ΠΑΡΑΤΗΜΑ Α΄
ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

Στην ηλεκτροστατική, γνωρίζουμε ότι ο στροβιλισμός του ηλεκτρικού πεδίου μηδενίζεται

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Αυτό μας επιτρέπει να γράψουμε το ηλεκτρικό πεδίο **E** ως βαθμίδα μιας βαθμωτής συνάρτησης: του δυναμικού V

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Μ' αυτόν τον τρόπο διασφαλίζουμε ότι ο στροβιλισμός του **E** μηδενίζεται, μιας και

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times [-\nabla V] = 0$$

πράγμα που ισχύει για κάθε βαθμωτή συνάρτηση. Για το μαγνητικό πεδίο **B**, γνωρίζουμε ότι ο στροβιλισμός του δεν μηδενίζεται, αλλά αντίθετα είναι ανάλογος με την πυκνότητα ρεύματος

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Γι' αυτό, δεν μπορούμε να παράγουμε το μαγνητικό πεδίο από ένα βαθμωτό δυναμικό.

Αντίθετα, η απόκλιση του μαγνητικού πεδίου είναι μηδενική (λόγω της έλλειψης μαγνητικών φορτίων)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$$

Οπότε, μπορούμε να παράγουμε το μαγνητικό πεδίο από τον στροβιλισμό ενός διανυσματικού πεδίου **A**

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

Τότε, διασφαλίζουμε τον μηδενισμό της απόκλισης του **B**

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}] = 0$$

πράγμα που ισχύει για κάθε διανυσματική συνάρτηση. Η διανυσματική συνάρτηση **A** καλείται διανυσματικό δυναμικό. Ας δούμε τώρα την μορφή που έχει το **A**

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}}\,(\partial_y A_z - \partial_z A_y) - \hat{\mathbf{j}}\,(\partial_x A_z - \partial_z A_x) + \\ + \hat{\mathbf{k}}\,(\partial_x A_y - \partial_y A_x)$$

δηλαδή

$$B_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y, \quad B_y = -\partial_x A_z + \partial_z A_x, \quad B_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x$$

Από την $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ ας πάρουμε μόνο την x-συνιστώσα

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})_x &= \mu_0 J_x \\
\partial_y B_z - \partial_z B_y &= \mu_0 J_x \\
\partial_y \left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right) - \partial_z \left(-\partial_x A_z + \partial_z A_x\right) &= \mu_0 J_x \\
-\partial_y \partial_y A_x - \partial_z \partial_z A_x - \partial_x \partial_x A_x + \partial_y \partial_x A_y + \partial_z \partial_x A_z + \partial_x \partial_x A_x &= \mu_0 J_x \\
-\nabla^2 A_x + \partial_x \left(\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z\right) &= \mu_0 J_x \\
-\nabla^2 A_x + \partial_x \left(\nabla \cdot \mathbf{A}\right) &= \mu_0 J_x
\end{aligned}
$$

όπου στην τέταρτη σειρά προσθέσαμε και αφαιρέσαμε τον όρο $\partial_x \partial_x A_x$.
Τώρα, η βασική σχέση ορισμού του $\mathbf{A}$, δηλαδή η $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$, εισάγει μια αυθαιρεσία στο $\mathbf{A}$ (θυμηθείτε την αυθαιρεσία ορισμού του βαθμωτού δυναμικού στη $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$). Αυτό μας επιτρέπει να μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο $\mathbf{A}$ το οποίο να έχει μηδενική απόκλιση $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$ (δες παρακάτω την απόδειξη). Οπότε, η τελευταία σχέση ξαναγράφεται

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

Όμοια θα έχουμε και για τις άλλες συνιστώσες

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y, \qquad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

οπότε, γράφουμε συμβολικά

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Προσέξτε, αυτή η σχέση περιγράφει τις τρεις προηγούμενες. Η λαπλασιανή, ∇^2, δρα σε βαθμωτή συνάρτηση. Εδώ, εννοούμε ότι δρα ξεχωριστά στις τρεις συνιστώσες του **A**.
Από τον στατικό ηλεκτρισμό θυμόμαστε

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε τη σχέση που μας δίνει το **A**

