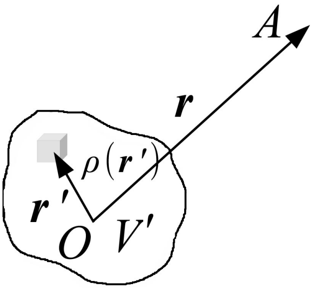
ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ ΣΤΗΝ ΥΛΗ

Ανάπτυξη σε πολύπολα. Κατανομή φορτίου ρ, στην περιοχή της αρχής των αξόνων O εκτείνεται σε όγκο V'. Το δυναμικό στο σημείο $A(\mathbf{r})$ δίνεται από την

$$V_A(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r}')dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

όπου dv' ο στοιχειώδης όγκος. Για $|\mathbf{r}|$ πολύ μεγαλύτερο από τις διαστάσεις της κατανομή, δηλαδή για $r'/r << 1$, αναπτύσσουμε σε δυνάμεις του r'/r



$$
\begin{aligned}
|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1} &= \left[(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2\right]^{-1/2} = \\
&= \left[r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' + r'^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{2\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right]^{-1/2} = \\
&= \frac{1}{r}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{r'^2}{r^2} + \frac{3}{8}\left(-\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}\right)^2 + \dots\right] = \\
&= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2}\left(-\frac{r'^2}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2}{r^5}\right) + \dots = \\
&= \frac{1}{r} + \frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{r'^2}{r^3} + \frac{3(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')^2}{r^3}\right) + \dots
\end{aligned}
$$

όπου $\hat{\mathbf{r}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση $\mathbf{r}$ και χρησιμοποιήσαμε το ανάπτυγμα

$$
(1+\epsilon)^a = 1 + \frac{1}{1!}a\epsilon + \frac{1}{2!}a(a-1)\epsilon^2 + \dots
$$

Στην περίπτωσή μας,

$$\epsilon = -\frac{2\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \quad \text{και } a = -1/2$$

και αγνοήσαμε όρους $(r'/r)^\nu$ με $\nu > 2$. Το δυναμικό λοιπόν γράφεται

$$V_A(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dv'}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}\rho(\mathbf{r}')\,dv + \\ + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{1}{2}\frac{3\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'\right)^2 - r'^2}{r^3}\rho(\mathbf{r}')\,dv'$$

Ας δούμε κάθε όρο ξεχωριστά.
Στο πρώτο όρο, το r στον παρονομαστή μπορεί να βγει εκτός του ολοκληρώματος. Το ολοκλήρωμα που μένει δεν είναι τίποτα άλλο από το συνολικό φορτίο Q της κατανομής.
Οπότε, ο πρώτος όρος γράφεται

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dv'}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\int_{V'} \rho(\mathbf{r}')\,dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Ο δεύτερος όρος, βγάζοντας και πάλι το r^2 του παρονομαστή εκτός του ολοκληρώματος, και γράφοντας $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z)$ και $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, γίνεται

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\int_{V'} \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\,dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\int_{V'}\left[\hat{r}_x x + \hat{r}_y y + \hat{r}_z z\right]\rho(\mathbf{r}')\,dv' = \\
=&\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\left[\hat{r}_x\int_{V'} x'\rho(\mathbf{r}')\,dv' + \hat{r}_y\int_{V'} y'\rho(\mathbf{r}')\,dv' + \hat{r}_z\int_{V'} z'\rho(\mathbf{r}')\,dv'\right] = \\
=&\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\left[\hat{r}_x p_x + \hat{r}_y p_y + \hat{r}_z p_z\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}
\end{aligned}
$$

όπου ορίζουμε

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = &\left(\int_{V'} x'\rho(\mathbf{r}')\,dv', \int_{V'} y'\rho(\mathbf{r}')\,dv', \int_{V'} z'\rho(\mathbf{r}')\,dv'\right) = \\
&= \int_{V'} \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\,dv'
\end{aligned}
$$

Το $\mathbf{p}$ εξαρτάται μόνο από την κατανομή και ονομάζεται *διπολική ροπή* της κατανομής ρ.

