$$t_2 - \frac{z_2}{v} = (t_1 + \Delta t) - \frac{z_1 + v\Delta t}{v} = t_1 - \frac{z_1}{v}$$

Με αυτή την παρατήρηση, αν $\Psi(f)$, με $f = t - \frac{z}{v}$, παίρνοντας τις μερικές παραγώγους της Ψ ως προς t και z

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{d\Psi}{df}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{d\Psi}{df}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{d^2\Psi}{df^2}$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{d\Psi}{df}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{d\Psi}{df}(-\frac{1}{v}), \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{d^2\Psi}{df^2}(-\frac{1}{v})^2$$

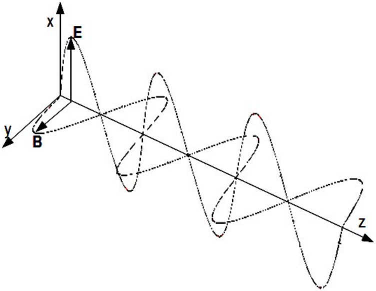
Επομένως έχουμε

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το εξής σύστημα ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου

$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}} = E_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{B} = B\hat{\mathbf{y}} = B_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\hat{\mathbf{y}}$$

δηλαδή, το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου είναι στον άξονα των x, το μαγνητικό στον άξονα των y αλλά και τα δύο διαδίδονται στην διεύθυνση z με ταχύτητα c.



Για το σύστημα αυτό ισχύουν οι νόμοι του Maxwell; Ας το ελέγξουμε.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad \checkmark$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B}{\partial y} = 0 \quad \checkmark$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= \frac{\partial E}{\partial z}\,\hat{\mathbf{y}} = -\frac{E_0\omega}{c}\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]\,\hat{\mathbf{y}} \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= B_0\omega\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]\,\hat{\mathbf{y}} \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \checkmark \quad \text{αν } E_0 = cB_0
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{B} &= -\frac{\partial B}{\partial z}\,\hat{\mathbf{x}} = \frac{B_0\omega}{c}\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]\,\hat{\mathbf{x}} \\
\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= E_0\omega\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]\,\hat{\mathbf{x}} \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \checkmark \quad \text{αν } c^2 = 1/(\mu_0\epsilon_0)
\end{aligned}
$$

Επομένως, ανακεφαλαιώνουμε: το σύστημα του ηλεκτρο-μαγνητικού κύματος

$$\mathbf{E} = E_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\, \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{B} = B_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\, \hat{\mathbf{y}}$$

υπακούει τις εξισώσεις Maxwell στο κενό, με τις συνθήκες

$$E_0 = cB_0, \qquad \epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Το διάνυσμα Poynting. Από τις δύο εξισώσεις του Maxwell

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

πολλαπλασιάζουμε (εσωτερικό γινόμενο) την πρώτη με το $\boldsymbol{B}/\mu_0$ και την δεύτερη με το $\boldsymbol{E}/\mu_0$

$$\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial \boldsymbol{B}^2}{\partial t}$$

$$\frac{\boldsymbol{E}}{\mu_0} \cdot \nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \boldsymbol{E} \cdot \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial \boldsymbol{E}^2}{\partial t}$$

και τις αφαιρούμε

$$\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{E}}{\mu_0} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 + \frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2\right] - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}$$

Ας θυμηθούμε την ταυτότητα που ισχύει για κάθε διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{F}$ και $\boldsymbol{G}$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G} = \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{G}$$

Οπότε, θα έχουμε

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 + \frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2\right] - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}$$

Αν ολοκληρώσουμε τη σχέση σε κάποιο όγκο V και θυμηθούμε το θεώρημα του Gauss

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{G} \, dv = \oint_{S(V)} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{da}$$

με S η κλειστή επιφάνεια που περιβάλλει τον όγκο V, θα πάρουμε

$$\oint_{S(V)} \frac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{da} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2\mu_0} \boldsymbol{B}^2 \, dv - \frac{d}{dt} \int_V \frac{\epsilon_0}{2} \boldsymbol{E}^2 \, dv - \int_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \, dv$$

Τα δύο πρώτα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος είναι η ενέργεια του μαγνητικού U_B και του ηλεκτρικού U_E πεδίου αντίστοιχα. Ορίζοντας το διάνυσμα Poynting

