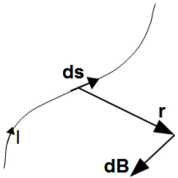
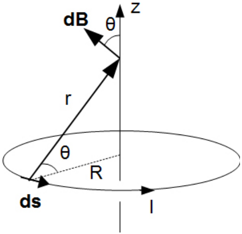
Για όλα τα παραπάνω αναφερόμασταν σε μαγνητικό πεδίο που προερχόταν από ευθύγραμμα ρεύματα/σύρματα. Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύουν για οποιαδήποτε πηγή μαγνητικού πεδίου, για οποιαδήποτε κίνηση φορτίων.

Να γράψουμε τώρα τη σχέση που μας δίνει το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί στοιχειώδες τμήμα **ds** σύρματος που διαρρέεται από ρεύμα I σε απόσταση που καθορίζεται από το διάνυσμα **r** (θα δούμε από πού προέρχεται αυτή η σχέση στο ''Παράρτημα Α′'' που θα αναφερθούμε στο διανυσματικό δυναμικό του μαγνητικού πεδίου)

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}(\mathbf{ds}\times\hat{\mathbf{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^3}(\mathbf{ds}\times\mathbf{r})$$



Να εφαρμόσουμε αυτή την σχέση για να βρούμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένα κυκλικό λεπτό σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα I, σε σημεία του άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του σύρματος και περνά από το κέντρο του.



$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\left(\mathbf{ds} \times \hat{\mathbf{r}}\right) \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}ds$$

Αλλά κάθε απειροστό τμήμα του σύρματος δίνει μαγνητικό πεδίο με διαφορετική διεύθυνση διανύσματος. Οι προβολή αυτών των διανυσμάτων στον άξονα z αθροίζονται ενώ οι προβολές που είναι κάθετες στον άξονα z αλληλοαναιρούνται. Οπότε

$$dB = dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}ds\cos\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{(R^2+z^2)}ds\,\frac{R}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

και αθροίζοντας

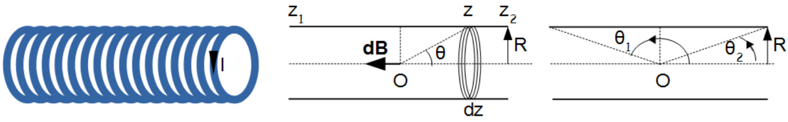
$$B_z = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\,ds\,\frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int ds =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,2\pi R = \frac{\mu_0 I R^2}{2\,(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Αν έχουμε N κυκλικούς ίδιους βρόχους που διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I, ο παραπάνω τύπος πολλαπλασιάζεται με το N. Από τον ίδιο τύπο βλέπουμε ότι στο κέντρο του κυκλικού βρόχου ($z = 0$), το μαγνητικό πεδίο είναι

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Τώρα προχωράμε να βρούμε το μαγνητικό πεδίο στον άξονα σωληνοειδούς ακτίνας βάσης R και μήκους L και n^* περιελλίξεις ανά μονάδα μήκους.



Θεωρούμε τον άξονα z ως άξονα του πηνίου και ζητάμε το μαγνητικό πεδίο στην αρχή του άξονα O, που μπορεί να οριστεί με τις γωνίες θ_1 και θ_2 που το σημείο μας "βλέπει" τα άκρα του πηνίου, που στον άξονα z αντιστοιχούν στα σημεία z_1 και z_2. Στη θέση z, σε πάχος dz υπάρχουν $n^* dz$ σπείρες. Αυτές δημιουργούν στο σημείο O στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο **dB**, πάνω στο άξονα z. Όλες οι σπείρες δημιουργούν πεδίο στον άξονα z οπότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε

$$dB = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} n^* dz \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I R^2 n^*}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Κάνουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\frac{R}{z} = \tan\theta \Rightarrow dz = -\frac{R}{\tan^2\theta}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{R}{\sin^2\theta}\, d\theta$$

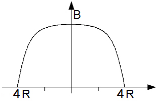
οπότε, έχοντας

$$(R^2 + z^2)^{3/2} = R^3 \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{3/2} = R^3 \left(1 + \frac{1}{\tan^2\theta}\right)^{3/2} = R^3 \sin^3\theta$$

το ολοκλήρωμα γίνεται

$$B = -\frac{\mu_0 I n^*}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \, d\theta = \frac{\mu_0 I n^*}{2} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

όπου βέβαια $\cos\theta_1 = z_1/R$ και $\cos\theta_2 = -z_2/R$.