Ας δούμε και τον τρίτο όρο από το V_A. Ο αριθμητής του κλάσματος γράφεται

$$3\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'\right)^2 - r'^2 = \sum_{i,j} 3(\hat{r}_i r'_i)(\hat{r}_j r'_j) - r'^2\hat{r}^2 = \sum_{i,j} 3\hat{r}_i\hat{r}_j r'_i r'_j - \sum_i r'^2\hat{r}_i\hat{r}_i$$
$$= \sum_{i,j} 3\hat{r}_i\hat{r}_j r'_i r'_j - \sum_{i,j} r'^2\hat{r}_i\hat{r}_j\delta_{ij} = \sum_{i,j}\hat{r}_i\hat{r}_j\left(3r'_i r'_j - r'^2\delta_{ij}\right) =$$

όπου i και j παίρνουν τις τιμές x, y, z, χρησιμοποιήσαμε ότι $\hat{r}^2 = 1$ και το σύμβολο δ_{ij} (δέλτα του Kronecker) ορίζεται

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Ο τρίτος όρος λοιπόν γράφεται

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\frac{1}{2}\sum_{ij}\hat{r}_i\hat{r}_j\int_{V'}\left(3r'_i r'_j - r'^2\delta_{ij}\right)\rho(\mathbf{r}')\,dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\frac{1}{2}\sum_{ij}\hat{r}_i\hat{r}_j Q_{ij}$$

όπου ορίζουμε

$$Q_{ij} = \int_{V'} \left(3r'_i r'_j - r'^2\right) \rho(\mathbf{r}')\, dv'$$

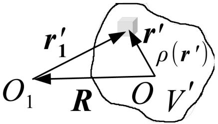
εξαρτάται και πάλι μόνο από την κατανομή και ονομάζεται *τετραπολική ροπή* της κατανομής. Ξαναγράφουμε λοιπόν το δυναμικό

$$V_A(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\frac{1}{2}\sum_i\sum_j \hat{r}_i\hat{r}_j Q_{ij}$$

Στην περίπτωση που το ολικό φορτίο Q είναι μηδέν, ο σημαντικός όρος είναι ο δεύτερος

$$V_A(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}\right)$$

Στο σημείο αυτό ας δούμε ότι στην περίπτωση που $Q = 0$, η διπολική ροπή $\mathbf{p}$ είναι ανεξάρτητη από την αρχή των αξόνων που επιλέγουμε.



Αν θεωρήσουμε ως νέα αρχή των αξόνων το O_1 με $\mathbf{R}$ το διάνυσμα $\overrightarrow{OO_1}$, θα ισχύει βέβαια $\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r}_1'$. Οπότε

$$\mathbf{p} = \int_{V'} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}')\, dv' = \int_{V'} \mathbf{r}' dq = \int_{V'} \left(\mathbf{r}_1' + \mathbf{R}\right) dq =$$
$$= \int_{V'} \mathbf{r}_1' dq + \mathbf{R} \int_{V'} dq = \int_{V'} \mathbf{r}_1' dq = \mathbf{p}_1$$

Στην περίπτωση που εκτός του συνολικού φορτίου Q και η διπολική ροπή της κατανομής είναι μηδέν, τότε ο σημαντικός όρος στο δυναμικό είναι αυτός της τετραπολικής ροπής.

Υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου από το δυναμικό διπόλου Από τη σχέση που συνδέει το πεδίο με το δυναμικό θα έχουμε

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}}{r^2}\right) = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{r^3}\right) =$$

$$= -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{xp_x + yp_y + zp_z}{r^3}\right)$$

Ας δούμε κάθε όρο ξεχωριστά

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{xp_x}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{xp_x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{p_x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3p_x x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{yp_y}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{yp_y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{3p_y yx}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{zp_z}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{zp_z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{3p_z zx}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Οπότε

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{xp_x + yp_y + zp_z}{r^3} = \frac{p_x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3(p_x x + p_y y + p_z z)x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = $$
$$= \frac{p_x}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})x}{r^5}$$

