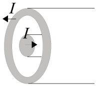
ΑΣΚΗΣΗ 17

Το ομοαξονικό καλώδιο αποτελείται από έναν εσωτερικό κυλινδρικό αγωγό ακτίνας βάσης R_1 και από ένα αγώγιμο κυλινδρικό φλοιό που τον περιβάλλει(ομοαξονικό με το εσωτερικό αγωγό) με ακτίνες R_2 και R_3. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο στο χώρο για ομοαξονικό καλώδιο απείρου μήκους που διαρρέεται από ρεύμα I, κατά την διεύθυνση του άξονα, και είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην διατομή του καλωδίου. Το ρεύμα πηγαίνει προς την μια κατεύθυνση στον εσωτερικό αγωγό και επιστρέφει προς την άλλη κατεύθυνση από τον εξωτερικό αγωγό.



Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας περιμένουμε οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου να είναι κύκλοι με επίπεδο κάθετο στον άξονα του καλωδίου και κέντρο πάνω στον άξονα. Και φυσικά το μέτρο του πεδίου θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση από τον άξονα.

Θα εφαρμόσουμε τον νόμου του Ampère διακρίνοντας τις περιοχές $0 < r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ και $R_2 < r < R_3$ και $r > R_3$. Κάθε φορά επιλέγουμε ως κλειστή καμπύλη μία δυναμική γραμμή, που όπως είπαμε είναι κύκλος, ακτίνας r. Ο νόμος του Ampère λέει

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \mu_0 I_C$$

όπου I_C είναι το ρεύμα που περνά μέσα από την κλειστή καμπύλη C. Στην περίπτωσή μας, το C είναι κύκλος ακτίνας r και το μαγνητικό πεδίο είναι εφαπτομενικό στον κύκλο αυτό. Επομένως θα έχουμε

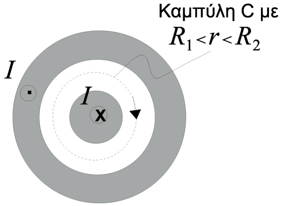
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \pm 2\pi r B$$

μιας και τα **ds** και **B** είναι συγγραμμικά και το μέτρο του B είναι σταθερό. Το πρόσημο καθορίζεται από την φορά που διανύουμε την καμπύλη C σε σχέση με τη διεύθυνση του ρεύματος. Σε κάθε περιοχή επιλέγουμε κύκλο με ακτίνα στην συγκεκριμένη περιοχή.

Στην περιοχή $0 < r < R_1$ το ρεύμα που περνά από την κλειστή καμπύλη C είναι

$$I \, \frac{\pi r^2}{\pi R_1^2}$$

με θετικό πρόσημο στην επιλογή που κάναμε στο σχήμα.



Στην περιοχή $R_1 < r < R_2$ το ρεύμα που περνά από την κλειστή καμπύλη C είναι το συνολικό I

Στην περιοχή $R_2 < r < R_3$ το ρεύμα που περνά από την κλειστή καμπύλη C είναι

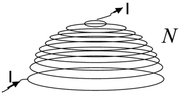
$$I - I \, \frac{\pi(r^2 - R_2^2)}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}$$

Ο δεύτερος όρος δείχνει το ποσοστό του ρεύματος που επιστρέφει από τον εξωτερικό αγωγό.
Τέλος, Στην περιοχή $r > R_3$ το ρεύμα που περνά από την κλειστή καμπύλη C είναι $I - I = 0$.
Επομένως, το μαγνητικό πεδίο θα είναι

$$
\begin{aligned}
&0 < r < R_1, \quad B = \mu_0 \frac{I}{\pi R_1^2} r \\
&R_1 < r < R_2 \quad B = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \frac{1}{r} \\
&R_2 < r < R_3, \quad B = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \frac{r^2 - R_2^2}{r_3^2 - R_2^2} \frac{1}{r} \\
&r > R_3, \quad B = 0
\end{aligned}
$$

ΑΣΚΗΣΗ 18

Λεπτό σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα I είναι τυλιγμένο σε N σπείρες κατά τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζει ημισφαίριο ακτίνας R. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο O του ημισφαιρίου.

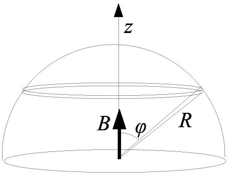


Το μαγνητικό πεδίο δακτυλίου ρεύματος ακτίνας R στο άξονά του και σε απόσταση z από το επίπεδο του δακτυλίου δίνεται από τη σχέση

$$B = B_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

όπου I το ρεύμα που διαρρέει τον δακτύλιο και λόγω συμμετρίας το μαγνητικό πεδίο είναι μόνο στον άξονα των z.