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})$$

ξαναγράφουμε

$$\oint_{S(V)} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{da} = -\frac{d}{dt} U_B - \frac{d}{dt} U_E - \int_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \, dv \qquad (1)$$

Ας δούμε λίγο τον τελευταίο όρο. Η πυκνότητα ρεύματος δίνεται ως

$$\boldsymbol{J} = nq\boldsymbol{v}$$

στην απλή περίπτωση που έχουμε σωματίδια με πυκνότητα n (σωματίδια ανά μονάδα όγκου), φορτίο q που κινούνται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}$. Επομένως

$$\boldsymbol{E} \cdot \mathbf{J} = n(q\boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{v} = n\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

δεν είναι τίποτα άλλο από ισχύς ανά μονάδα όγκου. Και το ολοκλήρωμα θα μας δώσει τη συνολική ισχύ, στο συγκεκριμένο όγκο V που καταναλίσκεται (γι΄ αυτό και το $-$) λόγω της κίνησης των φορτίων. Με άλλα λόγια ενέργεια Joule που καταναλίσκεται από τη διέλευση του ρεύματος. Επομένως, το δεξί μέλος της Εξ.(1) αναφέρεται στο ρυθμό μείωσης της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου, της αντίστοιχης μείωσης του ηλεκτρικού πεδίου και της κατανάλωσης λόγω του ρεύματος στον όγκο V. Οπότε, μπορούμε να αποδώσουμε στο $\boldsymbol{S}$ την έννοια του ρυθμού της ενέργειας που εξέρχεται από τον όγκο V ανά μονάδα επιφάνειας που περιβάλλει το όγκο αυτό. Δηλαδή η Εξ.(1) δεν είναι τίποτα άλλο από μια ‘‘ποσοτική’’ περιγραφή της διατήρησης της ενέργειας.

Στην περίπτωση που δέν έχουμε φορτία στο χώρο, οπότε ο όρος με το $\boldsymbol{J}$ λείπει, μπορούμε να γράφουμε

$$\oint_{S(V)} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{da} = -\int_V \frac{\partial U}{\partial t}\, dv$$

με U την πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, ή σε διαφορική μορφή

$$\nabla \cdot \boldsymbol{S} = -\frac{\partial U}{\partial t}$$

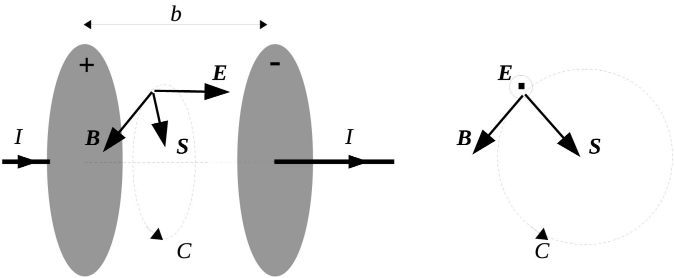
πού είναι ακριβώς αντίστοιχη σχέση με την εξίσωση συνέχειας

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

που περιγράφει την διατήρηση του φορτίου.

Παράδειγμα

Πυκνωτής με επίπεδες κυκλικές πλάκες εμβαδού A και απόσταση b φορτίζεται. Να βρούμε το μαγνητικό πεδίο που αναπτύσσεται στο διάκενο λόγω μεταβολής του ηλεκτρικού πεδίου. Λόγω συμμετρίας περιμένουμε οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου να είναι κύκλοι παράλληλοι με τις πλάκες του πυκνωτή και με κέντρο στον άξονα συμμετρίας. Το μαγνητικό πεδίο θα είναι βέβαια εφαπτομενικό στις γραμμές αυτές και το μέτριο του θα εξαρτάται μόνο από τον απόσταση από τον άξονα.



