

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ - ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

2ο ΕΞΑΜΗΝΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών ΕΜΠ

Νίκος Τράκας

Περιεχόμενα I

- 1 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ, ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS
- 2 ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ
- 3 ΒΑΘΜΙΔΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
- 4 ΒΑΘΜΙΔΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ II
- 5 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ
- 6 ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑ STOKES
- 7 ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑ GAUSS. ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΤΟΥ GAUSS
- 8 ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ
- 9 ΛΑΠΛΑΣΙΑΝΗ
- 10 ΑΓΩΓΟΙ. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΙΔΩΛΩΝ
- 11 ΡΕΥΜΑΤΑ
- 12 ΤΟ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ
- 13 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΕΔΙΩΝ
- 14 ΠΕΔΙΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ
- 15 Η ΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΟΙ ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ MAXWELL
- 16 ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ ΣΤΗΝ ΎΛΗ

- 17 ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ ΣΤΗΝ ΥΛΗ
- 18 ΑΣΚΗΣΕΙΣ
- 19 ΠΑΡΑΤΗΜΑ Α΄. ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ
- 20 ΠΑΡΑΤΗΜΑ Β΄. Η ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΩΣ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ, ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ **GAUSS**

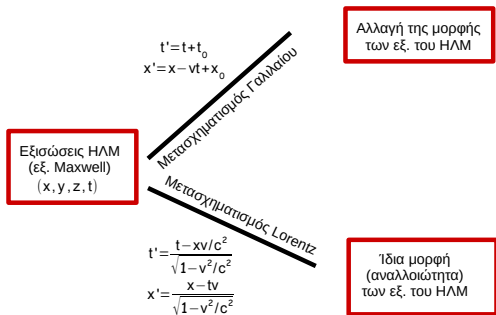
Ηλεκτρικό φορτίο

Οι πρώτοι ερευνητές δεν συσχέτιζαν την περίεργη συμπεριφορά των ηλεκτρισμένων αντικειμένων και την εν γένει συμπεριφορά της φύσης.

Τώρα γνωρίζουμε ότι οι ηλεκτρικές δυνάμεις διέπουν σε μεγάλο βαθμό τις φυσικές και χημικές ιδιότητες της ύλης, από το άτομο έως το κύτταρο. Τις γνώσεις αυτές τις οφείλουμε στους Ampère, Faraday, Maxwell, Coulomb κ.α. (19ος αιώνας)

Ο κλασικός (μη κβαντικός) ηλεκτρομαγνητισμός (ΗΛΜ) ασχολείται με τα φορτία, τα ρεύματα και τις αλληλεπιδράσεις τους **σαν να ήταν δυνατόν να μετρηθούν ανεξάρτητα και με απεριόριστη ακρίβεια**. Ο κβαντικός νόμος και η σταθερά του Planck, h , αγνοείται. Η κλασική θεωρία του ΗΛΜ είχε φτάσει στην πληρότητά της πριν την ανακάλυψη του Planck και “επέζησε” της επανάστασης που αυτή εισήγαγε. Κι αυτό γιατί ο ΗΛΜ ήταν σωστά βασισμένος στο πείραμα: πηνία, πυκνωτές, παλλόμενα ρεύματα, ραδιοκύματα. Αλλά τί γίνεται στην περιοχή των διαστάσεων του μορίου;

Γιαί όμως ο ΗΛΜ επέζησε της επανάστασης της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας; Διότι, απλούστατα, η ειδική θεωρία της σχετικότητας ξεπήδησε από την ασυμφωνία των εξισώσεων του ΗΛΜ με την κλασική, μη σχετικιστική, μηχανική.