Οπότε, αν επιλέξουμε τις σπείρες ανάμεσα στη γωνία ϕ και $\phi + d\phi$, ο δακτύλιος θα έχει ακτίνα $R \sin\theta$ και η απόστασή του από το κέντρο του ημισφαιρίου θα είναι $R\cos\theta$.



Επίσης, οι συνολικές σπείρες N αντιστοιχούν στην γωνία $\pi/2$. Επομένως, στο $d\phi$ αντιστοιχούν $(2N)/\pi \cdot d\phi$ σπείρες. Και το το μαγνητικό πεδίο θα είναι

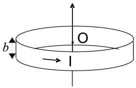
$$dB_z = \frac{\mu_0}{2}\,\frac{I(R\sin\phi)^2}{\left((R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2\right)^{3/2}}\,\frac{2N}{\pi}\,d\phi = \frac{\mu_0}{2}\,\frac{2IR^2N}{\pi R^3}\,\sin^2\phi\,d\phi$$

Το συνολικό μαγνητικό πεδίο θα δίνεται από το ολοκλήρωμα

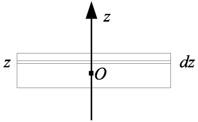
$$B = B_z = \frac{\mu_0}{2}\,\frac{2IR^2N}{\pi R^3}\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,d\phi = \mu_0\,\frac{IN}{\pi R}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\mu_0}{4}\,\frac{IN}{R}$$

ΑΣΚΗΣΗ 19

Αγώγιμη λουρίδα πάχους b σχηματίζει κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας R με άξονα τον άξονα των z. Αν η λουρίδα διαρρέεται από ρεύμα I ομοιόμορφα κατανεμημένο στο πλάτος της, βρείτε το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο O.



Χωρίζουμε το πλάτος της λουρίδας σε απειροστές λουρίδες πάχους dz. Εφ' όσον το ρεύμα είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα σε όλο το πλάτος της λουρίδας, σε πάχος dz αντιστοιχεί ρεύμα $dI = I\, dz/b$.



Το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται σε μια τέτοια απειροστή λουρίδα που βρίσκεται σε επίπεδο που απέχει z από το κέντρο O, θα δίνεται από τη σχέση

$$dB = \frac{\mu_0}{2}\,\frac{R^2 dI}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

και θα είναι παράλληλο με τον άξονα των z. Όλες οι απειροστές λουρίδες δίνουν μαγνητικό πεδίο στον άξονα των z, οπότε το συνολικό μαγνητικό πεδίο θα είναι

$$B = \int_{-b/2}^{b/2} dB = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\mu_0}{2}\,\frac{IR^2 dz}{b(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2}\,\frac{IR^2}{b}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dz}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

Θέτουμε $\tan\phi = z/R$, οπότε $dz = Rd\phi/\cos^2\phi$ και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{dz}{(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{1}{R^3}\int \frac{Rd\phi}{\cos^2\phi}\,\frac{1}{(1+\tan^2\phi)^{3/2}} =$$
$$= \frac{1}{R^2}\int \cos\phi\, d\phi = \frac{1}{R^2}\sin\phi = \frac{1}{R^2}\,\frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\tan\phi = \frac{z}{R} \to \cos\phi^{-2} = 1+\tan^2\phi, \quad \sin^{-2}\phi = 1+\cot^2\phi = \frac{z^2+R^2}{z^2}$$

Το μαγνητικό πεδίο γίνεται

$$B = \frac{\mu_0}{2}\,\frac{IR^2}{b}\,\frac{1}{R^2}\,\frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}\Bigg|_{-b/2}^{b/2} = \frac{\mu_0 I}{(b^2+4R^2)^{1/2}}$$

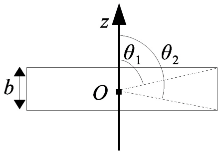
2ος τρόπος

Μπορούμε να θεωρήσουμε την λουρίδα μας ως σωληνοειδές. Το μαγνητικό πεδίο στο άξονα του σωληνοειδούς δίνεται από τη σχέση

$$B = \frac{\mu_0}{2}\,n^* I\,(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

όπου I το ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό που σχηματίζει το σωληνοειδές, n^* οι σπείρες ανά μήκος και οι δύο γωνίες φαίνονται στο σχήμα. Στην περίπτωσή μας, επειδή ζητάμε το πεδίο στο κέντρο O, για τις δύο γωνίες θα ισχύει

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi \to \cos\theta_1 = -\cos\theta_2$$



Πρέπει να βρούμε την αντιστοιχεία του όρου $n^* I$ στη σχέση του σωληνοειδούς με την περίπτωσή μας.

