επιφάνεια της σφαίρας

$$\Phi = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}\, da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \int_S da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \left(4\pi R^2\right) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

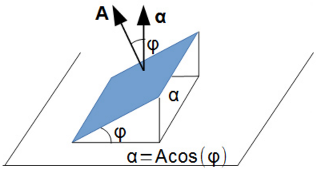
Η επόμενη κίνηση είναι να βρούμε την ροή ενός σημειακού φορτίου q από μια κλειστή επιφάνεια S, που περιέχει το φορτίο. Κάνουμε τις εξής σκέψεις:

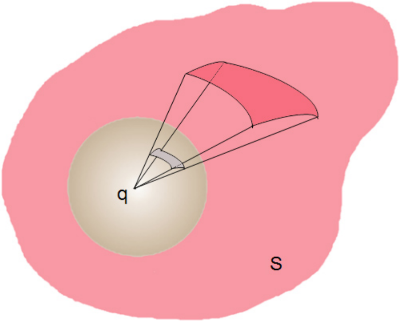
1. Θεωρούμε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r, με κέντρο το φορτίο, που να περιέχεται εξ ολοκλήρου στην αρχική μας επιφάνεια S.

2. Θεωρούμε, πάνω στην σφαιρική αυτή επιφάνεια, στοιχειώδεις επιφάνειες που την καλύπτουν πλήρως.

3. Σε κάθε μια από αυτές τις στοιχειώδεις επιφάνειες, αντιστοιχεί μια στερεά γωνία. Αυτή η στερεά γωνία ‘‘αποκόπτει’’ μια στοιχειώδη επιφάνεια στην αρχική μας επιφάνεια S.

Πρώτο συμπέρασμα: Το σύνολο των στοιχειωδών επιφανειών στην αρχική μας επιφάνεια S, καλύπτουν πλήρως την επιφάνεια αυτή.

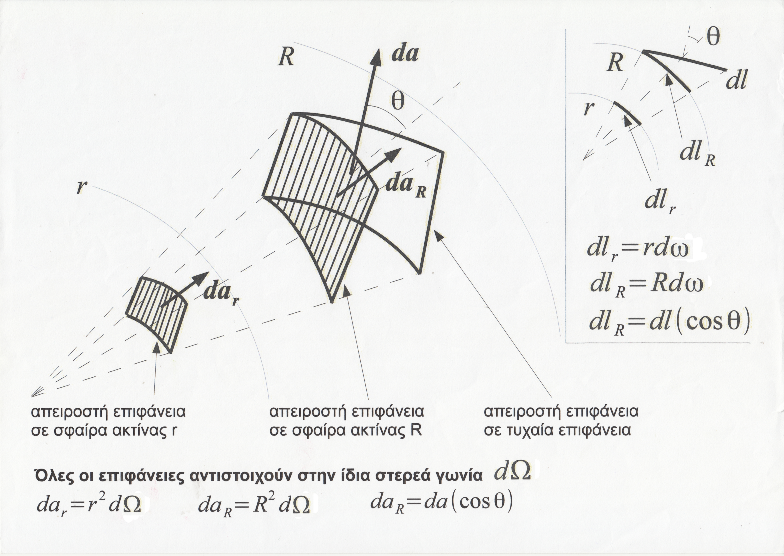




Θα δείξουμε τώρα ότι η ροή του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίδια από τις δυο στοιχειώδεις επιφάνειες που αντιστοιχούν στην ίδια στερεά γωνία, $d\Omega$: την μια πάνω στην σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r, da_r, και την άλλη στην επιφάνεια S, da.
Φέρνουμε στην περιοχή που είναι η στοιχειώδης επιφάνεια da πάνω στην S, επιφάνεια σφαίρας (με κέντρο το φορτίο μας) που έστω έχει ακτίνα R. Η στερεά μας γωνία $d\Omega$ ‘‘κόβει’’ στοιχειώδη επιφάνεια da_R.

