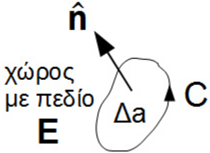
ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑ **STOKES**

Ο στροβιλισμός, **rotE**, μιας διανυσματικής συνάρτησης **E** ορίζεται ως

$$\frac{\oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}}{\Delta a} \xrightarrow{\Delta a \to 0} (\mathbf{rotE}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

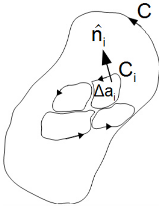
όπου $\oint_C$ είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην κλειστή καμπύλη C, Δa το εμβαδόν που περικλείεται στην κλειστή καμπύλη και $\hat{\mathbf{n}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην στοιχειώδη επιφάνεια Δa.



Η φορά του $\hat{\mathbf{n}}$ επιλέγεται σε σχέση με την φορά κάλυψης της καμπύλης C (κανόνας δεξιόστροφης βίδας).

Το θεώρημα του Stokes. Έχουμε μια κλειστή καμπύλη C. Πάνω στην επιφάνεια που περικλείει (που δεν είναι υποχρεωτικά επίπεδη) σχεδιάζουμε μικρές κλειστές καμπύλες C_i που καλύπτουν όλη την επιφάνεια, όλες με την ίδια φορά κάλυψης των καμπυλών. Από τον ορισμό του στροβιλισμού μπορούμε να γράψουμε για κάθε μικρή καμπύλη

$$(\mathbf{rotE}) \cdot \mathbf{\hat{n}_i}\, \Delta a_i = \oint_{C_i} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}$$

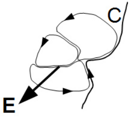


και αθροίζοντας σε όλες τις μικρές καμπύλες

$$\sum_i (\mathbf{rotE}) \cdot \mathbf{\hat{n}_i}\, \Delta a_i = \sum_i \oint_{C_i} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}$$

Ας δούμε το άθροισμα των ολοκληρωμάτων στο δεξί μέλος της ισότητας. Τα γειτονικά τμήματα δύο μικρών κλειστών καμπυλών δεν συνεισφέρουν γιατί τα τοπικά **dl** είναι αντίθετα. Στο άθροισμα αυτό θα παραμείνουν μόνο τα τμήματα που ''ακουμπάνε'' στην μεγάλη καμπύλη. Όταν λοιπόν αυξήσουμε πολύ τον αριθμό των μικρών καμπυλών $i \to \infty$, το δεξί μέλος θα γίνει

$$\sum_i \oint_{C_i} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}$$



Το αριστερό μέλος της ισότητας, θα γίνει ολοκλήρωμα

$$\sum_i (\mathbf{rotE}) \cdot \mathbf{\hat{n}_i}\, \Delta a_i = \sum_i (\mathbf{rotE}) \cdot \mathbf{\Delta a}_i \overset{i\to\infty}{\Longrightarrow} \int_{S(C)} (\mathbf{rotE}) \cdot \mathbf{da}$$

όπου $S(C)$ είναι η επιφάνεια που περικλείει η κλειστή καμπύλη C (ξανα-επισημαίνουμε ότι πρόκειται για μια οποιαδήποτε επιφάνεια που περικλείεται από την C).

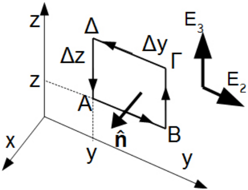
Οπότε

$$\boxed{\int_{S(C)} (\mathbf{rotE}) \cdot \mathbf{da} = \oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}}$$

Αυτό είναι το θεώρημα του Stokes που μας λέει ότι το επικαμπύλιο ολόκληρωμα μιας διανυσματικής συνάρτησης σε μια κλειστή καμπύλη C είναι ίσο με το επιφανειακό ολοκλήρωμα του στροβιλισμού της διανυσματικής συνάρτησης σε **οποιαδήποτε** επιφάνεια S περικλείεται από την C.
Οπότε, αν η διανυσματική συνάρτηση έχει μηδενικό στροβιλισμό, τότε το επιφανεικό ολοκλήρωμα για οποιαδήποτε επιφάνεια θα είναι βέβαια μηδενικό. Οπότε, το θεώρημα μας λέει ότι και το επικαμπύλιο ολκλήρωμα για τις κλειστές καμπύλες που περικλείουν αυτές τις επιφάνειες επίσης μηδενίζεται. Επομένως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι μηδενικό για οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη. Ή, με άλλα λόγια, η διανυσματικιή συνάρτηση με μηδενικό στροβιλισμό (αστρόβιλη) είναι διατηρητική.

