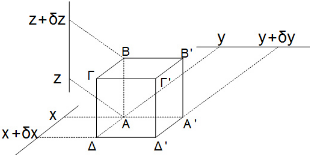
Η ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ **GAUSS**

Η *απόκλιση* **divE** μιας διανυσματικής συνάρτησης E ορίζεται ως

$$\mathbf{divE} \text{ ή } \nabla \cdot \mathbf{E} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{S(V)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = \frac{d\Phi}{dv}$$

Προσοχή: το σύμβολο V είναι όγκος, όχι δυναμικό. Το $S(V)$ αναφέρεται στην κλειστή επιφάνεια S που περιβάλλει ένα όγκο V.

Ας δούμε τη μορφή παίρνει η απόκλιση στις καρτεσιανές συντεταγμένες. Θεωρείστε μια στοιχειώδη επιφάνεια κύβου με ακμές dx, dy και dz σ' ένα χώρο όπου υπάρχει το πεδίο **E**. Ας βρούμε την ροή που διέρχεται από αυτήν την επιφάνεια.



$$\mathrm{AB\Gamma\Delta} \to \boldsymbol{\delta a} = \delta x\, \delta z(-\hat{\mathbf{j}}), \qquad \mathrm{A'B'\Gamma'\Delta'} \to \boldsymbol{\delta a} = \delta x\, \delta z(+\hat{\mathbf{j}})$$

$$\delta\Phi_{\mathrm{AB\Gamma\Delta}} = -E_2(x, y, z)\delta x\, \delta z, \qquad \delta\Phi_{\mathrm{A'B'\Gamma'\Delta'}} = +E_2(x, y+\delta y, z)\delta x\, \delta z$$

Αθροίζοντας

$$\delta\Phi_{\mathrm{AB\Gamma\Delta}} + \delta\Phi_{\mathrm{A'B'\Gamma'\Delta'}} = [E_2(x, y+\delta y, z) - E_2(x,y,z)]\,\delta x\,\delta z =$$
$$= \left[\frac{\delta E_2}{\delta y}\,\delta y\right]\delta x\,\delta z = \left[\frac{\delta E_2}{\delta y}\,\delta y\right]\delta x\,\delta z \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d\Phi_{\mathrm{AB\Gamma\Delta+A'B'\Gamma'\Delta'}} = \frac{\partial E_2}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \frac{\partial E_2}{\partial y}\,dv$$

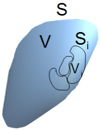
με dv ο στοιχειώδης όγκος $dx\,dy\,dz$. Όμοια και από τις άλλες πλευρές του κύβου

$$d\Phi_{\mathrm{\Gamma\Gamma'\Delta'\Delta+BB'A'A}} = \frac{\partial E_1}{\partial x}\,dv, \qquad d\Phi_{\mathrm{BB'\Gamma'\Gamma+AA'\Delta'\Delta}} = \frac{\partial E_3}{\partial z}\,dv$$

και η συνολική ροή

$$d\Phi = \left(\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}\right)dv \Rightarrow \frac{d\Phi}{dv} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}$$

Το θεώρημα του Gauss. Το θεώρημα του Stokes συνδέει ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα με ένα επιφανειακό. Το θεώρημα του Gauss συνδέει ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα με ένα όγκου.



Έχοντας ένα όγκο V που καλύπτεται από την κλειστή επιφάνεια S, ''γεμίζουμε'' τον όγκο με μικρότερους όγκους (κυψελίδες) V_i με αντίστοιχες επιφάνειες S_i.