Από τον ορισμό της στερεάς γωνίας έχουμε

$$da_r = r^2\, d\Omega, \qquad da_R = R^2\, d\Omega$$



Η ηλεκτρική ροή από τις δύο αυτές στοιχειώδεις επιφάνειες είναι

$$d\Phi_r = \mathbf{E}(r)\cdot\mathbf{da_r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,r^2\,d\Omega = \frac{q d\Omega}{4\pi\epsilon_0}$$
$$d\Phi_R = \mathbf{E}(R)\cdot\mathbf{da_R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{R^2}\,R^2\,d\Omega = \frac{q d\Omega}{4\pi\epsilon_0}$$

δηλαδή είναι ίσες (μην ξεχνάτε ότι τα διανύσματα $\mathbf{da_r}$ και $\mathbf{da_R}$ είναι ακτινικά). Οπότε, αρκεί να δείξουμε τώρα ότι η ηλεκτρική ροή από τις στοιχειώδεις επιφάνειες da_R και da είναι ίσες. Προσέξτε ότι η da_R είναι ουσιαστικά η προβολή της da πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας R. Επομένως

$$da_R = da\cos\theta$$

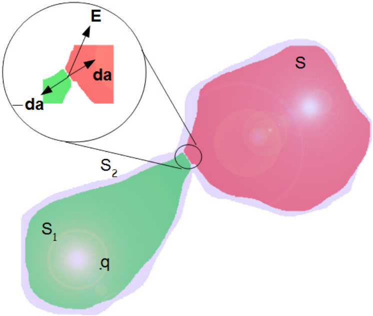
όπου θ είναι η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα $\mathbf{da_R}$ και $\mathbf{da}$. Οπότε, η ροή από την στοιχειώδη επιφάνεια da είναι

$$d\Phi = \mathbf{E}(R)\cdot\mathbf{da} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{R^2}\,da\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{R^2}\,da_R = d\Phi_R = d\Phi_r$$

Εφ΄ όσον,όπως είπαμε, αν το σύνολο των da_r καλύπτει τη σφαίρα με ακτίνα r, τότε οι αντίστοιχες da καλύπτουν την επιφάνεια S, τότε η ηλεκτρική ροή από την κλειστή τυχαία επιφάνεια που περιέχει το φορτίο q είναι ίση με την αντίστοιχη από την σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα r. Επομένως

$$\Phi_S = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Να συμπληρώσουμε το θεώρημα του Gauss δείχνοντας ότι η ηλεκτρική ροή από κλειστή επιφάνεια που δεν περιέχει το φορτίο είναι μηδενική.
Θεωρούμε κλειστή επιφάνεια S που δεν περιέχει το σημειακό φορτίο q. Φέρνω μια άλλη κλειστή επιφάνεια S_1 που περιέχει το φορτίο και ''ακουμπάει'' την S σε μια μικρή επιφάνεια da. Τέλος, φέρνω μια τρίτη κλειστή επιφάνεια S_2, που περιέχει το φορτίο και συμπίπτει ακριβώς με τις S και S_1 εκτός από τη μικρή περιοχή όπου ακουμπάνε οι S και S_1. Είναι εύκολο να δούμε ότι η ηλεκτρική ροή από την μεγάλη επιφάνεια S_2 είναι ίση με το άθροισμα της ροής από την S και την S_1



$$\Phi_{S_2} = \Phi_S + \Phi_{S_1}$$

Κι αυτό, γιατί το τμήμα της επιφάνειας των S και S_1 που δεν συμπίπτουν με την S_2 είναι το μικρό τμήμα που ακουμπάνε μεταξύ τους με συνολική ροή μηδέν, μιας και τα τοπικά διανύσματα των επιφανειών είναι αντίθετα. Αλλά, ήδη ξέρουμε ότι κλειστή επιφάνεια που περιέχει το φορτίο έχει ροή q/ϵ_0. Άρα

$$\Phi_{S_2} = \Phi_{S_1} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi_S = 0$$