Ας δούμε τι μορφή παίρνει ο στροβιλισμός σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Ας επιλέξουμε αρχικά μια (μικρή) κλειστή καμπύλη $AB\Gamma\Delta$ στο επίπεδο yz, οπότε το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ το κάθετο στην επιφάνεια αυτή είναι ουσιαστικά το $\hat{\mathbf{x}}$. Ας δούμε την συνεισφορά κάθε πλευράς στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γύρω από την $AB\Gamma\Delta$, έχοντας στον χώρο το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$



$$A \to B: \quad E_2(z)\Delta y, \qquad \Gamma \to \Delta: \quad -E_2(z+\Delta z)\Delta y$$
$$\Delta \to A: \quad -E_3(y)\Delta z, \qquad B \to \Gamma: \quad E_3(y+\Delta y)\Delta z$$

Άρα για το συνολικό επικαμπύλιο στο $AB\Gamma\Delta$ θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&[E_3(y+\Delta y) - E_3(y)]\,\Delta z - [E_2(z+\Delta z) - E_2(z)]\,\Delta y \\
&= \left[\frac{\partial E_3}{\partial y}\Delta y\right]\Delta z - \left[\frac{\partial E_2}{\partial z}\Delta z\right]\Delta y = \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\right)\Delta y \Delta z \\
&= \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\right)\Delta a
\end{aligned}
$$

Από τον ορισμό του στροβιλισμού, η x-συνιστώσα του θα είναι

$$
(\mathbf{rotE})\cdot\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{rotE})_x = \frac{1}{\Delta a}\oint_C \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\right)
$$

Όμοια δείχνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{rotE})\cdot\hat{\mathbf{y}} &= (\mathbf{rotE})_y = \left(-\frac{\partial E_3}{\partial x} + \frac{\partial E_1}{\partial z}\right), \\
(\mathbf{rotE})\cdot\hat{\mathbf{z}} &= (\mathbf{rotE})_z = \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

Μπορούμε να γράψουμε επίσης

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix}$$

γι΄ αυτό και γράφουμε

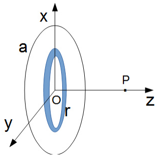
$$\mathbf{rot}\mathbf{E} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}$$

τον οποίο (συμβολισμό μόνο!) χρησιμοποιούμε για όλα τα συστήματα συντεταγμένων.

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος ακτίνας a και επιφανειακής πυκνότητας φορτίου σ.

Το δυναμικό στο σημείο P από το στοιχειώδες φορτίο που βρίσκεται ανάμεσα σε περιφέρειες ακτίνας r και $r + dr$ πάνω στο δίσκο είναι



$$dV_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma\, 2\pi r\, dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

και το δυναμικό από όλο τον δίσκο

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\sigma\, 2\pi r\, dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^a \frac{d(r^2 + z^2)}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} 2\sqrt{r^2 + z^2}\Big|_0^a = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + z^2} - |z| \right)$$

Λόγω συμμετρίας, περιμένουμε το δυναμικό να είναι το ίδιο και για $z > 0$ και $z < 0$.

Για $z = 0$ θά έχουμε το δυναμικό στο κέντρο του δίσκου

$$V_O = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0}$$

Για μεγάλα z, δηλαδή $a/z \to 0$ θα έχουμε

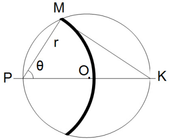
$$\sqrt{z^2 + a^2} - z = z\left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}} - 1\right) = z\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2} + \dots - 1\right) = \frac{a^2}{2z}$$

και

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{a^2}{2z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\pi a^2}{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{z}$$

Για σημεία εκτός του άξονα z ο υπολογισμός του δυναμικού οδηγεί σε ελλειπτικά ολοκληρώματα. Αλλά μπορούμε να βρούμε το δυναμικό σε κάποιο σημείο της περιφέρειας του δίσκου.

Ας πούμε στο τυχαίο σημείο P.



Φέρνοντας ένα κύκλο ακτίνας r και έναν με $r + dr$, το φορτίο που περιέχει η σκιαγραφημένη περιοχή είναι

$$dq = \sigma \left(2\pi r \frac{2\theta}{2\pi} \right) dr = 2\sigma\theta r dr$$

και το δυναμικό στο P από αυτό το στοιχειώδες φορτίο θα είναι

$$dV_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\sigma\theta r dr}{r} = \frac{\sigma\theta dr}{2\pi\epsilon_0} \Rightarrow V_P = \int_0^{2a} \frac{\sigma\theta\, dr}{2\pi\epsilon_0}$$

Αλλά, το τρίγωνο PMK είναι ορθογώνιο. Επομένως:
$r = 2a\cos\theta \rightarrow dr = 2a\, d(\cos\theta)$, και