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{da} = \sum_i \oint_{S_i} \mathbf{E}\cdot\mathbf{da}, \qquad \text{αρ. κυψελίδων} \to \infty,\ V_i(S_i)\to 0$$

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{da} = \lim_{V_i\to 0}\sum_i \frac{1}{V_i}\oint_{S_i}\mathbf{E}\cdot\mathbf{da}\ V_i = \int_{V(S)}\left[\lim_{V_i\to 0}\frac{1}{V_i}\oint_{S_i}\mathbf{E}\cdot\mathbf{da}\right] dv$$

$$\boxed{\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{da} = \int_{V(S)} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}\, dv}$$

Η διαφορική μορφή του Νόμου του Gauss. Ο νόμος του Gauss σε ολοκληρωτική μορφή που γνωρίζουμε ήδη είναι

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = \frac{Q_{(S)}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V(S)} \rho dv$$

Το αριστερό μέλος από το *θεώρημα* του Gauss μπορεί να γραφεί ως

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = \int_{V(S)} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} \, dv$$

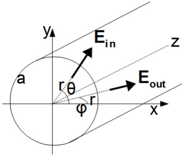
Επομένως

$$\int_{V(S)} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} \, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V(S)} \rho dv$$

Φυσικά, αν δύο ολοκληρώματα είναι ίσα *δεν* σημαίνει ότι οι υπό ολοκλήρωση συναρτήσεις είναι ίσες. Αλλά οι παραπάνω ισότητα ισχύει για *οποιοδήποτε* όγκο V. Επομένως, θα έχουμε

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Στο εσωτερικό μια κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας βάσης a και απείρου μήκους, υπάρχει φορτίο σταθερής πυκνότητας ρ. Θέλουμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται σ′ αυτήν την κατανομή και να ελέγξουμε ότι ισχύει η διαφορική μορφή του νόμου του Gauss.



Θεωρούμε ότι ο άξονας του κυλίνδρου είναι ο άξονας z. Θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Gauss. Λόγω συμμετρίας περιμένουμε το διάνυσμα του πεδίου να είναι παντού κάθετο στον άξονα z και να εξαρτάται μόνο από την απόσταση r από τον άξονα του κυλίνδρου. Χωρίζουμε των χώρο σ′ αυτόν μέσα στο κύλινδρο($r < a$) και εκτός του κυλίνδρου ($r > a$).

α) Επιλέγουμε επιφάνεια κυλίνδρου S με ακτίνα $r < a$ και ύψος L. Η ροή του πεδίου από αυτήν την επιφάνεια προέρχεται μόνο από την ροή στην παράπλευρη επιφάνειά του. Από τις βάσεις δεν έχουμε ροή διότι το πεδίο είναι πράλληλο με τις βάσεις. Το φορτίο μέσα σ' αυτήν την επιφάνεια είναι ίσο με την πυκνότητα ρ επί τον όγκο $\pi r^2 L$. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss

$$\oint_S \mathbf{E}_{in} \cdot \mathbf{da} = \frac{\rho \pi r^2 L}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{in} 2\pi r L = \frac{\rho \pi r^2 L}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{in} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$

β) Τώρα η κυλινδρική επιφάνεια έχει ακτίνα $r > a$. Η ροή από αυτήν έχει την ίδια μορφή αλλά το περιεχόμενο φορτίο είναι ως την ακτίνα a. Πέρα από την απόσταση αυτή από τον άξονα δεν έχουμε φορτίο. Άρα

$$E_{out} 2\pi r L = \frac{\rho \pi a^2 L}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{out} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{a^2}{r}$$

Ας βρούμε τώρα την απόκλιση του πεδίου. Αν δουλέψουμε στις καρτεσιανές συντεταγμένες θα γράψουμε το πεδίο με τις προβολές του στους άξονες x και y: $\mathbf{E} = (E_1, E_2, 0)$

$$E_1 = E\cos\theta = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\, r\, \frac{x}{r} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\, x \qquad r < a$$

$$E_1 = E\cos\theta = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\, \frac{a^2}{r}\, \frac{x}{r} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\, \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad r > a$$

$$E_2 = E\sin\theta = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\, r\, \frac{y}{r} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\, y \qquad r < a$$

$$E_2 = E\sin\theta = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\, \frac{a^2}{r}\, \frac{y}{r} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\, \frac{y}{x^2 + y^2} \qquad r > a$$

Παίρνουμε την απόκλιση. Για $r > a$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}$$
$$= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

και για $r < a$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}(1+1) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Δηλαδή, όπως λέει ο νόμος του Gauss μιας και για $r < a$ έχουμε πυκνότητα ρ, ενώ για $r > a$ η πυκνότητα είναι μηδενική. Φυσικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την μορφή της απόκλισης σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Γράφουμε πρώτα το πεδίο σε κυλινδρικές

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r\hat{\mathbf{r}}, \quad r < a, \qquad \mathbf{E} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}}, \quad r > a$$

μιας και δεν υπάρχουν άλλες συνιστώσες.