Όμοια

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{xp_x + yp_y + zp_z}{r^3} = \frac{p_y}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})y}{r^5}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{xp_x + yp_y + zp_z}{r^3} = \frac{p_z}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})z}{r^5}$$

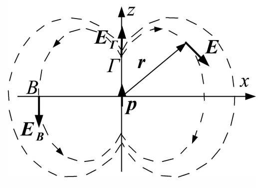
και τελικά

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{xp_x + yp_y + zp_z}{r^3}\right) = \frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}$$

Το πεδίο λοιπόν γράφεται

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right)$$

Στο Σχήμα σχεδιάζουμε τις δυναμικές γραμμές διπολικής ροπής, θεωρώντας ότι $\mathbf{p} = (0, 0, p)$. Περιμένουμε συμμετρία σε στροφή γύρω από τον άξονα z. Οπότε, σχεδιάζουμε τις δυναμικές γραμμές στο επίπεδο (x, z)



Για το σημείο $B(-r_B, 0, 0)$ θα έχουμε $\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{p} = 0$ και το πεδίο γίνεται

$$E_B = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}}{r_B^3}$$

Για το σημείο $\Gamma(0, 0, r_\Gamma)$, θα έχουμε $\mathbf{r}_\Gamma \cdot \mathbf{p} = r_\Gamma p$ και επειδή τα $\mathbf{r}$ και $\mathbf{p}$ έχουν κοινό μοναδιαίο διάνυσμα στην περίπτωσή μας

$$\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} = \frac{3(r_\Gamma p \mathbf{r}_\Gamma)}{r_\Gamma^5} = \frac{3(p\hat{r}_\Gamma)}{r_\Gamma^3} = \frac{3\mathbf{p}}{r_\Gamma^3}$$

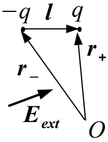
Και το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο Γ γίνεται

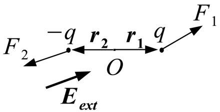
$$\mathbf{E}_\Gamma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2}{r_\Gamma^3}\,\mathbf{p}$$

Μπορούμε να προσεγγίσουμε την έννοια του διπόλου με την απλούστερη κατασκευή που έχει διπολική ροπή: δύο φορτία q και $-q$ σε απόσταση l μεταξύ τους. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της διπολικής ροπής για το ζευγάρι των φορτίων, το ολοκλήρωμα γίνεται απλό άθροισμα στα δύο φορτία

$$\mathbf{p} = \int_{V'} \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\,dv' = \int_{V'} \mathbf{r}'\,dq = \sum_{i=1,2} \mathbf{r}'_i q_i = q\mathbf{r}_+ + (-q)\mathbf{r}_- =$$

$$= q\,(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = q\mathbf{l}$$





Δυναμική ενέργεια συστήματος φορτίων q και $-q$ σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_{ext}$

$$W = -qV_{ext}(\mathbf{r}_-) + qV_{ext}(\mathbf{r}_+) = q\left(-V_{ext}(\mathbf{r}_-) + V_{ext}(\mathbf{r}_- + \mathbf{l})\right) = \\ = q\Delta V_{ext} = q\left(-\mathbf{E}_{ext}\cdot\mathbf{l}\right) = -\mathbf{E}_{ext}\cdot\mathbf{p}$$

Η δυναμική ενέργεια γίνεται ελάχιστη όταν το πεδίο και η ηλεκτρική διπολική ροπή είναι παράλληλα και ομόρροπα.

Μηχανική ροπή σε δίπολο από ομογενές εξωτερικό πεδίο

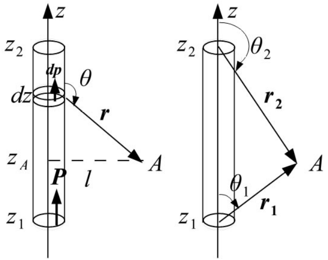
Θεωρώντας ένα σύστημα δύο φορτίων q και $-q$, συνδεδεμένα με μηχανικό τρόπο, που βρίσκονται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_{ext}$, στα δύο φορτία ασκούνται οι δυνάμεις $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = q\mathbf{E}_{ext}$. Η συνολική δύναμη στο σύστημα είναι μηδέν αλλά η ροπή είναι