Η κβαντομηχανική όμως, που έχουμε την πεποίθηση ότι διέπει τον μικρόκοσμο, επέφερε μικρές διορθώσεις στην περιοχή αυτή. Η επέμβαση της κβαντομηχανικής έγκειται στο πώς θα συμπεριφερθούν τα φορτισμένα στοιχειώδη σωματίδια κάτω από τις δυνάμεις του ΗΛΜ, τις ίδιες που κινούν τα φύλλα ενός ηλεκτροσκόπιου. Έτσι έχουμε την **Κβαντική Ηλεκτροδυναμική**, που αποτελεί το τελειότερο πεδίο ελέγχου της κβαντομηχανικής με εκπληκτική συμφωνία.

Ποια είναι τα θεμελιώδη στοιχεία του ΗΛΜ.

Η παρουσία του ηλεκτρικού φορτίου σε 2 μορφές, αυτές σπου αποκαλούμε θετικό και αρνητικό φορτίο. Στην κβαντομηχανική (ποιο σωστά στην κβαντική θεωρία πεδίου) η ύπαρξη των δύο αυτών μορφών συνδέεται με την παρουσία εσωτερικών συμμετριών της θεωρίας.

Η διατήρηση του φορτίου

Δεν έχουμε παρατηρήσει ποτέ, σε κλειστό απομονωμένο σύστημα, το φορτίο να μην διατηρείται. Επίσης έχουμε πλήρη ισότητα στην (απόλυτη) τιμή του φορτίου μεταξύ σωματιδίου και αντισωματιδίου. Αυτή ισότητα, μαζί με την αντίστοιχη της μάζας ανάμεσα σε σωματίδιο-αντισωματίδιο είναι απόρροια μιας πολύ γενικής συμμετρίας που θεωρούμε ακράδαντα ότι υπακούει η φύση (η λεγόμενη συμμετρία CPT). Ολόκληρη η μοντέρνα φυσική του μικρόκοσμου στηρίζεται σ' αυτή την συμμετρία. Οπότε, διατυπώνουμε το αξίωμα ότι το συνολικό φορτίο (αλγεβρικό άθροισμα) σ' ένα απομονωμένο σύστημα δεν μεταβάλλεται.

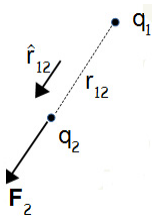
Η κβάντωση του φορτίου

Το περίφημο πείραμα του Millikan, 1909 (και πολλά άλλα) έδειξαν ότι όλα τα φορτία είναι πολλαπλάσια του φορτίου του ηλεκτρονίου. Επίσης η ισότητα της (απόλυτης) τιμής του φορτίου του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου έχει ελεγχθεί με ακρίβεια $1/10^{20}$. Γιατί; Η κβάντωση του φορτίου παραμένει μια βαθιά ριζωμένη συμμετρία της φύσης χωρίς να μπορούμε να την εξηγήσουμε (βλ. όμως και μεγαλοενοποιημένες θεωρίες στη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων).

Στον κλασικό ΗΛΜ, θα ξεχάσουμε την κβάντωση του φορτίου και θα έχουμε φορτία q με οποιαδήποτε τιμή. Επίσης, θα θεωρούμε πολλές φορές σημειακά φορτία q , παρ' όλο που γνωρίζουμε ότι, για παράδειγμα, το πρωτόνιο έχει ακτίνα 10^{-13} cm. Βέβαια, στον κλασικό ΗΛΜ, το σημειακό φορτίο δεν είναι και κάτι "άπιαστο". Γι' αυτό και θα μπορούμε να μιλάμε για συνεχείς κατανομές φορτίου (αντίστοιχα με τις συνεχείς κατανομές μάζας παρ' όλο που γνωρίζουμε για την ατομική θεωρία!!)