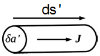
$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ είναι η απόσταση μεταξύ του σημείου που βρίσκεται το dv' και του σημείου όπου υπολογίζουμε το $\mathbf{A}$ (αποδεικνύεται ότι αυτό το $\mathbf{A}$ έχει μηδενική απόκλιση, όπως έχουμε θεωρήσει). Στην περίπτωση που η πυκνότητα ρεύματος περιορίζεται μόνο στην περιοχή ενός λεπτού αγωγού με ρεύμα I, εύκολα φαίνεται ότι

$$Jdv' = \frac{I}{\delta a'}\, \delta a' ds' = I\, ds'$$

ή διανυσματικά

$$\mathbf{J}dv' = I\, d\mathbf{s}'$$



Επομένως, το διανυσματικό δυναμικό γράφεται

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{I d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_V \frac{d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

μιας και το ρεύμα είναι σταθερό. Γενικά, το ολοκλήρωμα αυτό είναι δύσκολο, και δυσκολεύει τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου από τον στροβιλισμό του $\mathbf{A}$.

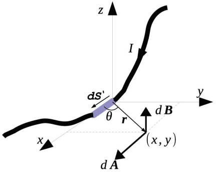
Αντ' αυτού, θα παραμείνουμε στο διαφορικό

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Απλοποιούμε την κατάσταση θεωρώντας ότι το $d\mathbf{s}' = ds'_x \,\hat{\mathbf{x}}$ στην αρχή των αξόνων, και ότι το σημείο που θέλουμε να βρούμε το $d\mathbf{A}$ είναι πάνω στο επίπεδο (xy). Επομένως, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Το στοιχειώδες $d\mathbf{B}$ δίνεται από την

$$d\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{ds'_x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{\mathbf{k}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} ds'_x \partial_y \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \hat{\mathbf{k}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} ds'_x \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \hat{\mathbf{k}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} ds'_x \frac{r \sin\theta}{r^3}$$



όπου τώρα r είναι η απόσταση του στοιχειώδους τμήματος $d\mathbf{s}'$ από το σημείο όπου υπολογίζεται το μαγνητικό πεδίο.
Βλέποντας την συμμετρία περιστρέφοντας γύρω από τον άξονα x, μπορούμε να γενικεύσουμε θεωρώντας το στοιχειώδες $d\mathbf{s}$ τυχαίο

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Αυτός είναι ο νόμος των Biot-Savart που δίνει το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο που οφείλεται σε στοιχειώδες τμήμα $d\mathbf{s}$ λεπτού ηλεκτροφόρου αγωγού με ρεύμα I σε απόσταση r από το στοιχειώδες αυτό τμήμα. Η φορά του $d\mathbf{s}$ καθορίζεται από την φορά του ρεύματος I και το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$ ορίζεται από το στοιχειώδες τμήμα του αγωγού προς το σημείο υπολογισμού το πεδίου. Βλέπουμε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από το στοιχειώδες τμήμα και το διάνυσμα $\mathbf{r}$.
Ας δούμε, τέλος, γιατί μπορούμε να επιλέξουμε πάντα κατάλληλο $\mathbf{A}$ έτσι ώστε $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι, με δεδομένο το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$, έχουμε υπολογίσει το διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A}$ για το οποίο βέβαια ισχύει

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

αλλά, γενικά η απόκλιση του διανυσματικού δυναμικού δεν είναι μηδενική

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = f(\mathbf{r}) \neq 0$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι βρίσκουμε ένα πεδίο, $\mathbf{A_0}$, για το οποίο ισχύει

$$\nabla \cdot \mathbf{A_0} = f(\mathbf{r}), \qquad \nabla \times \mathbf{A_0} = 0$$

Αν ορίσουμε ένα νέο διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A}'$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \mathbf{A_0}$$

τότε, γι΄ αυτό το νέο διανυσματικό δυναμικό, θα ισχύει

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times \mathbf{A_0} = \mathbf{B} \tag{9}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \cdot \mathbf{A_0} = f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = 0 \tag{10}$$

Δηλαδή, το νέο μας $\mathbf{A}'$ παράγει το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$ που έχουμε, και έχει μηδενική απόκλιση Αυτό που ζητούσαμε.
Οπότε, αρκεί να βρούμε το $\mathbf{A_0}$.
Το $\mathbf{A_0}$, όπως αναφέρουμε παραπάνω, θα πρέπει να υπακούει τις

$$\nabla \cdot \mathbf{A_0} = f(\mathbf{r}), \qquad \nabla \times \mathbf{A_0} = 0$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις μας θυμίζουν το ηλεκτροστατικό πεδίο για το οποίο ισχύει