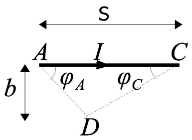
$$n^* I = \frac{\text{αρ. σπειρών}}{\text{μήκος}} I = \frac{(\text{αρ. σπειρών}) I}{\text{μήκος}} = \frac{\text{συνολικό ρεύμα}}{\text{μήκος}}$$

Στην περίπτωσή μας το συνολικό ρεύμα είναι I και το μήκος είναι b. Άρα

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{b} 2 \cos \theta_1 = \mu_0 I \frac{1}{b} \frac{b/2}{\sqrt{R^2 + b^2/4}} = \mu_0 I \frac{1}{\sqrt{4R^2 + b^2}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 20

Βρείτε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ευθύγραμμο σύρμα μήκους S που διαρρέεται από ρεύμα I, στο σημείο D που απέχει από το σύρμα απόσταση b και σχηματίζει γωνίες ϕ_A και ϕ_C με τα άκρα A και C του σύρματος.



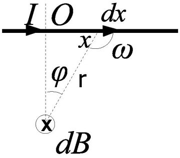
Από το νόμο των Biot-Savart γνωρίζουμε ότι τμήμα dx του σύρματος σε απόσταση x από το O, θα δημιουργήσει στο σημείο D μαγνητικό πεδίο

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} dx \sin \omega$$

Επιλέγοντας

$$\frac{b}{x} = \tan(\pi - \omega) = -\tan \omega$$

έχουμε



$$dx = \frac{b}{\tan^2\omega}\,\frac{d\omega}{\cos^2\omega} = \frac{b}{\sin^2\omega}\,d\omega,\;\; \sin\omega = \sin(\pi-\omega) = \frac{b}{r} \Rightarrow r^2 = \frac{b^2}{\sin^2\omega}$$

παίρνουμε

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\sin^2\omega}{b^2}\,\frac{b}{\sin^2\omega}\,d\omega\,\sin\omega = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{1}{b}\,\sin\omega\,d\omega$$

Η διεύθυνση του dB είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν το σύρμα και το σημείο D (το επίπεδο της σελίδας). Κάθε dx δίνει dB ίδιας διεύθυνσης. Οπότε

$$B = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{1}{b}\,\sin\omega\,d\omega = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{1}{b}\,(-\cos\omega)$$

Ποια είναι τα όρια του ω;

Θεωρώντας θετικά x δεξιά από το O, το x στο αριστερό άκρο A αντιστοιχεί στην $\omega = \phi_A$. Στο δεξί άκρο C, θα έχουμε $\omega = \pi - \phi_C$. Όποτε, η ολοκλήρωηση του x από το x_A στο x_C αντιστοιχεί στην ολοκλήρωση του ω από ϕ_A έως $\pi - \phi_C$. Και το μαγνητικό πεδίο γίνεται

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{b} \left(-\cos(\pi - \phi_C) + \cos\phi_A\right) = B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{b} \left(\cos\phi_C + \cos\phi_A\right)$$

Για $\phi_A = \phi_C = 0$, παίρνουμε τη σχέση για αγωγό απείρου μήκους: $B = \mu_0 I/(2\pi b)$.

ΑΣΚΗΣΗ 21

Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί σημειακό φορτίο q που κινείται με σταθερή (μη σχετικιστική) ταχύτητα $\mathbf{v}$

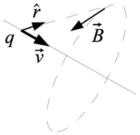
Ο νόμος των Biot-Savart μας δίνει το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από στοιχειώδες τμήμα ds που διαρρέεται από ρεύμα I σε απόσταση r από το στοιχειώδες τμήμα.

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathbf{ds} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Ο όρος $I\mathbf{ds}$ γράφεται επίσης $I\mathbf{ds} = \left(\frac{dq}{dt}\right)\mathbf{ds} = dq\left(\frac{\mathbf{ds}}{dt}\right) = dq\,\mathbf{v}$

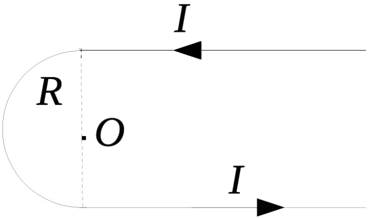
Επομένως, στην περίπτωση που έχουμε ένα σημειακό φορτίο, αυτό αντιστοιχεί στο dq και η σχέση για το μαγνητικό πεδίο γράφεται

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

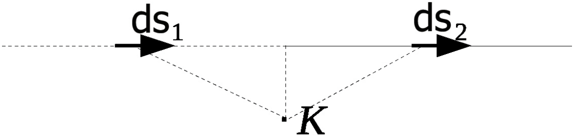


ΑΣΚΗΣΗ 22

Το αγώγιμο σύρμα του σχήματος έχει άπειρο μήκος, διαρρέεται από ρεύμα I, και κάμπτεται διαγράφοντας ημικύκλιο ακτίνας R, έχοντας τους δύο κλάδους του παράλληλους μεταξύ τους, και κάθετους στη διάμετρο του ημικυκλίου. Να υπολογίσετε το μαγνητικό πεδίο **B** στο κέντρο του ημικυκλίου, κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά.