Οπότε από τον νόμο του Ampère-Maxwell

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S(C)} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{da}$$

όπου C επιλέγουμε μια δυναμική γραμμή, κύκλο ακτίνας r, και $S(C)$ είναι μια επιφάνεια που καταλήγει στην C. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι χωρικά ομογενές, και επιλέγοντας για επιφάνεια S την επιφάνεια του κύκλου C θα πάρουμε

$$B\, 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE}{dt}\, \pi r^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2}\, \epsilon_0 \frac{dE}{dt}\, r$$

Από τον πυκνωτή γνωρίζουμε ότι $E = \sigma/\epsilon_0 = Q/(\epsilon_0 A)$. Οπότε

$$B = \frac{\mu_0}{2A}\frac{dQ}{dt}\, r = \frac{\mu_0}{2A}\, I\, r$$

Η διεύθυνση του $\boldsymbol{B}$ είναι παντού κάθετη σ′ αυτή του $\boldsymbol{E}$. οπότε

$$|\boldsymbol{S}| = \frac{1}{\mu_0}|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}| = \frac{EIr}{2A}$$

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα του **S** στην κυλινδρική επιφάνεια που περικλείει το διάκενο ανάμεσα στις πλάκες του πυκνωτή. Η συνεισφορά από τις επιφάνειες που αντιστοιχούν στις βάσεις αυτής της κυλινδρικής επιφάνειας (δηλαδή οι επιφάνειες που ακουμπάνε στις πλάκες του πυκνωτή) δεν συνεισφέρουν γιατί το διάνυσμα S είναι παράλληλο με αυτές. Μας μένει, λοιπόν, μόνο η παράπλευρη επιφάνεια με τιμή $2\pi R\, b$. Το $\boldsymbol{S}$ είναι πάντοτε κάθετο στην επιφάνεια αυτή με μέτρο $EIR/(2A)$. Οπότε,

$$\oint_S \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{da} = \int_{\pi\alpha\rho\alpha\pi\lambda.} \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{da} = -\frac{EIR}{A}\,\pi R\, b$$

όπου το $(-)$ προέρχεται διότι το διάνυσμα **S** κατευθύνεται προς τα μέσα ενώ η στοιχειώδης επιφάνεια στην παράπλευρη επιφάνεια είναι προς τα έξω. Τι αναπαριστά αυτή η ποσότητα; Αν αντικαταστήσουμε το ρεύμα I, με την σχέση που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω

$$I = \frac{dQ}{dt} = A\frac{d\sigma}{dt} = \epsilon_0 A\frac{dE}{dt}$$

θα πάρουμε

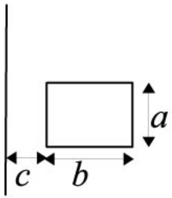
$$-\oint_S \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{da} = E\epsilon_0 A\frac{dE}{dt}R\,\frac{1}{A}\,\pi R\,b = \frac{1}{2}\,\epsilon_0\left(\pi R^2 b\right)\frac{dE^2}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\epsilon_0}{2}\int_V E^2\,dv\right]$$

Μέσα στις αγκύλες είναι η ενέργεια του πυκνωτή και το δεξί μέλος δείχνει το ρυθμό αύξησης (φόρτιση) αυτής της ενέργειας. Πράγματι, δηλαδή, το επιφανειακό ολοκλήρωμα του $\boldsymbol{S}$ στην επιφάνεια που περικλείει όλο το διάκενο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκωτή δίνει το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας.

Στο δεξί μέλος της τελευταίας εξίσωσης θα έπρεπε να εμφανίζεται και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου. Παρατηρήστε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι ανάλογο του ρεύματος I ($B = \mu_0 IR/(2A)$) και επομένως είναι ανάλογο του dE/dt. Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου θα περιέχει την δεύτερη παράγωγο του ηλεκτρικού πεδίου. Αποδεικνύεται ότι με τις προσεγγίσεις που έχουμε κάνει για ιδανικό πυκνωτή και για όχι πολύ γρήγορες (χρονικές) μεταβολές των πεδίων ο όρος που περιγράφει τον ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ενέργειας είναι αμελητέος.

ΑΣΚΗΣΗ 24

Να βρεθεί ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής μεταξύ ενός ευθύγραμμου λεπτού αγωγού απείρου μήκους και ενός λεπτού αγωγού σε σχήμα ορθογωνίου με πλευρές a και b, με την πλευρά μήκους a να είναι παράλληλη με τον ευθύγραμμο αγωγό και η κοντινότερη σε απόσταση c.