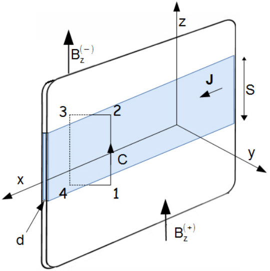


Στο παραπάνω σχήμα σχεδιάζουμε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου στον άξονα σωληνοειδούς, ως συνάρτηση της θέσης στον άξονα, για σωληνοειδές με μήκος 8 φορές την ακτίνα του. Παρατηρούμε ότι το πεδίο είναι σταθερό για αρκετά μεγάλο εύρος του άξονα. Όσο μεγαλύτερος είναι ο λόγος (μήκος/ακτίνα), τόσο μεγαλύτερο εύρος στο εσωτερικό του πηνίου έχει σταθερό μαγνητικό πεδίο.

Για άπειρο σωληνοειδές, θα έχουμε $\theta_1 = -\pi$ και $\theta_2 = 0$, οπότε

$$B = \frac{\mu_0 I n^*}{2}(\cos 0 - \cos \pi) = \mu_0 I n^*$$

Τώρα θα θέλαμε να δούμε πώς μεταβάλλεται το μαγνητικό πεδίο στις δύο πλευρές ενός απείρου σε έκταση λεπτού στρώματος ρεύματος. Το (μικρό) πάχος του στρώματος είναι d και το ρεύμα είναι προς την θετική πλευρά του άξονα των x. Θεωρούμε ότι το μαγνητικό πεδίο στο χώρο οφείλεται όχι μόνο στο στρώμα ρεύματος που έχουμε, αλλά και πιθανά και σε άλλα ρεύματα.



Ας θεωρήσουμε μια λωρίδα (στο σχήμα με χρώμα γαλάζιο) παράλληλη με τον άξονα x κσι πλάτους S. Θεωρούμε επίσης μια καμπύλη C, σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμου (στο σχήμα (1234)), όπου το μισό είναι στην μια πλευρά του στρώματος ($y > 0$) και το άλλο μισό στην άλλη πλευρά του στρώματος ($y < 0$). Το μήκος του παραλληλογράμμου είναι S (για να καλύπτει όλη τη λωρίδα μας) ενώ η άλλη διάσταση είναι πολύ μικρή. Ας βρούμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου στην C. Οι πλευρές (23) και (41) δεν συνεισφέρουν γιατί είναι απειροστές. Οι αλλες δύο πλευρές είναι παράλληλες με τον άξονα των z, οπότε στο ολοκλήρωμα θα συμμετέχει μόνο η z συνιστώσα του πεδίου

$$\left.\begin{array}{l} \oint_C B \cdot ds = B_z^{(+)} S - B_z^{(-)} S \\ \mu_0 I_C = \mu_0 J S d \end{array}\right\} B_z^{(+)} - B_z^{(-)} = \mu_0 J d$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου σε κλειστή καμπύλη είναι ίσο με το ρεύμα που διέρχεται μέσα από την καμπύλη, και ότι το ρεύμα αυτό είναι ίσο με την πυκνότητα ρεύματος επί το εμβαδόν που διαπερνά το ρεύμα, JSd.

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι η μεταβολή της z συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου στις δυο πλευρές του στρώματος ρεύματος είναι

$$|\Delta B_z| = \mu_0 J d$$

Θυμηθείτε το αντίστοιχο για το ηλεκτρικό πεδίο: όταν διαπερνάμε ένα φύλλο με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ, η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κάθετη στην επιφάνεια μεταβάλλεται κατά

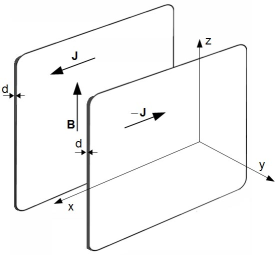
$$|\Delta E_\perp| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Γυρίζοντας στο στρώμα ρεύματος, αν το μαγνητικό πεδίο οφείλεται μόνο στο ρεύμα αυτό, τότε

$$\left(B^{(+)} = B_z^{(+)}, \quad B^{(-)} = B_z^{(-)} \right) \Rightarrow B^{(+)} = B^{(-)} = \frac{1}{2}\mu_0 J d$$