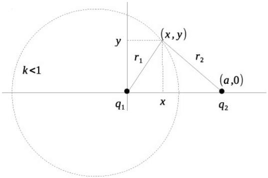
$$
\begin{aligned}
V_P &= \int_{\pi/2}^{0} \frac{\sigma\theta a\, d(\cos\theta)}{\pi\epsilon_0} = -\frac{\sigma a}{\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi/2} \theta\, d(\cos\theta) \\
&= -\frac{\sigma a}{\pi\epsilon_0}\left[\theta\cos\theta|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta\right] \\
&= -\frac{\sigma a}{\pi\epsilon_0}\left[0 - \sin\theta|_0^{\pi/2}\right] = \frac{\sigma a}{\pi\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

ενώ για το κέντρο του δίσκου είχαμε βρει $V = \sigma a/(2\epsilon_0)$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δύο σημειακά φορτία q_1 και q_2 βρίσκονται σε απόσταση a, είναι ετερώνυμα ($q_1 q_2 < 0$) και $|q_1| \neq |q_2|$. Δείξτε ότι η ισοδυναμική επιφάνεια με δυναμικό $V = 0$ είναι επιφάνεια σφαίρας.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα φορτία είναι στον άξονα x, με το q_1 στη θέση $(0, 0, 0)$ και το q_2 στην $(a, 0, 0)$. Το σύστημά μας έχει κυλινδρική συμμετρία. Δηλαδή η περιστροφή γύρω από τον άξονα x δεν θα αλλάζει την ''εικόνα'' του πεδίου. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι στο επίπεδο (xy) η ισοδυναμική επιφάνεια που μας ζητάνε είναι η περιφέρεια ενός κύκλου.



Το τυχαίο σημείο με συντεταγμένες (x, y) στο επίπεδο (xy) απέχει r_1 και r_2 από τα δύο φορτία. Επομένως το δυναμικό στο σημείο αυτό θα είναι

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right)$$

Εφ΄ όσον αναζητούμε την ισοδυναμική επιφάνεια με μηδενικό δυναμικό θα έχουμε

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{q_1}{r_1} = -\frac{q_2}{r_2} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = -\frac{q_1}{q_2}$$

Γράφοντας $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $r_2 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}$ και θέτοντας $-q_1/q_2 = k$ (όπου $k > 0$ μιας και τα φορτία είναι ετερόσημα), θα έχουμε

$$r_1 = kr_2 \Rightarrow r_1^2 = k^2 r_2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = k^2(a-x)^2 + k^2 y^2$$

Προσπαθούμε τώρα να δούμε αν αυτή η σχέση οδηγεί σε περιφέρεια κύκλου.

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 &= k^2(a-x)^2+k^2y^2 \Rightarrow \\
x^2(1-k^2)+y^2(1-k^2)+2k^2ax &= k^2a^2 \Rightarrow \\
x^2+y^2+\frac{2k^2a}{1-k^2}x &= \frac{k^2a^2}{1-k^2} \Rightarrow \\
x^2+2\frac{k^2a}{1-k^2}x+\left(\frac{k^2a}{1-k^2}\right)^2+y^2 &= \frac{k^2a^2}{1-k^2}+\left(\frac{k^2a}{1-k^2}\right)^2 \Rightarrow \\
\left(x+\frac{k^2a}{1-k^2}\right)^2+y^2 &= \frac{k^2a^2(1-k^2)+k^4a^2}{(1-k^2)^2} \Rightarrow \\
\left(x+\frac{k^2a}{1-k^2}\right)^2+y^2 &= \left(\frac{ka}{1-k^2}\right)^2
\end{aligned}
$$

Επομένως, πράγματι έχουμε ένα κύκλο με

$$
\text{κέντρο στο } (-k^2a/(1-k^2),0) \quad \text{και ακτίνα } \left|\frac{ka}{1-k^2}\right|
$$

Με την κυλινδρική συμμετρία που έχουμε, αν περιστρέψουμε γύρω από το άξονα x, η περιφέρεια κύκλου θα μας δώσει την επιφάνεια σφαίρας.

Παρατηρείστε ότι το κέντρο της σφαίρας είναι κοντά στο μικρότερο, κατ΄ απόλυτη τιμή φορτίο, και εκτός του διαστήματος $(0, a)$, δηλαδή ΔΕΝ είναι ανάμεσά στα φορτία. Το σημείο αυτό καθορίζεται κατά πόσο το k είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο της μονάδας. Στην περίπτωση που $k = 1$, γνωρίζουμε ότι η ισοδυναμική επιφάνεια με μηδέν δυναμικό είναι το μεσοκάθετο επίπεδο ανάμεσα στα δύο (ίσα πια) φορτία. Αυτό το επίπεδο αντιστοιχεί σε επιφάνεια σφαίρας με άπειρη ακτίνα και το κέντρο της βέβαια στο άπειρο, πράγμα που επιβεβαιώνει και το αποτέλεσμά μας.