Η απόκλιση στις κυλινδρικές γράφεται

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Οπότε, εφαρμόζοντας, εύκολα παίρνουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r^2)}{\partial r}\right] = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad r < a$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r/r)}{\partial r}\right] = 0, \quad r > a$$

ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Είχαμε υπολογίσει το έργο που χρειαζόμαστε για να φέρουμε N φορτία από το άπειρο σε αποστάσεις r_{ij}

$$W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1, i\neq j}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Αυτό μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} q_j \sum_{i=1, i\neq j}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} q_j\, V(r_j)$$

Για στοιχειώδη φορτία θα γράφαμε

$$dW = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} dq_j V(r_j)$$

και ολοκληρώνοντας

$$W = \frac{1}{2}\int dq\, V = \frac{1}{2}\int \rho V\, dv$$

Προσοχή: $V \rightarrow$συνάρτηση δυναμικού και $dv \rightarrow$στοιχ. όγκος.

Μπορούμε να εκφράσουμε την ενέργεια του ηλεκτροστατικού πεδίου με ακόμα έναν ενδιαφέροντα τρόπο. Ξεκινάμε από την έκφραση που μόλις γράψαμε, αντικαθιστώντας στην θέση του ρ το $\epsilon_0 \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}\right)$

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V \, dv = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}\right) \, V \, dv$$

Ισχύει (ανάλογη με την παραγώγιση γινομένου)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E} V) = \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}\right) V + \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\nabla} V$$

Οπότε, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon_0}{2}\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E} V) \, dv + \frac{\epsilon_0}{2}\int_V -\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\nabla} V \, dv \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E} V) \, dv + \frac{\epsilon_0}{2}\int_V E^2 \, dv \qquad (\text{μιας και } \boldsymbol{\nabla} V = -\mathbf{E}) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}\oint_{S(V)} \mathbf{E} \, V \mathbf{da} + \frac{\epsilon_0}{2}\int_V E^2 \, dv \qquad (\text{θεώρημα του Gauss}) \end{aligned}$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα $S(V)$ είναι η κλειστή επιφάνεια που περιβάλλει το όγκο V. Αν αυτός ο όγκος μεγαλώσει πολύ (και τελικά περιλαμβάνει όλο τον χώρο!!) η επιφάνεια και αυτή μεγαλώνει. Αν δεν έχω φορτία στο άπειρο, γνωρίζω ότι

$$E \sim \frac{1}{r^2}, \qquad V \sim \frac{1}{r}, \qquad S \sim r^2$$

Επομένως, το πρώτο ολοκλήρωμα μηδενίζεται αν συμπεριλάβω όλο τον χώρο. Και απομένει

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 \, dv$$

Η ΛΑΠΛΑΣΙΑΝΗ (**LAPLACIAN**)

Ας γράψουμε τη σχέση που συνδέει το δυναμικό V με το πεδίο $\mathbf{E}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)$$

Παίρνουμε τώρα την απόκλιση του $\mathbf{E}$. Από την μορφή της απόκλισης στις καρτεσιανές θα πάρουμε

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)$$

Η τελευταία παρένθεση ονομάζεται η λαπλασιανή (laplacian) της (βαθμωτής) συνάρτησης V. Δηλαδή

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} V = -\boldsymbol{\nabla}^2 V$$

όπου φαίνεται και ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε για την λαπλασιανή.
Προσοχή: η παραπάνω μορφή της λαπλασιανής είναι μόνο για τις καρτεσιανές συντεταγμένες.