Γνωρίζουμε ότι οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου ευθύγραμμου αγωγού είναι κύκλοι με επίπεδο κάθετο στο αγωγό που περνά από το κέντρο τους και με μέτρο

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

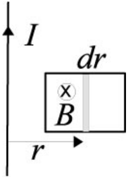
Το πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια του ορθογωνίου. Επιλέγοντας στοιχειώδη επιφάνεια σε απόσταση r από τον αγωγό, πάχους dr θά έχουμε στοιχειώδη ροή από αυτήν την επιφάνεια

$$d\Phi = B(r)adr = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}\, adr \rightarrow$$

$$\Phi = \int_c^{c+b} \mu_0 \frac{I}{2\pi r}\, adr = \mu_0 \frac{I}{2\pi}\, a \int_c^{c+b} \frac{dr}{r} = \mu_0 \frac{I}{2\pi}\, a \ln \frac{b+c}{b}$$

Οπότε, ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής θα είναι

$$M = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{1}{2\pi}\, a \ln \frac{b+c}{c}$$



ΑΣΚΗΣΗ 25

Να δείξετε ότι το φορτίο που διέρχεται από πηνίο που κινείται σε μαγνητικό πεδίο είναι ανεξάρτητο της χρονικής διάρκειας της κίνησης

Από το νόμου του Faraday γνωρίζουμε την αναπτυσσόμενη ΗΕΔ από την μεταβολή της μαγνητικής ροής από ένα πηνίο

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Το ρεύμα που διαπερνά το πηνίο ηλεκτρικής αντίστασης R θα είναι

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Το φορτίο που διέρχεται από το πηνίο στο χρόνο dt που διαρκεί η κίνησή του μέσα στο μαγνητικό πεδίο θα είναι (αγνοούμε το αρνητικό πρόσημο στην παραγόμενη ΗΕΔ)

$$dQ = Idt = \frac{\mathcal{E}}{R}dt = \frac{d\Phi}{dt}\frac{1}{R}dt = \frac{d\Phi}{R} \rightarrow Q = \frac{\Delta\Phi}{R}$$

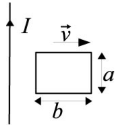
Οπότε, αν η αρχική ορμή είναι μηδεν, $\Phi_i = 0$ και η τελική είναι $\Phi_f = BA$, όπου A είναι το εμβαδόν του μηνίου και το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στη διατομή του πηνίου, θα έχουμε

$$Q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{BA}{R} \rightarrow B = \frac{QR}{A}$$

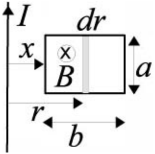
Επομένως, με μέτρηση του Q και γνώση του R και A, μπορούμε να βρούμε το B.

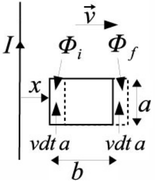
ΑΣΚΗΣΗ 26

Ορθογώνιο αγώγιμο πλαίσιο με πλευρές a και b, κινείται με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{v}$ παράλληλη με την πλευρά b.
Ευθύγραμμος, άπειρος, αγωγός είναι παράλληλος με την πλευρά a του ορθογώνιου πλαισίου και διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I.
Να υπολογιστεί η επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο ορθογώνιο πλαίσιο ως συνάρτηση της απόστασης του πλαισίου από τον ευθύγραμμο αγωγό.



Μπορούμε να βρούμε την μαγνητική ροή που διαπερνά το ορθογώνιο πλαίσιο ως συνάρτηση της απόστασής του από τον ευθύγραμμο αγωγό.
Γνωρίζουμε ότι οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου ευθύγραμμου αγωγού είναι κύκλοι με επίπεδο κάθετο στο αγωγό που περνά από το κέντρο τους και με μέτρο





$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

Το πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια του ορθογωνίου. Επιλέγοντας στοιχειώδη επιφάνεια σε απόσταση r από τον αγωγό, πάχους dr θά έχουμε στοιχειώδη ροή από αυτήν την επιφάνεια

$$d\Phi = B(r)adr = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}\, adr \Rightarrow$$

$$\Phi(x) = \int_x^{x+b} \mu_0 \frac{I}{2\pi r}\, adr = \mu_0 \frac{I}{2\pi}\, a \int_x^{x+b} \frac{dr}{r} = \mu_0 \frac{I}{2\pi}\, a \ln \frac{b+x}{x}$$