και το μαγνητικό πεδίο ανάμεσα σε δύο παράλληλα στρώματα ρεύματος αντίθετης κατεύθυνσης θα είναι

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 J d + \frac{1}{2}\mu_0 J d = \mu_0 J d$$



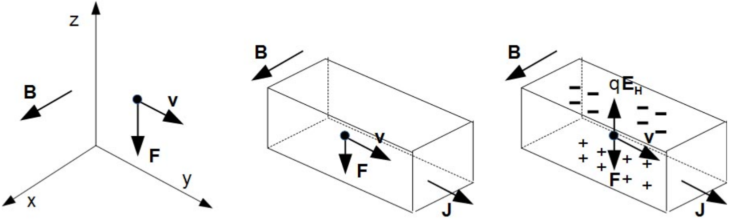
Αν $\mathbf{v}$ (και $= -\mathbf{v}$) είναι η ταχύτητα κίνησης των φορέων του ρεύματος

$$Jd = \frac{\Delta Q}{d \Delta z \Delta t} d = \frac{\Delta Q}{\Delta x \Delta z} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sigma v$$

όπου σ (και $-\sigma$) η πυκνότητα φορτίου στο στρώμα. Οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι το μαγνητικό πεδίο ανάμεσα στα δύο στρώματα ρεύματος είναι

$$\mathbf{B} = \mu_0 \sigma v \hat{\mathbf{z}}$$

Το φαινόμενο Hall. Όπως ήδη αναφέραμε, φορτίο q κινούμενο με ταχύτητα $\mathbf{v}$ σε μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$ δέχεται δύναμη $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε έναν αγωγό στον οποίο στην διεύθυνση y υπάρχει ένα ρεύμα με πυκνότητα $\mathbf{J} = nq\bar{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{y}}$, όπου n αριθμός των φορέων ανά μονάδα όγκου του αγωγού και q το φορτίο κάθε φορέα που κινείται με μέση ταχύτητα $\bar{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{y}}$.



Στην διεύθυνση x επιβάλουμε ένα (ομογενές) μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$. Οπότε, περιμένουμε σε κάθε κινούμενο φορέα να ασκηθεί μια δύναμη $\mathbf{F} = qvB(-\hat{\mathbf{z}})$ η οποία θα αρχίσει να μαζεύει τα (θετικά) φορτία στην ‘‘κάτω’’ επιφάνεια του αγωγού με αντίστοιχη εμφάνιση αρνητικού φορτίου στην ‘‘επάνω’’ επιφάνεια.

Θα αρχίσει να σχηματίζεται, λοιπόν ένα ηλεκτρικό πεδίο **E** κατά την θετική διεύθυνση του άξονα των z το οποίο με την σειρά του θα ασκεί μια δύναμη $q\mathbf{E}$ στους φορείς του αγωγού. Αυτή η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργήθηκε είναι συγγραμμική και με αντίθετη φορά από την αντίστοιχη του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Το ηλεκτρικό πεδίο αυξάνει (δηλαδή και νέοι φορείς μαζεύονται στην ''κάτω'' επιφάνεια του αγωγού) έως ότου το ηλεκτρικό πεδίο αποκτήσει την τιμή E_H (πεδίο Hall) για την οποία

$$qE_H = q\bar{v}B \Rightarrow E_H = \bar{v}B$$

Οπότε, το φορτίο πια κινείται σαν να μην υπήρχε το μαγνητικό πεδίο. Από την πολικότητα του ηλεκτρικού πεδίου μπορούμε να έχουμε πληροφορία κατά πόσο οι φορείς του αγωγού έχουν θετικό ή αρνητικό φορτίο.

Επίσης, από την σχέση του ρεύματος $\mathbf{J} = nq\bar{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{y}}$, παίρνουμε

$$E_H = \frac{JB}{nq}$$

Οπότε, γνωρίζοντας (α) το μαγνητικό πεδίο$\mathbf{B}$ το οποίο εμείς δημιουργούμε, (β) το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_H$ που δημιουργείται (το οποίο μπορούμε να μετρήσουμε μέσω της αναπτυσόμενης διαφοράς δυναμικού στην διεύθυνση z) και (γ) το ρεύμα $\mathbf{J}$ που μπορούμε επίσης να μετρήσουμε, έχουμε μια εκτίμηση για την αριθμό των φορέων ανά μονάδα όγκου, n για τον συγκεκριμένο αγωγό.