Νόμος του Coulomb

Ο νόμος αυτός μας δίνει τη δύναμη ανάμεσα σε δύο σημειακά φορτία q_1 και q_2 που βρίσκονται σε απόσταση r_{12}



$$\mathbf{F}_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \widehat{\mathbf{r}}_{12}$$

όπου \mathbf{F}_2 είναι η δύναμη που ασκείται στο q_2 από το q_1 και $\widehat{\mathbf{r}}_{12}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα από το q_1 στο q_2 . Ο τύπος εμπεριέχει και τον κανόνα: όμοια φορτία απωθούνται και ετερόνυμα έλκονται, αν τα φορτία μας q_2 και q_1 περιέχουν και το πρόσημο. Άμεσα φαίνεται ότι, μιας και $\widehat{\mathbf{r}}_{12} = -\widehat{\mathbf{r}}_{21}$,

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$$

Φαίνεται επίσης ότι η δύναμη είναι στη διεύθυνση του r_{12} . Βέβαια, δεν θα μπορούσε να είναι κι αλλιώς, μιας και όλες οι άλλες διευθύνσεις είναι ισοδύναμες. Μια άλλη παρατήρηση είναι ότι τα φορτία θεωρούνται στοιχειώδη ή, καλύτερα, με μέγεθος πολύ μικρότερο της r_{12} . Τέλος, μιλάμε για ακίνητα φορτία. Για την σταθερά k : Στο σύστημα μονάδων MKSA έχουμε το A Ampère ως θεμελιώδες μέγεθος στον ΗΛΜ. Έτσι, για να πάρουμε N Newton στη δύναμη, έχουμε

$$k = 8,9875 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$$

Για λόγους που θα φανούν αργότερα, γράφουμε

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

με $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1}\text{m}^{-2}\text{C}^2$ (οι αριθμητικές τιμές βγαίνουν από τη σχέση του ϵ_0 με την ταχύτητα του φωτός).

Ποιο είναι το φυσικό περιεχόμενο του νόμου του Coulomb; Είναι ότι η μεταξύ δύο σημειακών φορτίων δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης των φορτίων και ότι η δύναμη αυτή υπακούει στην αρχή της επαλληλίας.

Να δούμε το δεύτερο στοιχείο. Αν είχαμε μόνο δύο φορτία στην διάθεσή μας, δεν θα μπορούσαμε από την μεταξύ τους δύναμη να βρούμε την τιμή του κάθε φορτίου. Χρειαζόμαστε τουλάχιστον και ένα τρίτο φορτίο. Τι μπορούμε να κάνουμε με τρία φορτία.

- (i) Απομακρύνουμε το q_3 και μετράμε τη δύναμη ανάμεσα στα q_1 και q_2
- (ii) Απομακρύνουμε το q_2 , φέρνουμε το q_3 στη θέση που ήταν το q_2 , και μετράμε τη δύναμη ανάμεσα στα q_1 και q_3
- (iii) Φέρνουμε τα q_2 και q_3 πολύ κοντά μεταξύ τους και σε απόσταση από το q_1 όπως και πριν.

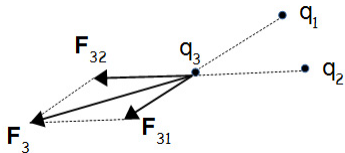
Τότε η μέτρηση θα δείξει ότι η δύναμη στο q_1 είναι το (αλγεβρικό) άθροισμα των δυνάμεων στα δύο πρώτα βήματα.

Αυτό δεν προβλέπεται από καμιά συμμετρία. Η δύναμη με την οποία αλληλεπιδρούν δύο φορτία δεν επηρεάζεται από την παρουσία τρίτου φορτίου. Αυτή είναι η αρχή της επαλληλίας.

Ο νόμος του Coulomb και η αρχή της επαλληλίας είναι όλη κι όλη η ηλεκτροστατική.