Η παραγόμενη ΗΕΔ θα είναι

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \frac{I}{2\pi}\, a\, \frac{x}{b+x} \left(-\frac{b}{x^2}\right) \frac{dx}{dt} = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \frac{xab}{b+x} \left(\frac{1}{x^2}\right) v =$$

$$= \mu_0 \frac{I}{2\pi} \frac{abv}{x(x+b)}$$

Άλλος τρόπος

Για ένα στοιχειώδη χρόνο dt, το πλαίσιο κινείται διάστημα $v\, dt$. Η διαφορά της μαγνητικής ροής που διέρχεται από το πλαίσιο θα είναι

$$d\Phi = \Phi_f - \Phi_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+b)}\, v\, dt\, a - \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\, v\, dt\, a =$$

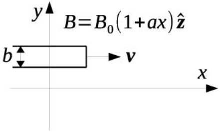
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\, v\, a\, dt \left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\, v\, a\, dt\, \frac{-b}{x(x+b)}$$

Και η αναπτυσσόμενη ΗΕΔ

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\, v\, a\, \frac{b}{x(x+b)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 28

Μακρύ ορθογώνιο αγώγιμο πλαίσιο πλάτους b κινείται στο επίπεδο (xy) παράλληλα με τον άξονα των x και εισέρχεται στην περιοχή με $x > 0$ όπου επικρατεί μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B_0(1 + ax)\hat{\mathbf{z}}$, με $a(> 0)$ και B_0 γνωστές σταθερές. Ποια θα πρέπει να είναι η ταχύτητα του πλαισίου, **ως συνάρτηση του** x, ώστε η αναπτυσσόμενη τάση εξ επαγωγής στο πλαίσιο να παραμένει σταθερή και ίση με E_0.



Το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια του πλαισίου, οπότε η ροή από το πλαίσιο είναι

$$\Phi = \int_0^x B(x)da = \int_0^x B_0(1 + ax)bdx = B_0 b\left(x + \frac{1}{2}ax^2\right)$$

Η αναπτυσσόμενη τάση εξ επαγωγής είναι ίση με την χρονική παράγωγο της ροής. Οπότε απαιτούμε

$$\frac{d\Phi}{dt} = E_0$$

αγνοώντας την φορά της αναπτυσσόμενης τάσης. Οπότε

$$E_0 = B_0 b \frac{d}{dt}(x + \frac{1}{2}ax^2) = B_0 b \left(\frac{dx}{dt} + ax\frac{dx}{dt} \right) = B_0 b(1 + ax)v \Rightarrow$$
$$v = \frac{E_0}{B_0 b(1 + ax)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 29

Θεωρήστε ότι πέραν του ηλεκτρικού φορτίου, q_e, υπάρχει μαγνητικό φορτίο, q_m. Οπότε οι εξισώσεις Maxwell γράφονται:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

όπου ρ_e και ρ_m η πυκνότητα ηλεκτρικού και μαγνητικού φορτίου αντίστοιχα και $\mathbf{J}_e$ και $\mathbf{J}_m$ οι πυκνότητα ρεύματος ηλεκτρικού και μαγνητικού φορτίου αντίστοιχα. Αν a είναι μια σταθερά

α) Δείξτε ότι με τον μετασχηματισμό

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cos a + c\mathbf{B} \sin a, \quad c\mathbf{B}' = c\mathbf{B} \cos a - \mathbf{E} \sin a$$

$$cq_e' = cq_e \cos a + q_m \sin a, \quad q_m' = q_m \cos a - cq_e \sin a$$

τα τονούμενα μεγέθη υπακούουν τους νόμους του Maxwell.

β) Δείξτε ότι και η δύναμη που ασκείται σε ηλεκτρικό και μαγνητικό φορτίο

$$\mathbf{F} = q_e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + q_m \left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right)$$

παραμένει και αυτή αναλλοίωτη κάτω από τον παραπάνω μετασχηματισμό.