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

όπου $\rho(\mathbf{r})$ είναι η πυκνότητα φορτίου. Αλλά γνωρίζουμε ότι για μια τέτοια πυκνότητα φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ στο σημείο που καθορίζεται από το $\mathbf{r}$, δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \left(\widehat{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}\right)$$

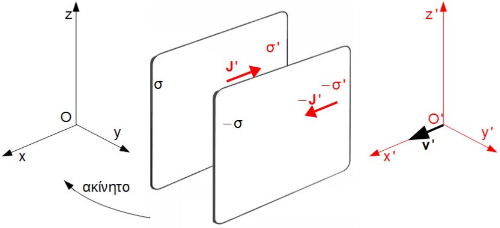
όπου η ολοκλήρωση του $\mathbf{r}'$ γίνεται στον χώρο V όπου υπάρχει η πυκνότητα φορτίου ρ.

Η ομοιότητα των σχέσεων που υπακούει το ηλεκτροστατικό πεδίο $\mathbf{E}$ και το $\mathbf{A_0}$ που γυρεύουμε, μας οδηγεί στο

$$\mathbf{A_0}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\epsilon_0 f(\mathbf{r}')dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \left(\widehat{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}\right)$$

Συμπερασματικά, έχοντας το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$ και το διανυσματικό δυναμικό που το παράγει ($\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$), για το οποίο η απόκλιση ΔΕΝ είναι μηδενική ($\nabla \cdot \mathbf{A} = f$), μπορούμε πάντοτε να ορίσουμε ένα νέο διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \mathbf{A_0}$, όπου το $\mathbf{A_0}$ δίνεται από την παραπάνω σχέση. Το νέο διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A}'$ παράγει το μαγνητικό πεδίο ($\nabla \times \mathbf{A}' = \mathbf{B}$) και η απόκλισή του είναι μηδενική ($\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$)

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΕΔΙΩΝ



Θεωρούμε δύο πολύ μεγάλα παράλληλα φύλλα στο επίπεδο (xz) με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα $\sigma(>0)$ και $-\sigma$. Ως προς το σύστημα $(Oxyz)$ τα φορτία είνα ακίνητα. Οπότε, ανάμεσα από τα φύλλα το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{y}} \Rightarrow E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

ενώ εκτός του συτήματος των παραλλήλων φύλλων το πεδίο είναι μηδενικό. Το σύστημα $(O'x'y'z')$ κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}' = v'\hat{\mathbf{x}}$. Παρατηρητής στο τονούμενο σύστημα βλέπει δύο παράλληλα φύλλα με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\pm\sigma'$ διαφορετική από τη σ.

Ο λόγος είναι γιατί το φορτίο είναι μια αναλλοίωτη ποσότητα αλλά το εμβαδόν έχει αλλάξει. Συγκεκριμένα, το εμβαδόν πάνω στα επίπεδα, όντας παράλληλα με το επίπεδο (xz), μικραίνει κατά τον παράγοντα $\sqrt{1-v'^2/c^2}$ λόγω της συστολής μήκους

$$\Delta x' = \Delta x\sqrt{1-v'^2/c^2}, \qquad \Delta y' = \Delta y, \qquad \Delta z' = \Delta z$$

Οπότε,

$$\sigma' = \frac{\Delta Q'}{\Delta z'\Delta x'} = \frac{\Delta Q}{\Delta z\Delta x\sqrt{1-v'^2/c^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}$$

και το ηλεκτρικό πεδίο στο τονούμενο σύστημα

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} = \frac{E_y}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}$$

Ο παρατηρήτης στο τονούμενο σύστημα παρατηρεί όμως πως τα φορτία κινούνται (ρεύμα), οπότε περιμένει και μαγνητικό πεδίο. Γνωρίζουμε ότι ανάμεσα σε δύο παράλληλα φύλλα όπου έχουμε παράλληλα ρεύματα αντίθετης φοράς έχουμε μαγνητικό πεδίο που είναι παράλληλο με τα φύλλα και κάθετο στη διεύθυνση του ρεύματος.

Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου είναι ίσο με
$\mu_0 \times$ επιφανειακή πυκνότητα $\times$ ταχύτητα φορέων, οπότε στην περίπτωσή μας θα έχουμε

$$B'_z = -\mu_0 \sigma' v' = -\mu_0 \frac{\sigma}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}\, v' = -\frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\sigma}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}\, v' =$$
$$= -E_y \frac{v'/c^2}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}$$

όπου κάναμε την αντικατάσταση $\mu_0 = (\epsilon_0 c^2)^{-1}$ και το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι το μαγνητικό πεδίο κατευθύνεται πρός την αρνητική πλευρά του άξονα z, μιας και τα ρεύματα είναι κατά την διεύθυνση του άξονα των x και με την φορά που δείχνει το σχήμα. Συνοψίζοντας, στο τονούμενο σύστημα θα έχουμε

$$E'_y = \frac{E_y}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \qquad B'_z = -E_y \frac{v'/c^2}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = -E'_y \frac{v'}{c^2}$$

Σ' ένα νέο σύστημα $(O''x''y''z'')$ που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}'' = v''\hat{\mathbf{x}}$, ως προς το $(Oxyz)$, θα έχουμε αντίστοιχα

$$E''_y = \frac{E_y}{\sqrt{1 - v''^2/c^2}}, \qquad B''_z = -E_y \frac{v''/c^2}{\sqrt{1 - v''^2/c^2}} = -E''_y \frac{v''}{c^2}$$

Ο γενικός μετασχηματισμός που ψάχνουμε είναι να εκφράσουμε τα δισ-τονούμενα μεγέθη ως συνάρτηση των τονούμενων και της ταχύτητας v_0 του $(O''x''y''z'')$ ως προς το $(O'x'y'z')$, που είναι

$$v_0 = \frac{v'' - v'}{1 - v'v''/c^2} \Rightarrow v'' = \frac{v_0 + v'}{1 + v_0 v'/c^2}$$

όπου όλες οι ταχύτητες είναι παράλληλες με τον άξονα x. Μια χρήσιμη σχέση είναι η ακόλουθη

$$\frac{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}{\sqrt{1 - v''^2/c^2}} = \frac{1 + v_0 v'/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

Από τις σχέσεις μετασχηματισμού που έχουμε βρει παίρνομαι για το ηλεκτρικό πεδίο

$$E''_y = E'_y \frac{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}{\sqrt{1 - v''^2/c^2}} = E'_y \frac{1 + v_0 v'/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \left(E'_y + E'_y \frac{v'}{c^2} v_0 \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \left(E'_y - v_0 B'_z \right)$$

και για το μαγνητικό πεδίο

$$B''_z = B'_z \frac{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}{\sqrt{1 - v''^2/c^2}} \frac{c^2}{v'} \frac{v''}{c^2} = B'_z \frac{1 + v_0 v'/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \frac{v''}{v'} =$$

$$= \frac{B'_z}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \left(\frac{1}{v'} + \frac{v_0}{c^2} \right) v'' = \frac{B'_z}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \frac{c^2 + v_0 v'}{c^2 v'} \frac{v_0 + v'}{1 + v_0 v'/c^2}$$

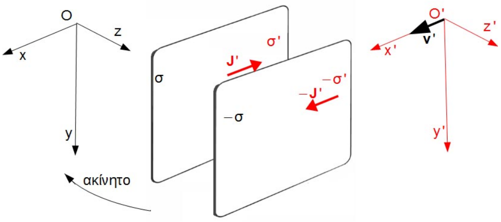
$$= \frac{B'_z}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \frac{v_0 + v'}{v'} = \frac{B'_z}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \left(1 + \frac{v_0}{v'} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \left(B'_z + B'_z \frac{v_0}{v'} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \left(B'_z - \frac{v_0}{c^2} E'_y \right)$$

Συνοψίζοντας λοιπόν έχουμε

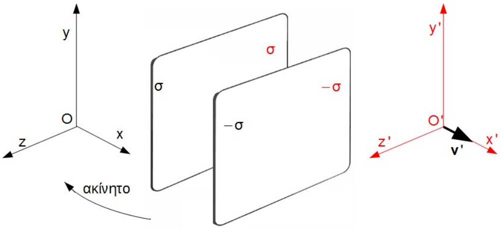
$$E''_y = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \left(E'_y - v_0 B'_z \right), \qquad B''_z = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \left(B'_z - \frac{v_0}{c^2} E'_y \right)$$

Αν οι πλάκες ήταν παράλληλες με το επίπεδο (xy), με τον ίδιο τρόπο θα πέρναμε



$$E''_z = \frac{E'_z + v_0 B'_y}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \qquad B''_y = \frac{B'_y + \dfrac{v_0}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

Προσέξτε εδώ την αλλαγή του προσήμου μιας και το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομόρροπο με το $+\hat{\mathbf{z}}$ και το μαγνητικό πεδίο ομόρροπο με το $+\hat{\mathbf{y}}$.
Ας δούμε τώρα πώς μετασχηματίζονται οι συνιστώσες που είναι παράλληλες με την σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων, στην περίπτωσή μας οι x συνιστώσες.