Όλα αυτά περί επαλληλίας συνοψίζονται στα παρακάτω για τη δύναμη σε φορτίο q_3 από δύο άλλα φορτία q_1 και q_2

$$\mathbf{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \widehat{\mathbf{r}}_{13} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \widehat{\mathbf{r}}_{23} \right)$$

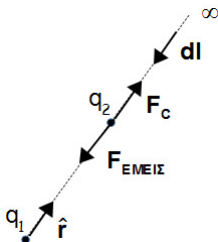


Όσον αφορά το άλλο φυσικό χαρακτηριστικό, πολλά πειράματα έχουν ελέγξει την εξάρτηση από το $1/r^2$ με ακρίβεια $1/10^9$. Ο κυριότερος πειραματικός έλεγχος είναι η ανυπαρξία φορτίου στην εσωτερική πλευρά μια κοίλης σφαιρικής μεταλλικής επιφάνειας. Βέβαια, το ερώτημα είναι σε πόσο μικρές και πόσο μεγάλες αποστάσεις παραμένει αυτή η εξάρτηση. Πάντως, για τις πολύ μεγάλες αποστάσεις, όπου δεν έχουμε πειραματική απόδειξη, αν ο νόμος του Coulomb καταρρέει, το φωτόνιο θα είχε μάζα, πράγμα που αντίκειται στην πολύ επιτυχημένη κβαντική ηλεκτροδυναμική.

Ενέργεια συστήματος φορτίων.

Όπως αναφέρθηκε, ο νόμος του Coulomb είναι αρκετός για όλην την ηλεκτροστατική. Μας αρκεί, για παράδειγμα, να βρούμε τις θέσεις ισορροπίας συστήματος φορτίων. Άλλες έννοιες όμως είναι χρήσιμες για την εμβάθυνση της γνώσης. Μια τέτοια έννοια είναι η ενέργεια. Και είναι χρήσιμη έννοια, γιατί οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις είναι διατηρητικές (θα το αποδείξουμε αργότερα).

Ξεκινάμε με δυο φορτία, q_1 και q_2 , αρχικά πολύ απομακρυσμένα και έχοντας το q_1 σταθερό πλησιάζουμε σιγα-σιγά το q_2 , πάνω στην ευθεία που ενώνει τα δυο φορτία. Τι έργο χρειάζεται για να φέρουμε το q_2 σε απόσταση r_{12} από το q_1 ;



$$dW = \mathbf{F}_{\text{ΕΜΕΙΣ}} \cdot d\mathbf{l}$$

Αλλά,

$$\mathbf{F}_{\text{ΕΜΕΙΣ}} = -\mathbf{F}_C = -k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

και παίρνουμε

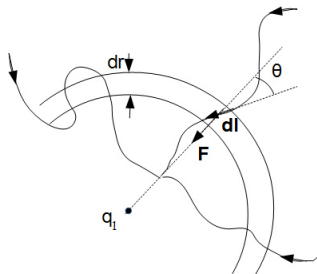
$$dW = \mathbf{F}_{\text{ΕΜΕΙΣ}} \cdot d\mathbf{l} = -\mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{l} = +F_C dl = -F_C dr$$

Να καταλάβουμε την τελευταία ισότητα. Με το l μετράμε την απόσταση που διανύει το κινούμενο q_2 . Με r την απόσταση του q_2 από το q_1 , που ασκεί τη δύναμη στο q_2 . Και βέβαια $r + l = \text{σταθερό}$, άρα $dl = -dr$ (όσο αυξάνεται το l μειώνεται το r).

Άρα έχουμε

$$W = \int_{\infty}^{r_{12}} -F_C dr = -kq_1q_2 \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{dr}{r^2} = k \frac{q_1q_2}{r_{12}}$$

Αν $q_1q_2 > 0$ (όπως στο σχήμα), τότε έχουμε θετικό έργο.
Ας δείξουμε τώρα ότι η δύναμη Coulomb είναι διατηρητική.



$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = F(\cos \theta dl) = F dr$$

κοινό για όλους τους δρόμους.