Από την διαφορική μορφή του νόμου του Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, παίρνουμε την σχέση που ικανοποιεί το V

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 V = \rho/\epsilon_0$$

Η μορφή αυτή της διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή το άθροισμα των δεύτερων μερικών παραγώγων μια συνάρτησης να ισούται με μια γνωστή συνάτηση, είναι η λεγόμενη εξίσωση του Πουασόν (Poisson). Η παραπάνω εξίσωση είναι η διαφορική μορφή της σχέσης που έχουμε αναφέρει όταν γράφαμε το δυναμικό κατανομής φορτίου

$$V(x_0, y_0, z_0)_{/\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x, y, z)\, dv}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όταν, σε κάποια περιοχή του χώρου όπου επικρατεί ηλεκτρικό πεδίο δεν υπάρχει φορτίο, δηλαδή $\rho = 0$

$$\nabla^2 V = 0$$

Αυτή είναι η λεγόμενη διαφορική εξίσωση του Λαπλάς (Laplace). Οι συναρτήσεις που υπακούουν μια τέτοια διαφορική, δηλαδή η λαπλασιανή τους να μηδενίζεται, λέγονται αρμονικές συναρτήσεις και έχουν πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Μια από αυτές λέει ότι η μέση τιμή μιας τέτοιας συνάρτησης στα σημεία του χώρου που είναι πάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια, είναι ίση με την τιμή της συνάρτησης στο κέντρο αυτής της σφαιρικής επιφάνειας. Θα το δείξουμε χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα από την την ηλεκτροστατική.
Θα δείξουμε συγκεκριμένα ότι αν έχουμε ένα σημειακό φορτίο Q, η μέση τιμή του δυναμικού που δημιουργεί στα σημεία που αποτελούν την επιφάνεια σφαίρας *που δεν περιέχει το φορτίο*, είναι ίδια με την τιμή του δυναμικού στο κέντρο της σφαιρικής επιφάνειας.
Έχοντας το φορτίο Q, φέρνουμε φορτία

$$q_1 = q_2 = q_3 = ... = q_N \equiv q$$

από το άπειρο και τα τοποθετούμε, με ομογενή τρόπο, στην επιφάνεια της σφαίρας. Τι έργο χρειαζόμαστε γι΄ αυτό;

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Qq_1}{r_1} + \left(\frac{Qq_2}{r_2} + \frac{q_1 q_2}{r_{12}}\right) + \left(\frac{Qq_3}{r_3} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) + ...\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q\left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q}{r_2} + \frac{Q}{r_3} + ...\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i,j,i\neq j}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Η σειρά που φέρνουμε τα φορτία δεν έχει καμια σημασία. Αν φέρουμε πρώτα το N φορτία πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, θα χρειαστούμε έργο που αντιστοιχεί στον όρο

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i,j,i\neq j}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Τώρα φέρνουμε το φορτίο Q. Επειδή τα N φορτία είναι σφαιρικά συμμετρικά τοποθετημένα και το Q βρίσκεται εκτός αυτής της σφαιρικής επιφάνειας, το φορτίο Q ‘‘βλέπει’’ το σύνολο των φορτίων (Nq) σαν να είναι όλα συγκεντρωμένα στο κέντρο της σφαιρικής επιφάνειας. Αν το φορτίο Q είναι στο σημείο O και το κέντρο της σφαιρικής επιφάνειας στο σημείο O', τότε το έργο για να φέρουμε το φορτίο Q στο O είναι

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{QNq}{OO'}$$

Επομένως, συγκρίνοντας την ενέργεια που χρειαστήκαμε ανάμεσα στους δυο τρόπους που φτιάξαμε την τελική κατανομή με το φορτίο Q και τα N φορτία q, πέρνουμε

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{QNq}{OO'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q\left(\frac{Q}{r_1}+\frac{Q}{r_2}+\frac{Q}{r_3}+...\right) \Rightarrow$$
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{OO'} = \frac{1}{N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r_1}+\frac{Q}{r_2}+\frac{Q}{r_3}+...\right)$$

ή, με άλλα λόγια

$$V(O') = \frac{1}{N}\left(V(r_1)+V(r_2)+V(r_3)+...\right)$$