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1 = \\ = \mathbf{l} \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{l} \times q\mathbf{E}_{ext} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{ext}$$

Στην περίπτωση που έχουμε μη ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, αποδεικνύεται ότι η συνολική δύναμη στο σύστημα των δύο φορτίων δίνεται από τις σχέσεις

$$F_x = \mathbf{p}\cdot\nabla E_x, \quad F_y = \mathbf{p}\cdot\nabla E_y, \quad F_z = \mathbf{p}\cdot\nabla E_z$$

Δυναμικό από πολωμένη ύλη Θεωρούμε πολωμένη ύλη σε σχήμα κυλίνδρου με εμβαδόν βάσης A, όπου η πόλωση $\mathbf{P}$ είναι παράλληλη με τον άξονα του κυλίνδρου. Ως πόλωση ορίζουμε $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i / V$, δηλαδή διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου. Ο άξονας των z ταυτίζεται με τον άξονα του κυλίνδρου ενώ οι δύο βάσεις του κυλίνδρου βρίσκονται στα σημεία $z = z_1$ και $z = z_2$.



Στην θέση z, στον απειροστού ύψους dz κύλινδρο αντιστοιχεί διπολική ροπή $\mathbf{dp} = \mathbf{P}(Adz)$. Αυτή η απειροστή διπολική ροπή δημιουργεί στο σημεία A δυναμικό

$$dV_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{dp}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dp\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{PA\cos\theta dz}{r^2}$$

Προσπαθώντας να γράψουμε την παραπάνω σχέση ως συνάρτηση μόνο της γωνίας θ, παρατηρούμε ότι

$$\frac{l}{z - z_A} = \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \Rightarrow -\frac{l dz}{(z - z_A)^2} = -\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \Rightarrow$$

$$dz = \frac{(z - z_A)^2}{l\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$\frac{z - z_A}{r} = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \longrightarrow r^2 = \frac{(z - z_A)^2}{\cos^2\theta}$$

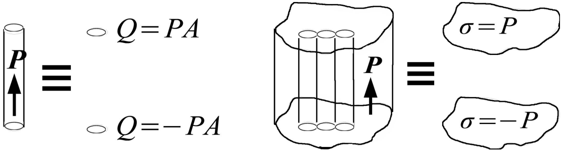
Το δυναμικό στο A γίνεται

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2} PA\cos\theta\frac{(z - z_A)^2}{l\cos^2\theta}\, d\theta\frac{\cos^2\theta}{(z - z_A)^2} = \frac{PA}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{l}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta d\theta =$$

$$= \frac{PA}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{l}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) = \frac{PA}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r_2} - \frac{Q}{r_1}\right)$$

με $Q = PA$. Οι διαστάσεις της διπολικής ροπής **p** είναι φορτίο×μήκος και της πόλωσης **P** είναι φορτίο/επιφάνεια. Επομένως, πράγματι, πόλωση×επιφάνεια έχει διαστάσεις φορτίου και η πόλωση έχει ίδιες διαστάσεις με την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ.

Το δυναμικό είναι το ίδιο που δημιουργούν δύο φορτία $\pm Q$ στην θέση των δύο βάσεων του κυλινδρικού υλικού μας με επιφανειακή πυκνότητα $\sigma = Q/A = PA/A = P$. Αν έχουμε ένα μεγάλου μεγέθους υλικό, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι απαρτίζεται από πολλούς κυλίνδρους, οπότε το αποτέλεσμα είναι πάλι το ίδιο: το δυναμικό που δημιουργεί αυτό το υλικό είναι το ίδιο με αυτό δύο επιφανειακών πυκνοτήτων φορτίου $\sigma = \pm P$ στις δύο βάσεις του υλικού



Στην περίπτωση που η πόλωση **P** δεν είναι κάθετη στην εξωτερική επιφάνεια του υλικού, η αντίστοιχη επιφανειακή πυκνότητα δίνεται από τη σχέση $\sigma = P_\perp$ όπου $P_\perp$ η κάθετη στην επιφάνεια συνιστώσα της πόλωσης.