Ας γυρίσουμε στο έργο που καταβάλαμε για να φέρουμε το φορτίο q_2 , από το άπειρο σε απόσταση r_{12} από το q_1 . Ας φέρουμε τώρα ένα τρίτο φορτίο q_3 από το άπειρο ως τη θέση P_3 που απέχει r_{13} από το q_1 και r_{23} από το q_2 . Ποιο είναι το απαιτούμενο έργο;

$$W_3 = - \int_{\infty}^{P_3} \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{r}$$

και λόγω επαλληλίας

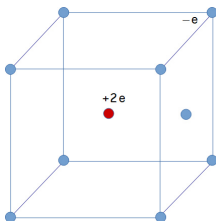
$$\begin{aligned} W_3 &= - \int_{\infty}^{P_3} (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^{P_3} \mathbf{F}_{31} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\infty}^{P_3} \mathbf{F}_{32} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) \end{aligned}$$

και αθροίζοντας και το έργο να φέρουμε το q_2 θα πάρουμε

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \right)$$

Βλέπουμε τη συμμετρία ανάμεσα στα τρία φορτία. Δεν παίζει ρόλο με ποια σειρά φαίρουμε τα φορτία στην τελική τους θέση. Άρα, το U είναι συνυψασμένο με την συγκεκριμένη κατανομή των φορτίων και ονομάζεται ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος. Βέβαια, ως συνήθως έχουμε μια αυθαιρεσία στην δυναμική ενέργεια. Εδώ έχουμε πάρει το μηδέν της δυναμικής ενέργεια στο άπειρο.

Ας βρούμε την δυναμική ενέργεια για ένα πιο σύνθετο σύστημα: 8 φορτία $-e$ στις κορυφές κύβου ακμής b , και 1 θετικό φορτίο $2e$ στο κέντρο του κύβου.



$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \\
 &= \left(8 \frac{(-e)(2e)}{(\sqrt{3}/2)b} + 12 \frac{(-e)(-e)}{b} + 12 \frac{(-e)(-e)}{\sqrt{2}b} + 4 \frac{(-e)(-e)}{\sqrt{3}b} + \right) = \\
 &= \frac{4,32 e^2}{4\pi\epsilon_0 b}
 \end{aligned}$$

Αν αφήσουμε τα 9 φορτία να απομακρυνθούν πολύ μεταξύ τους (οπότε η δυναμική ενέργεια του συστήματος θα είναι αμελητέα), η κινητική ενέργεια του όλου συστήματος θα είναι ίση με την U . Ας γενικεύσουμε τον τύπο για N φορτία

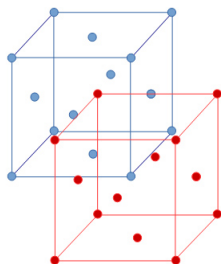
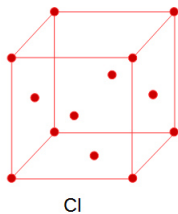
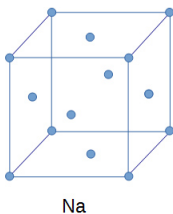
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \right]$$

όπου r_{ij} η απόσταση ανάμεσα στα φορτία q_i και q_j . Ο όρος $(1/2)$ μπαίνει γιατί στο διπλό άθροισμα παίρνουμε τον όρο $q_i q_j / r_{ij}$ καθώς και τον $q_j q_i / r_{ji}$ που είναι ίδιοι.

Ηλεκτρική ενέργεια κρυσταλλικού πλέγματος.

Στη δομή των (ιοντικών) κρυστάλλων, μπορούμε να θεωρήσουμε τα ιόντα ως σημειακά φορτία. Παραδεχόμαστε επίσης ότι η (ηλεκτρική δυναμική ενέργεια/όγκο) είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος του κρυστάλλου. Για τον κρύσταλλο του NaCl, αν έχουμε N ιόντα η δυναμική ενέργεια γράφεται

$$U = \frac{1}{2} N \sum_{k=2}^N \frac{q_1 q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{1k}}$$



Μπορούμε να πάρουμε ένα ιόν ως “κεντρικό”, και να αρχίσουμε να αθροίζουμε συνεισφορές από τα γειτονικά ιόντα, να πολλαπλασιάσουμε επί N και να διαιρέσουμε δια 2. Οι πρώτοι όροι είναι

$$U = \frac{N}{8\pi\epsilon_0} \left[-\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}a} + \dots \right]$$

με a η πλευρά του κύβου. Με διάφορα μαθηματικά τεχνάσματα μπορούμε να αθροίσουμε τη σειρά αυτή που δίνει

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Ne^2 \frac{-0,8738}{a}$$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει τη σταθερότητα του κρυστάλλου. Για να μειωθεί η δυναμική ενέργεια θα πρέπει το a να μειωθεί. Βέβαια, η κβαντομηχανική “εμποδίζει” το μηδενισμό του a .