Σ' αυτήν την περίπτωση η επιφανειακή πυκνότητα σ δεν μεταβάλλεται: $\sigma' = \sigma$. Το μόνο που μεταβάλλεται είναι η απόσταση μεταξύ των παραλλήλων πλακών, η οποία όμως δεν επηρεάζει το ηλεκτρικό πεδίο. Επομένως

$$E'_x = E_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Για το μαγνητικό πεδίο θεωρήστε ένα σωληνοειδές απείρου μήκους με τον άξονά του παράλληλο με τον άξονα x. Στο σύστημα $(Oxyz)$ όπου παραμένει ακίνητο, έχει n^* περιελλίξεις ανά μήκος και διαρρέεται από ρεύμα I. Το μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο με τον άξονά του (δηλ. τον άξονα των x) και έχει μέτρο

$$B_x = \mu_0 \mathrm{I} n^*$$

Στο σύστημα $(O'x'y'z')$ που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}' = v'\hat{\mathbf{x}}$, έχουμε συστολή μήκους και διαστολή χρόνου. Οπότε τα

$$\mathrm{I} = \frac{dQ}{dt}, \quad n^* = \frac{\sharp\ \text{στροφών}}{\Delta x}$$

γίνονται

$$\left(\mathrm{I}' = \frac{dQ}{dt/\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \quad n^{*\prime} = \frac{\sharp\ \text{στροφών}}{\Delta x\sqrt{1 - v'^2/c^2}}\right) \Rightarrow n^*\mathrm{I} = n^{*\prime}\mathrm{I}'$$

Επομένως καταλήγουμε ότι

$$B'_x = B_x$$

Συνοψίζοντας, έχουμε για το μετασχηματισμό του ηλεκτρικού πεδίου και του μαγνητικού πεδίου ανάμεσα στο άτονο και το τονούμενο σύστημα, όπου το δεύτερο κινείται ως προς το πρώτο με ταχύτητα $\mathbf{v_0} = v_0\hat{\mathbf{x}}$,

$$E'_x = E_x, \qquad E'_y = \frac{E_y - v_0 B_z}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \qquad E'_z = \frac{E_z + v_0 B_y}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

$$B'_x = B_x, \qquad B'_y = \frac{B_y + \frac{v_0}{c^2}E_z}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \qquad B'_z = \frac{B_z - \frac{v_0}{c^2}E_y}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό αναφέροντας ποια είναι τα μεγέθη στον ηλεκτρομαγνητισμό που μετασχηματίζονται (κατά Lorentz) όπως το σύστημα (x, y, z, t) και το (p_x, p_y, p_z, E). Τα μεγέθη είναι το διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ και το βαθμωτό δυναμικό V

$$A'_x = \frac{A_x - Vv_0/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z, \quad V' = \frac{V - A_x v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο συνδέονται με τα δυναμικά με τις σχέσεις

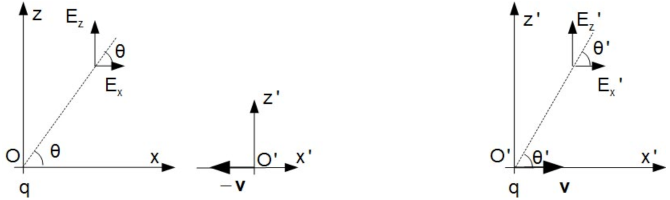
$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

ΠΕΔΙΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

Θεωρούμε ότι στο σύστημα $(Oxyz)$ φορίο $q > 0$ είναι ακίνητο στην αρχή των αξόνων. Γνωρίζουμε ότι το πεδίο $\mathbf{E}$ που δημιουργεί έχει μέτρο $q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ και είναι ακτινικό προς τα έξω. Στο επίπεδο (xz) οι συνιστώσες είναι

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qx}{(x^2+z^2)^{3/2}},$$
$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\sin\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qz}{(x^2+z^2)^{3/2}}$$