Στο σημείο O το μαγνητικό πεδίο θα είναι επαλληλία των αντίστοιχων πεδίων που προκαλούν τα δύο ημιάπειρα τμήματα του αγωγού και το ημικυκλικό τμήμα του.



Το ημιάπειρο τμήμα προκαλεί το μισό μαγνητικό πεδίο από αυτό του αγωγού απείρου μήκους. Διότι τα δύο συμμετρικά τμήματα ds_1 και ds_2 συνεισφέρουν το ίδιο στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο στο σημείο K. Και τα δύο ημιάπειρα τμήματα συνεισφέρουν το ίδιο μαγνητικό πεδίο. Το ημικυκλικό τμήμα συνεισφέρει (με την ίδια λογική) το μισό μαγνητικό πεδίο από τον αντίστοιχο πλήρη κύκλο. Το μαγνητικό πεδίο και των τριών τμημάτων έχει ίδια διεύθυνση και φορά: κάθετη στο επίπεδο του σύρματος και με φορά προς τα έξω. Οπότε

$$B_0 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 23

Στο επίπεδο xz έχουμε τρία παράλληλα απείρου μήκους ευθύγραμμα σύρματα, στην διεύθυνση του άξονα z, και βρίσκονται στις θέσεις $x = 0$, $x = -d$ και $x = d$. Και τα τρία διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα ίδιας τιμής I. α) Βρείτε τα σημεία του επιπέδου xz που έχουν μηδενικό μαγνητικό πεδίο. β) Αν αντιστρέψουμε το ρεύμα στο μεσαίο σύρμα και το μετακινήσουμε κατά x, με $x << d$, κρατώντας το παράλληλο με τον εαυτό του, τι κίνηση περιμένουμε να εκτελέσει;

α) Το μαγνητικό πεδίο έχει την διεύθυνση του y. Ο μηδενισμός του μαγνητικού πεδίου θα είναι σε ευθεία με σταθερό x. Το σημείο x που γυρεύουμε θα είναι ανάμεσα στο μεσαίο σύρμα και κάποιο από τα ακριανά, $|x| < d$. Το πεδίο για το συγκεκριμένο x θα είναι

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x+d} + \frac{1}{x} - \frac{1}{d-x}\right)$$

Απαιτώντας αυτό να είναι μηδέν παίρνουμε

$$\frac{1}{x+d}+\frac{1}{x}=\frac{1}{d-x}\Rightarrow x=\pm\frac{d}{\sqrt{3}}$$

β) Η δύναμη ανά μονάδα μήκους (F/s) που δέχεται ευθύγραμμο, μεγάλλου μήκους, σύρμα που διαρρέται από ρεύμα I_1 από άλλο παράλληλο σύρμα σε απόσταση r που διαρρέεται από ρεύμα I_2 είναι

$$\frac{F}{s}=I_1\,\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$$

Αν τα ρεύματα είναι ομόρροπα η δύναμη είναι ελκτική ενώ αν είναι αντίρροπα είναι απωστική. Οπότε, στην περίπτωσή μας, αν μετακινήσουμε το μεσαίο σύρμα κατά δx, η δύναμη που θα δεχθεί από τα άλλα δύο σύρματα θα είναι

$$\frac{\mathbf{F}}{s}=\frac{\mu_0 I^2\hat{\mathbf{x}}}{2\pi(d+\delta x)}+\frac{\mu_0 I^2(-\hat{\mathbf{x}})}{2\pi(d-\delta x)}=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\left(\frac{-2\delta x\hat{\mathbf{x}}}{d^2-\delta x^2}\right)\overset{\delta x<<d}{\Longrightarrow}-\frac{\mu_0 I^2}{\pi d^2}\delta x\hat{\mathbf{x}}$$

Δηλαδή η δύναμη είναι ανάλογη με την απομάκρυνση x και αντίθετης φοράς. Επομένως το μεσαίο σύρμα εκτελεί ταλάντωση.