Το ηλεκτρικό πεδίο.

Κατανομή φορτίων q_i , $i = 1, \dots, N$ και ένα φορτίο q_0 . Η δύναμη στο q_0 είναι

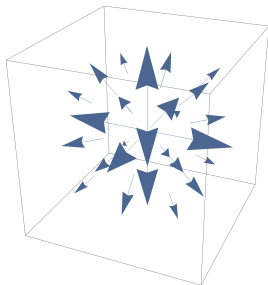
$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=1}^N \frac{q_0 q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{0j}^2} \widehat{\mathbf{r}}_{0j}$$

όπου r_{0j} η απόσταση μεταξύ του q_0 και του q_j και $\widehat{\mathbf{r}}_{0j}$ το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα. Ονομάζουμε ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} τον λόγο

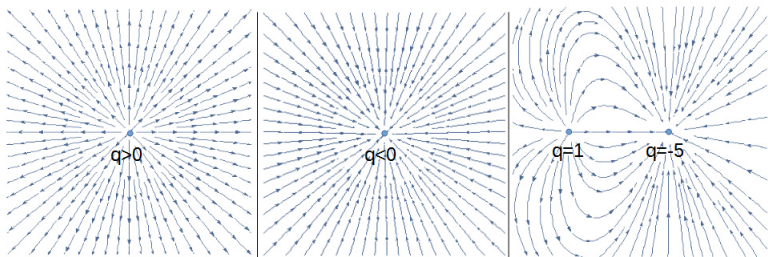
$$\mathbf{E} = \frac{1}{q_0} \mathbf{F}_0 = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{0j}^2} \widehat{\mathbf{r}}_{0j}$$

που εξαρτάται από τα φορτία q_j και τις θέσεις τους και βέβαια από το σημείο που ήταν το q_0 . Τα q_j είναι οι πηγές του πεδίου. Η έννοια του πεδίου είναι πολύ χρήσιμη. Αν γνωρίζουμε το \mathbf{E} σε κάθε σημείο του χώρου, βρίσκουμε εύκολα τη δύναμη σε κάποιο νέο φορτίο που φέρνουμε στην περιοχή που επικρατεί το πεδίο.

Για να παραστήσουμε ένα πεδίο θα πρέπει να σχεδιάσουμε ένα διάνυσμα σε κάθε σημείο του χώρου. Μπορούμε να σχεδιάσουμε το \mathbf{E} σε ορισμένα σημεία.



Πολύ χρήσιμη είναι η εικονογράφηση των δυναμικών γραμμών, που είναι καμπύλες όπου σε κάθε σημείο τους το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} είναι εφαπτομενικό. Σ' αυτή την σχεδίαση, το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι μεγαλύτερο όπου οι δυναμικές γραμμές είναι πυκνότερες.



Κατανομές φορτίου.

Όπως από τις σημειακές μάζες περνάμε στις συνεχείς κατανομές μάζας (στα σώματα) με πυκνότητα (μάζας) dm/dv , έτσι και από τα σημειακά φορτία περνάμε στις συνεχείς κατανομές φορτίου με πυκνότητα φορτίου $\rho = dq/dv$. Έχοντας λοιπόν μια τέτοια κατανομή $\rho(x, y, z)$, το στοιχειώδες φορτίο dq που περιέχεται στον στοιχειώδη όγκο dv θα είναι

$$dq = \rho(x, y, z) dv = \rho(x, y, z) dx dy dz$$