Το σύστημα $(O'x'y'z')$ κινείται με ταχύτητα v, παράλληλη με τον άξονα των x και κατεύθυνση τον αρνητικό ημιάξονα των x. Όταν το O συμπίπτει με το O' θεωρούμε ότι $t = t' = 0$ και βέβαια το γεγονός της σύπτωσης O και O' έχει $x = y = z = 0$ και $x' = y' = z' = 0$. Στο τονούμενο σύστημα το φορτίο q κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$. Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο που μετρά παρατηρητής ακίνητος στο τονούμενο σύστημα και στη θέση (x', z');



Έχουμε ήδη δει ότι τα **E** και **E**$'$, *όπου στο άτονο σύστημα το φορτίο είναι ακίνητο*, υπακούουν τις

$$E'_x = E_x, \qquad E'_z = \frac{E_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma E_z$$

Επίσης, από τους μετασχηματισμούς για τα x, y, z, t έχουμε

$$x = \gamma\left(x' - vt'\right), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' - vx'/c^2\right)$$

Προσέξτε ότι το τονούμενο σύστημα κατευθύνεται προς τα αρνητικά x, αλλά οι παραπάνω μετασχηματισμοί δίνουν τα άτονα ως συνάρτηση των τονουμένων μεγεθών.
Για $t' = 0$ θα έχουμε $x = \gamma x'$. Οπότε γράφουμε

$$E'_x = E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\,(\gamma x')}{((\gamma x')^2 + z^2)^{3/2}},$$
$$E'_z = \gamma E_z = \gamma\,\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz'}{((\gamma x')^2 + z^2)^{3/2}}$$

Πρώτη παρατήρηση είναι ότι

$$\frac{E'_z}{E'_x} = \frac{z'}{x'}$$

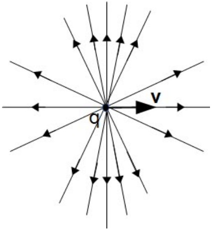
δηλαδή, το πεδίο παραμένει ακτινικό και στο τονούμενο σύστημα όπου το φορτίο κινείται. Προσοχή: αυτό *δεν* σημαίνει άμεση μετάδοση πληροφορίας! Γνωρίζουμε ότι το φορτίο έχει ταχύτητα $\mathbf{v}$ και περνά από το O την χρονική στιγμή $t' = 0$. Το μέτρο E' είναι

$$E'^2 = E_x'^2 + E_z'^2 = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{q^2 \left(1-\beta^2\right)^2}{(r'^2)^2 \left(1-\beta^2 \sin^2\theta'\right)^3}$$

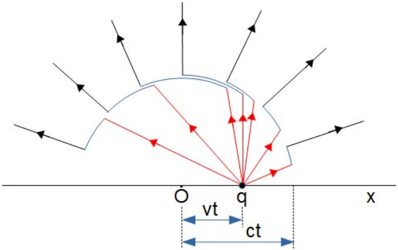
$$E' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} \frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2 \sin^2\theta'\right)^{3/2}}$$

$$\text{όπου } r'^2 = x'^2 + z'^2, \; \beta = \frac{v}{c} \; \text{και } \sin\theta' = \frac{z'}{r'}$$

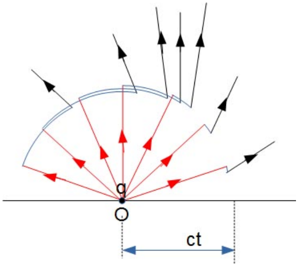
Βλέπουμε ότι όσο η γωνία θ αυξάνει προς τις 90°, η τιμή του πεδίου αυξάνει. Επομένως, και οι δυναμικές γραμμές είναι πυκνότερες.



Το πεδίο φορτίου που ξεκινά ή σταματά να κινείται.



Θεωρούμε φορτίο q ακίνητο στο O, το οποίο την χρονική στιγμή $t = 0$ ξεκινά, και, επιταχυνόμενο για πολύ μικρό χρονικό διάστημα, αποκτά ταχύτητα $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$. Το παραπάνω στιγμιότυπο είναι σε χρόνο t.



Θεωρούμε φορτίο q που κινείται στον αρνητικό ημιάξονα των x με ταχύτητα $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$ και πλησιάζει το O. Κοντά στο σημείο αυτό επιβραδύνεται σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα και ακινητοποιείται στο O. Το παραπάνω στιγμιότυπο είναι για χρόνο t μετά την ακινητοποίηση του φορτίου.