γ) Θεωρώντας ότι έχετε μόνο δύο ηλεκτρικά φορτία q_{e1} και q_{e2}, ξεκινώντας από τον νόμο του Coulomb για την δύναμη μεταξύ των δύο ηλεκτρικών φορτίων, επιλέγξτε κατάλληλα την σταθερά a για να βρείτε τη δύναμη ανάμεσα σε δύο μαγνητικά φορτία q_{m1} και q_{m2}.

(Υπενθύμιση: $c^2 = 1/(\mu_0\epsilon_0)$)

Οι πυκνότητες φορτίου και οι πυκνότητες ρεύματος ακουλουθούν τον ίδιο μετασχηματισμό με τα φορτία:

πυκνότητα φορτίου = φορτίο ανά μονάδα όγκου και

πυκνότητα ρεύματος = πυκνότητα φορτίου επί ταχύτητα φορτίων.

α)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}' = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}\cos a + \boldsymbol{\nabla}\cdot c\mathbf{B}\sin a = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\rho_e\sin a + c\mu_0\epsilon_0\rho_m\sin a\right) =$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\left(\rho_e\sin a + \frac{1}{c}\rho_m\sin a\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho'_e$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $c^2 = 1/(\mu_0\epsilon_0)$.

$$\nabla \cdot c\mathbf{B}' = c\mu_0\rho_m \cos a - \frac{\rho_e}{\epsilon_0}\sin a = \mu_0\left(c\rho_m \cos a - \frac{\rho_e}{\epsilon_0\mu_0}\sin a\right) =$$
$$= \mu_0 c\left(\rho_m \cos a - \frac{\rho_e}{c\epsilon_0\mu_0}\sin a\right) = c\mu_0\left(\rho_m \cos a - c\rho_e \sin a\right) = c\mu_0\rho'_m$$

$$\nabla \times \mathbf{E}' = -\mu_0\left(\mathbf{J}_m \cos a - c\mathbf{J}_e \sin a\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cos a - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\sin a\right) =$$
$$= \mu_0\mathbf{J}'_m - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{B}\cos a - \frac{1}{c}\mathbf{E}\sin a\right) = -\mu_0\mathbf{J}'_m - \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}' = \mu_0\left(\mathbf{J}_e \cos a - c\mathbf{J}_m \sin a\right) + \mu_0\epsilon_0\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\cos a - c\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\sin a\right) =$$
$$= \mu_0\mathbf{J}'_e + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\cos a + c\mathbf{B}\sin a\right) = \mu_0\mathbf{J}'_e + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t}$$

β) Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε την αναλλοιώτητα της δύναμης.

$$\mathbf{F}' = q_e' \left(\mathbf{E}' + \mathbf{v} \times \mathbf{B}'\right) + q_m' \left(\mathbf{B}' - \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E}'\right) =$$

$$= \left(q_e \cos a + \frac{q_m}{c} \sin a\right) \left((\mathbf{E} \cos a + c\mathbf{B} \sin a) + \mathbf{v} \times \left(\mathbf{B} \cos a - \frac{\mathbf{E}}{c} \sin a\right)\right)$$

$$+ \left(q_m \cos a - c q_e \sin a\right) \left(\left(\mathbf{B} \cos a - \frac{\mathbf{E}}{c} \sin a\right) - \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{E} \cos a + c\mathbf{B} \sin a)}{c^2}\right)$$

Ας μαζέψουμε όλους του όρους που είναι ανάλογοι του $q_e\mathbf{E}$

$$q_e \left(\cos^2 a - \frac{1}{c} \cos a \sin a\, \mathbf{v} \times + \sin^2 a + \frac{1}{c} \cos a \sin a\, \mathbf{v}\times\right) \mathbf{E} = q_e \mathbf{E}$$

Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε ότι

$$\mathbf{F}' = q_e \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) + q_m \left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E}\right) = \mathbf{F}$$

γ) Μη έχοντας παρά μόνο ηλεκτρικά φορτία, $q_m = 0$, αν επιλέξουμε $a = \pi/2$ τότε $q'_e = 0$ και $q'_m = cq_e$ και ο νόμος του Coulomb γίνεται

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_{e1}q_{e2}}{r^2} = \frac{1}{4c^2\pi\epsilon_0}\frac{q_{m1}q_{m2}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q'_{m1}q'_{m2}}{r^2}$$

και στο τονούμενο σύστημα δεν έχουμε ηλεκτρικά φορτία.